BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 .TEORI HIMPUNAN

Definisi 2.1.:

Himpunan adalah koleksi dari obyek-obyek. Obyek-obyek tersebut dinamakan unsur atau anggota dari himpunan. Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan **metode pendaftaran** atau dengan **metode perincian** yaitu dengan menguraikan sifat-sifat khas dari unsurnya.

Contoh 2.1.:

$A = \{1,2,3,4,...\}$, himpunan A dinyatakan dengan metode pendaftaran.

Contoh 2.2.:

$A = \{x \mid x$ adalah bilangan asli$\}$, himpunan A dinyatakan dengan metode perincian.

Definisi 2.2.:

Beberapa operasi pada himpunan :

1. Gabungan (∪)

Apabila ada dua himpunan A dan B maka $(A \cup B)$ adalah

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

himpunan dari semua elemen yang merupakan anggota dari salah satu diantara A atau B. Dapat dinyatakan dengan simbol sebagai berikut :

$$(A \cup B) = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$$

2. Irisan (∩)

(A∩B) adalah himpunan semua elemen yang merupakan anggota keduanya A dan B. Dapat dinyatakan dengan simbol sebagai berikut :

$$(A \cap B) = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$$

Contoh 2.3.:

Himpunan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{1,3,4\}$

1. $A \cup B = \{1,2,3,4\}$
2. $A \cap B = \{1,3\}$

Definisi 2.3.:

Pasangan berurutan (Ordered pair) (a,b) adalah himpunan yang terdiri dari dua anggota dimana urutannya diperhatikan.

Maka (a,b) harus dibedakan dengan $\{a,b\}$ yang terakhir disebut plain set (himpunan bersahaja) dimana $\{a,b\} = \{b,a\}$.

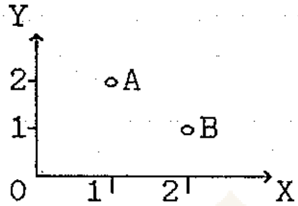
Definisi 2.4.:

Dua pasangan berurutan (a_1,b_1) dan (a_2,b_2) dikatakan sama bhb $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 2.4.:

Koordinat titik pada suatu bidang XY, misalkan titik A=(1,2) dan B=(2,1) merupakan contoh pasangan berurutan.



gbr. 2.1.

Dari gambar 2.1. tampak bahwa $A \neq B$.

Definisi 2.5.:

Himpunan semua pasangan berurutan dari unsur (a,b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$ dinamakan **hasil kali cartesian** dari himpunan A dan himpunan B, dan ditulis sebagai $A \times B$.

Contoh 2.5.:

Untuk R = Himpunan bilangan riil, maka :

> $R \times \{0\}$ adalah sumbu X.

> $\{0\} \times R$ adalah sumbu Y.

Definisi 2.6.:

Himpunan kuasa dari himpunan H, adalah himpunan semua himpunan bagian dari H. Selanjutnya himpunan kuasa dari H diberi simbol PH.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 2.6.:

Misalkan $H = \{a,b,c\}$, maka himpunan kuasanya adalah $PH = \{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

Definisi 2.7.:

Keluarga himpunan adalah suatu himpunan dimana anggota - anggotanya juga merupakan himpunan.

Contoh 2.7.:

PH pada contoh 2.6. adalah suatu keluarga himpunan. Selanjutnya setiap himpunan bagian dari PH juga merupakan suatu keluarga himpunan. Untuk membedakan para anggota dari suatu keluarga maka sering digunakan himpunan indek I. Misalkan $I = \{1,2,3\}$ maka dengan $\{H_i\}_{i\in I}$ dimaksud adalah keluarga $\{H_1,H_2,H_3\}$ dimana H_i adalah himpunan.

Definisi 2.8.:

JH **himpunan jumlah** dari suatu keluarga $\{H_i\}_{i\in I}$ dengan $I \geq \{1,2,...\}$ adalah gabungan dari semua anggota-anggotanya. Jadi $JH = H_1 \cup H_2 \cup ...$ Himpunan JH juga ditulis sebagai $\cup_i H_i$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

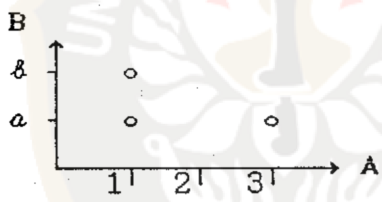
2.2. RELASI DAN FUNGSI

Definisi 2.9.:

Relasi R dari himpunan X ke himpunan Y adalah suatu himpunan bagian dari hasil kali cartesian $X \times Y$.

Contoh 2.8.:

Andaikan R suatu relasi dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{a,b\}$ dengan relasi $R = \{(1,a),(1,b),(3,a)\}$ maka $1Ra$, $1Rb$ dan $3Ra$. Relasi R dapat ditunjukkan dengan menggunakan diagram koordinat $A \times B$ seperti gambar 2.2.



gbr. 2.2.

Definisi 2.10.:

R adalah **relasi biner** pada himpunan E apabila R merupakan relasi antara pasangan elemen-elemen dari E.

Sifat-sifat relasi Biner :

Dengan R suatu relasi biner pada himpunan E, maka untuk $a,b,c \in E$:

1. R **refleksif**, jika aRa untuk setiap $a \in E$.
2. R **simetris**, jika aRb maka bRa.
3. R **transitif**, jika aRb dan bRa maka aRc

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

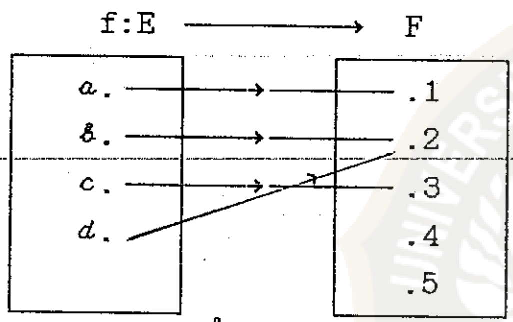
Definisi 2.11.:

Fungsi adalah kejadian khusus dari relasi, f adalah fungsi dari himpunan E ke himpunan F jika setiap anggota dari E mempunyai kawan dalam F, dimana kawannya itu tunggal.

Secara simbolis dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$f : E \longrightarrow F \text{ bhb } (\forall e \in E)(\exists!\, g \in F) \;.\; f(e) = g$$

Contoh 2.9.:



gbr. 2.3.

Gambar 2.3. menunjukkan fungsi f dimana daerah asalnya adalah E dan daerah kawannya adalah F. Sedangkan {1,2,3} daerah hasil dari f.

Definisi 2.12.:

Setiap fungsi dari E ke F disebut juga fungsi dari E *into* F.

Definisi 2.13.:

Jika elemen-elemen dari F juga dihabiskan maka fungsi itu disebut fungsi dari E **onto** F (jadi dapat dinyatakan bahwa setiap fungsi yang onto adalah fungsi into, tetapi tidak sebaliknya). Pemetaan yang onto disebut juga **Surjektif**.

Dengan simbolisme logika :

$$f : E \rightarrow F \text{ surjektif bhb } (\forall g \in F)(\exists e \in E).\; f(e) = g$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 2.10.:

Ambil $\mathscr{A} = \{a, b, c\}$ dan $\mathscr{B} = \{1, 2\}$

Maka $\alpha : a \longrightarrow 1,\ b \longrightarrow 2,\ c \longrightarrow 2$ adalah pemetaan dari $\mathscr{A}$ onto $\mathscr{B}$ (setiap elemen dari $\mathscr{B}$ adalah bayangan)

Sedangkan : $\beta : 1 \longrightarrow a,\ 2 \longrightarrow b$

adalah pemetaan dari $\mathscr{B}$ into, tetapi tidak onto $\mathscr{A}$ (tidak setiap elemen dari $\mathscr{A}$ adalah bayangan). Dalam pemetaan α, $\mathscr{A}$ adalah daerah asal dan $\mathscr{B}$ adalah keduanya daerah kawan dan daerah hasil. Dalam pemetaan β, $\mathscr{B}$ adalah daerah asal, $\mathscr{A}$ adalah daerah kawan dan $\mathscr{E} = \{a, b\} \subset \mathscr{A}$ adalah daerah hasil.

Gambar 2.6. memperlihatkan pemetaan α dan β dari contoh ini

gbr 2.4

Definisi 2.14.:

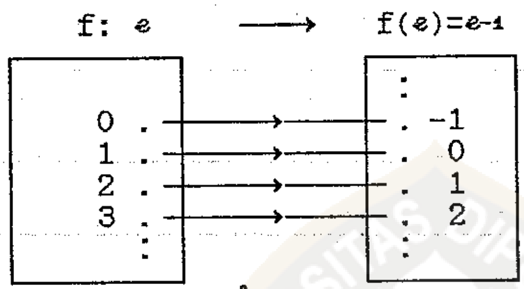
Pada pemetaan yang Onto (Surjektif) suatu fungsi E ke F, sesuatu $g \in F$ mungkin mempunyai lebih dari satu kawan di dalam E. Pada fungsi dengan sifat bahwa setiap $g \in F$ yang mempunyai kawan dalam E, hanya satu kawan saja, maka fungsinya disebut fungsi **Injektif**. Dengan simbolisme logika :

$$f : E \rightarrow F \text{ Injektif bhb } (\forall e_1, e_2 \in E).\ e_1 \neq e_2 \Rightarrow f(e_1) \neq f(e_2)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 2.11.:

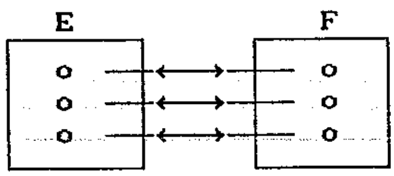
Misalkan E himpunan bilangan bulat non negatif, sedangkan F adalah himpunan bilangan bulat. Maka $f : e \rightarrow f(e) = e-1$ adalah fungsi yang injektif tetapi tidak surjektif.



gbr. 2. 5.

Definisi 2.15.:

Fungsi **bijektif** adalah fungsi dimana setiap anggota dari E menentukan dengan tunggal satu anggota dari F dan sebaliknya. Fungsi bijektif disebut juga fungsi yang injektif dan sekaligus surjektif. Atau bisa juga dikatakan bahwa ada korespondensi satu-satu bertimbal-balik antara anggota-anggota dari E dengan anggota-anggota dari F. Dapat digambarkan sebagai berikut :



gbr. 2. 6.

Bilamana dan hanya bilamana f bijektif maka f^{-1} dapat dipandang sebagai suatu fungsi dari F ke E. Dan f^{-1} juga merupakan fungsi yang bijektif, disebut fungsi invers.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 2.16.:

Jika E dan F adalah himpunan, dikatakan bahwa E **ekuipoten** ke F jika ada fungsi bijektif dari E ke F.

Contoh 2.12.:

A himpunan nama Mahasiswa MIPA jurusan Matematika, Ekuipoten dengan B himpunan NIM-nya.

Definisi 2.17.:

Suatu fungsi f disebut **fungsi himpunan** bhb daerah asalnya terdiri atas himpunan-himpunan.

Contoh 2.13.:

Misal ditentukan $f:E \longrightarrow F$. Sedangkan $A \subset E$, maka $f(A) \subset F$. Didefinisikan suatu perkawanan dari himpunan kuasa PE ke PF, Dengan cara demikian :

$A \in PE$ dikawankan dengan $f(A) \in PF$. Perkawanan dari PE ke PF merupakan suatu fungsi. Fungsi $f: PE \longrightarrow PF$ ini disebut fungsi yang dibangkitkan oleh fungsi $f: E \longrightarrow F$. Meskipun kedua fungsi diatas disajikan dengan tanda yang sama yaitu f namun artinya berlainan. Perbedaannya adalah; daerah asal dari $f: E \longrightarrow F$ adalah himpunan E. Sedangkan daerah asal $f: PE \longrightarrow PF$ adalah keluarga himpunan. Yang terakhir ini yang disebut fungsi himpunan.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.3. ORDERING (URUTAN)

Definisi 2.18.:

Himpunan E disebut **terurut parsial** oleh relasi biner R jika untuk $a,b,c \in$ E, berlaku sifat-sifat refleksif, anti-simetris, transitif.

Catatan :

R adalah anti-simetris, yaitu aRb dan bRa bhb $a=b$

Definisi 2.19.:

R suatu urutan pada E adalah **urutan sederhana** jika merupakan urutan parsial dan jika untuk semua $x,y \in$ E , berlaku salah satu dari x R y atau y R x .

Contoh 2.14.:

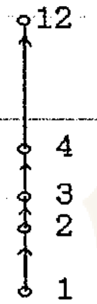
Berikut ini adalah contoh himpunan terurut parsial dan himpunan terurut sederhana.

Himpunan A = {1,2,3,4,12} adalah himpunan bagian dari N himpunan bilangan asli. Dengan relasi biner ($\leq$) didefinisikan pada elemen-elemen dari himpunan A maka relasi tersebut merupakan urutan sederhana karena untuk setiap $a,b \in$ A berlaku salah satu dari $a<b$, $a=b$, atau $a>b$. Sehingga A adalah himpunan terurut sederhana.

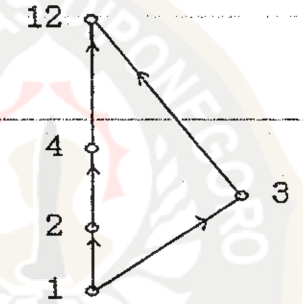
Sedangkan apabila relasi biner yang digunakan adalah relasi

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

"faktor dari" dengan simbol (|), misalkan untuk $a, b \in A$ maka relasi a faktor dari b ditulis sebagai $a \mid b$. Apabila relasi biner (|) didefinisikan pada elemen-elemen dari himpunan A maka himpunan A merupakan himpunan terurut parsial. Berikut ini adalah gambar yang menunjukkan perbedaan antara himpunan A sebagai himpunan terurut sederhana (gbr 2.7.) dan himpunan A sebagai himpunan terurut parsial (gbr 2.8.)



gbr. 2.7.



gbr. 2.8.

Catatan :

Diagram dari himpunan terurut sederhana selalu berbentuk garis lurus.

Definisi 2.20.:

Ambil E sebagai himpunan terurut parsial yang terhubung dengan R suatu relasi, maka :

(1) Setiap himpunan bagian dari E adalah juga terurut parsial yang terhubung dengan relasi R, sedangkan mungkin ada beberapa yang terurut sederhana.

(2) $a \in E$ disebut **elemen pertama** dari E jika aRx, $\forall x \in E$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

(3) $g \in E$ disebut **elemen terakhir** dari E jika xRg, $\forall x \in E$.

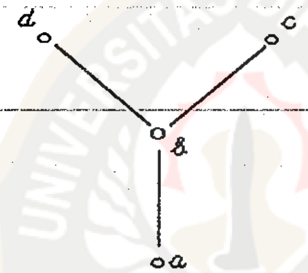
(elemen pertama (terakhir) hanya ada satu).

(4) $a \in E$ disebut **elemen minimal** dari E jika xRa maka berlaku $x = a$ untuk $\forall x \in E$.

(5) $g \in E$ disebut **elemen maksimal** dari E jika gRx maka berlaku $g = x$ untuk $\forall x \in E$.

(elemen minimal (maksimal) bisa lebih dari satu).

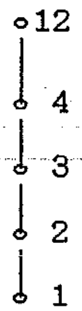
Contoh 2.15.:



gbr. 2.9

Pada gambar 2.9. $E = \{a, b, c, d\}$ dengan relasi R = "terletak lebih rendah dari". Mempunyai elemen pertama a tetapi tidak mempunyai elemen terakhir. Sedangkan elemen minimalnya a, dan elemen maksimalnya c dan d.

Contoh 2.16.:



gbr. 2.10.

Pada gambar 2.10. dimana R sudah tertentu yaitu $\leq$, maka diperoleh elemen pertamanya adalah 1, dimana untuk relasi $\leq$ elemen pertama disebut elemen terkecil. sedangkan elemen terakhir 12 untuk relasi $\leq$ disebut elemen terbesar. Dan tentu saja 1 juga merupakan elemen minimal, sedangkan 12 elemen maksimal.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 2.21.:

Suatu **Struktur Terurut** adalah pasangan terurut (E,R) dimana E adalah himpunan dan R urutan pada E.

Definisi 2.22.:

Ambil (E,R) dan (F,S) sebagai struktur terurut. Suatu isomorfisme dari (E,R) ke (F,S) adalah fungsi bijektif dari E ke F sedemikian sehingga untuk semua $x,y \in E$,

$$x \; R \; y \text{ bhb } f(x) \; S \; f(y)$$

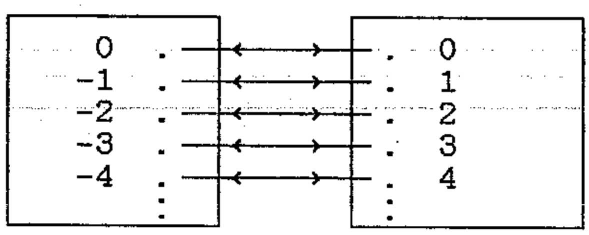
struktur terurut (E,R) dan (F,S) adalah isomorfis jika ada isomorfisme dari satu ke yang lain.

Contoh 2.17.:

Berikut ini adalah contoh isomorfisme dari struktur terurut $(E,\geq)$ ke struktur terurut $(F,\leq)$, dimana $E = \{x \in Z \mid x \leq 0\}$ dan $F = \{x \in Z \mid x \geq 0\}$. Selanjutnya didefinisikan f fungsi dari E ke F sebagai berikut : $f(x) = -x$

Berikut ini adalah diagram yang menunjukkan isomorfisme dari struktur terurut $(E,\geq)$ ke $(F,\leq)$.

$$f : x \longrightarrow f(x) = -x$$



$(E,\geq)$ $(F,\leq)$

Tampak dari diagram diatas bahwa f adalah fungsi yang

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

bijektif, dan untuk setiap $a, b \in E$, berlaku $a \geq b$ maka $f(a) \leq f(b)$, demikian juga sebaliknya.

Definisi 2.23.:

Suatu **Urutan-Rapi** (Well-Ordering) pada E adalah urutan sederhana $\leq$ sedemikian sehingga setiap A himpunan bagian tidak kosong dari E mempunyai elemen terkecil, dengan kata lain setiap A himpunan bagian tidak kosong dari E memuat a suatu elemen yang memenuhi $a \leq x$ untuk semua $x \in A$.

Contoh 2.18.:

E = {1,2,3,4,..} adalah contoh sederhana himpunan yang terurut rapi yang diambil dari himpunan bilangan asli terhadap relasi $\leq$.

Contoh 2.19.:

$E = \{ x \mid x \in Q \}$ bukan himpunan yang terurut rapi karena $A = \{ x \mid x \in Q, x > 2 \}$ himpunan bagian dari E tidak mempunyai elemen terkecil. Sebab jika diambil $2+\delta$ sebagai elemen terkecil akan selalu terdapat $2+\delta/2$ yang lebih kecil dari $2+\delta$ dan lebih besar dari pada 2.

Definisi 2.24.:

Ambil $(E,\leq)$ suatu struktur terurut, dan ambil A sebagai himpunan bagian tidak kosong pada E. c suatu elemen pada E

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

adalah **batas atas [batas bawah]** dari A jika $x \leq c$ [$x \geq c$] untuk semua $x \in A$. Himpunan A adalah **terbatas keatas [terbatas kebawah]** dalam E jika ada suatu **batas atas [batas bawah]** dari A pada E, dan A **terbatas** dalam E jika A terbatas keatas dan juga terbatas kebawah dalam E. c suatu elemen dari E adalah **supremum [batas atas terkecil]** dari A dalam E jika c batas atas dari A dan jika $c \leq d$ untuk semua d batas atas dari A dalam E ; c **infimum [batas bawah terbesar]** dari A dalam E jika c batas bawah dari A dan jika $c \geq d$ untuk semua d batas bawah dari A dalam E.

Theorema 2.1.:

Jika (E,≤) adalah struktur terurut dan jika A adalah himpunan bagian tidak kosong dari E, maka A mempunyai paling banyak satu supremum dan paling banyak satu infimum.

Bukti :

Jika c dan c' adalah suprema dari A dalam E , maka $c \leq c'$ dengan c' adalah batas atas dari A dan dengan c supremum dari A, dan $c' \leq c$ dengan c adalah batas atas dari A dan c' adalah supremum dari A, maka $c = c'$.

Akibatnya, jika A himpunan bagian tidak kosong dari struktur terurut yang memuat c supremum (infimum), kita sebut c itu supremum (infimum) dari A. Supremum (infimum) dari A tersebut seringkali ditulis dengan Sup A (Inf A).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.4. RING DAN FIELD

Definisi 2.25.:

Suatu Ring adalah suatu himpunan R yang tidak kosong beserta dua aturan komposisi yaitu penjumlahan (+) dan pergandaan (.), yang memenuhi aksioma-aksioma berikut :

I. Terhadap aturan komposisi penjumlahan (+) :

1. Tertutup

   $(\forall\ a,b \in R)(\exists!\ c \in R)\ .\ a+b = c$

2. Assosiatif

   $(\forall\ a,b,c \in R)\ .\ a + (b+c) = (a+b) + c$

3. Komutatif

   $(\forall\ a,b \in R)\ .\ a+b = b+a$

4. Terdapat elemen identitas

   $(\exists\ 0 \in R)(\forall\ a \in R)\ .\ a+0 = 0+a = a$

5. Terdapat elemen invers

   $(\forall\ a \in R)(\exists\ (-a) \in R)\ .\ a+(-a) = (-a)+a = 0$

II. Terhadap aturan komposisi pergandaan (.) :

1. Tertutup

   $(\forall\ a,b \in R)(\exists!\ c \in R)\ .\ a.b = c$

2. Assosiatif

   $(\forall\ a,b,c \in R)\ .\ (a.b).c = a.(b.c)$

III. Distributivitas

   $(\forall\ a,b,c \in R)\ .\ a\ .\ (b+c) = a.b + a.c$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$(\forall\ a,b,c \in R)\ .\ (b+c)\ .\ a = b.a + c.a$$

Contoh 2.20.:

Himpunan bilangan bulat Z = {0,±1,±2,...} adalah suatu ring.

Contoh 2.21.:

Himpunan F = $\{a,b,c,d\}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan oleh :

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

dan

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	c	a	c
d	a	d	a	d

adalah Ring.

Definisi 2.26.:

Bila R suatu ring, maka R´ himpunan bagian dari R, yang mana terhadap aturan komposisi dari R juga merupakan ring disebut **subring** dari R. Pernyataan lain untuk mendefinisikan subring adalah sebagai berikut. R´ subring dari ring R bila memenuhi kedua aksioma berikut:

1. $(\forall a,b \in R').\ a-b \in R'$
2. $(\forall a,b \in R').\ a.b \in R'$

Contoh 2.22.:

Dalam contoh 2.21. $F_1 = \{a\}$, $F_2 = \{a,b\}$ adalah subring dari F. Sedangkan $F_3 = \{a,b,c\}$ bukan subring dari F karena tidak

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

memenuhi sifat tertutup pada operasi penjumlahan. Yaitu pada $c + b = b + c = d \notin F_3$.

Definisi 2.27.:

Suatu Ring yang mana untuk operasi pergandaan memenuhi hukum komutatif disebut **Ring Komutatif**.

Contoh 2.23.:

Ring dalam contoh 2.20. komutatif sedangkan Ring dalam contoh 2.21. tidak komutatif karena $b.c = a$ tetapi $c.b = c$.

Definisi 2.28.:

M Suatu himpunan bagian yang tidak kosong dari ring R disebut **ideal** bhb dipenuhi :

1. $(\forall a, b \in M)$. $a-b \in M$
2. $(\forall a \in M)(\forall r \in R)$. $r.a \in M$

2'. $(\forall a \in M)(\forall r \in R)$. $a.r \in M$

M disebut **ideal kiri** bila hanya memenuhi 1 dan 2, dan M disebut **ideal kanan** bila hanya memenuhi 1 dan 2'.

Contoh 2.24.:

Himpunan $Ra = \{r_1a, r_2a, r_3a, \ldots, r_na, \ldots\}$ dengan $a \in R$ dimana R adalah ring komutatif maka Ra ideal.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Bukti:

1\. $(\forall m_1, m_2 \in Ra)$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \in Ra \Rightarrow m_1 = r_1 a \\ m_2 \in Ra \Rightarrow m_2 = r_2 a \end{array}\right\} \text{ dimana } r_1, r_2 \in R$$

sehingga $m_1 - m_2 = r_1 a - r_2 a = (r_1 - r_2)a = r' a \in Ra.$

2\. $(\forall m \in Ra)(\forall r \in R)$

$m \in Ra \Rightarrow m = r_1 a$

$$rm = r(r_1 a) = (r.r_1)a = r' a \in Ra$$

2'. $(\forall m \in Ra)(\forall r \in R)$

$m \in Ra \Rightarrow m = r_1 a$

$$mr = (r_1 a)r = r_1(ar) = r_1(ra) = (r_1.r)a = r''.a \in Ra$$

Definisi 2.29.:

Suatu ideal yang dihasilkan oleh satu elemen disebut **ideal utama**. Misalkan elemen penghasilnya adalah a maka ideal utama yang dihasilkan diberi simbol $[a]$.

Contoh 2.25.:

Ideal pada contoh 2.24. adalah ideal utama, dimana elemen penghasilnya adalah a.

Definisi 2.30.:

Suatu ring R dengan 2 aturan komposisi penjumlahan (+) dan pergandaan (.) disebut **Daerah Integral** jika :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

I. Dengan aturan komposisi penjumlahan memenuhi aksioma :

1. Tertutup
2. Assosiatif
3. Komutatif
4. Terdapat elemen identitas
5. Terdapat elemen invers

II. Dengan aturan komposisi pergandaan memenuhi aksioma :

1. Tertutup
2. Assosiatif
3. Komutatif

   $(\forall\ a,b \in R)\ .\ a.b = b.a$

4. Terdapat elemen identitas

   $(\exists\ e \in R)(\forall\ a \in R)\ .\ a.e = e.a = a$

5'. Tidak mempunyai pembagi nol sejati

   $(\forall\ a,b \in R)\ .\ a.b = 0 \Rightarrow a = 0$ atau $b = 0$

III. Distributivitas

Contoh 2.26.:

Himpunan bilangan bulat $Z = \{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ adalah suatu daerah integral.

Definisi 2.31.:

Suatu ring R dengan 2 aturan komposisi penjumlahan (+) dan pergandaan (.) disebut **Field** jika :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

I. R dengan aturan komposisi penjumlahan memenuhi aksioma :

1. Tertutup
2. Assosiatif
3. Komutatif
4. Terdapat elemen identitas
5. Terdapat elemen invers

II. R dengan aturan komposisi pergandaan memenuhi aksioma :

1. Tertutup
2. Assosiatif
3. Komutatif
4. Terdapat elemen identitas
5. Terdapat elemen invers

$$(\forall a \in R \ \& \ a \neq 0)(\exists a^{-1} \in R) \ . \ a^{-1}.a = a.a^{-1} = e$$

III. Distributivitas

Contoh 2.27.:

Himpunan bilangan bulat $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ bukan merupakan field karena aksioma II.5. tidak terpenuhi.

Contoh 2.28.:

Q himpunan bilangan rasional, R himpunan bilangan riil, dan C himpunan bilangan kompleks merupakan field.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 2.32.:

Jika F suatu field, maka F′ himpunan bagian dari F adalah **subfield** dari F bila untuk aturan komposisi dari field F juga merupakan field.

Contoh 2.29.:

Ambil Q = himpunan bilangan rasional, dan R = himpunan bilangan riil. Keduanya adalah field dan dapat dinyatakan bahwa field Q adalah subfield dari field R.

Definisi 2.33.:

Apabila field F′ adalah subfield dari field F, maka F disebut juga **field perluasan** dari field F′.

Contoh 2.30.:

Ambil field Q dan field R dari contoh 2.29. maka dapat dinyatakan bahwa field R adalah field perluasan dari field Q.

Definisi 2.34.:

Ambil (A,+,.) suatu ring. Urutan $\leq$ pada A sesuai dengan struktur ring dari A, jika $\leq$ sesuai dengan penjumlahan, dan jika untuk semua $x,y \in A$, berlaku :

(OR) jika $x \geq 0$ & $y \geq 0$, maka $xy \geq 0$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Maka $(A,+,.,\leq)$ disebut ring **terurut**. Elemen x pada suatu ring terurut A adalah positif jika $x \geq 0$ dan x tepat positif jika $x > 0$.

Definisi 2.35.:

Jika $(A,+,.,\leq)$ ring terurut dan jika $\leq$ urutan sederhana maka $(A,+,.,\leq)$ juga disebut **ring terurut sederhana**. Sedangkan jika $(A,+,.)$ adalah field, maka $(A,+,.,\leq)$ disebut field terurut. Dan jika $\leq$ urutan sederhana maka $(A,+,.,\leq)$ juga disebut **field terurut sederhana**.

Contoh 2.31.:

$(Z,+,.,\leq)$ adalah contoh ring terurut sederhana.

Contoh 2.32.:

$(Q,+,.,\leq)$ adalah contoh field terurut sederhana.

Theorema 2.2.:

Ambil x, y dan z elemen-elemen dari A ring terurut, berikut ini terpenuhi :

1. $x<y$ bhb $x+z < y+z$, dan $x\leq y$ bhb $x+z \leq y+z$.
2. $x<y$ bhb $y-x > 0$, dan $x\leq y$ bhb $y-x \geq 0$.
3. $x>0$ bhb $-x<0$, dan $x\geq 0$ bhb $-x\leq 0$.
4. $x<0$ bhb $-x>0$ dan $x\leq 0$ bhb $-x\geq 0$.
5. Jika $x>0$, maka $n.x>0$ untuk semua $n\in N$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

6. Jika $x \leq y$ & $z \geq 0$, maka $xz \leq yz$ & $zx \leq zy$.

7. Jika $x \leq y$ & $z \leq 0$, maka $xz \geq yz$ & $zx \geq zy$.

Jika A adalah ring terurut sederhana, berikut juga terpenuhi.

8. Jika $xy > 0$, maka berlaku salah satu dari $x > 0$ & $y > 0$ atau $x < 0$ & $y < 0$.

9. Jika $xy < 0$, maka berlaku salah satu dari $x > 0$ & $y < 0$ atau $x < 0$ & $y > 0$.

10. $x^2 \geq 0$; secara khusus, jika A adalah ring dengan 1 sebagai elemen identitas maka $1 > 0$

11. Jika x punya invers, maka $x > 0$ bhb $x^{-1} > 0$ & $x < 0$ bhb $x^{-1} < 0$.

Bukti :

1. $x < y$ bhb $x+z < y+z$, dan $x \leq y$ bhb $x+z \leq y+z$

- akan dibuktikan $x < y$ bhb $x+z < y+z$

  1. $x < y \Rightarrow x+z < y+z$

     $\forall x, y \in A$, $\exists z \in A$ dimana $z > 0$

     untuk $x < y$ sehingga $x+z < y+z$

  2. $x+z < y+z \Rightarrow x < y$

     $\forall z \in A$, $\exists (-z) \in A \ni (x+z)-z < (y+z)-z$

     $$x + (z-z) < y + (z-z)$$

     $$x < y$$

- Untuk bukti $x \leq y$ bhb $x+z \leq y+z$ analog.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2. $x<y$ bhb $y-x > 0$, dan $x \leq y$ bhb $y-x \geq 0$

- akan dibuktikan $x<y$ bhb $y-x > 0$

  1. $x<y \Rightarrow y-x > 0$

     $\forall x \in A, \exists(-x) \in A \quad \Rightarrow \quad x + (-x) < y + (-x)$

     $$0 < y-x$$

  2. $y-x > 0 \Rightarrow x < y$

     $$y-x > 0$$

     $$(y-x) + x > 0 + x$$

     $$y + (-x + x) > x$$

     $$y + 0 > x$$

     $$y > x$$

- untuk bukti $x \leq y$ bhb $y-x \geq 0$ analog

3. $x>0$ bhb $-x<0$, dan $x \geq 0$ bhb $-x \leq 0$

   akan dibuktikan $x>0$ bhb $-x<0$

  1. $x>0 \Rightarrow -x<0$

     $\forall x \in A, \exists(-x) \in A \quad \Rightarrow \quad x > 0$

     $$x + (-x) > 0 + (-x)$$

     $$0 > -x$$

  2. $-x < 0 \Rightarrow x > 0$

     $$\Rightarrow \quad -x < 0$$

     $$-x + x < 0 + x$$

     $$0 < x$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

4. $x<0$ bhb $-x>0$, dan $x\leq 0$ bhb $-x\geq 0$

pembuktian analog dengan no.3

5. Jika $x>0$, maka $n.x>0$ untuk semua $n\in N^*$

Karena ring terurut, maka memenuhi

(OR) jika $x\geq 0$ dan $y\geq 0$, maka $xy\geq 0$, sehingga

jika $x>0$ dan $n>0$ (karena $n\in N$), maka $n.x>0$.

6. Jika $x\leq y$ & $z\geq 0$, maka $xz\leq yz$ & $zx\leq zy$

Karena ring terurut maka (OR) dipenuhi,akan dibuktikan

jika $x\leq y$ dan $z\geq 0$, maka $xz\leq yz$

$y-x\geq 0$ dan $z\geq 0$, maka $(y-x).z \geq 0$

$$yz - xz \geq 0$$

$$yz \geq xz$$

7. Jika $x\leq y$ & $z\leq 0$ maka $xz\geq yz$ & $zx\geq zy$

Bukti analog dengan 6.

8. Jika $xy>0$, maka berlaku salah satu dari $x>0$ & $y>0$

atau $x<0$ & $y<0$

Jika $xy>0$ diandaikan berlaku $x>0$ & $y<0$

$x>0$ & $(-y)>0$ sehingga menurut (OR)

berlaku $x.(-y) > 0$

$-(xy) > 0$ jadi $xy < 0$. Kontradiksi,

seharusnya $x > 0$ & $y > 0$ atau $x < 0$ & $y < 0$

karena ring terurut sederhana.

9. Jika $xy<0$, maka berlaku salah satu dari $x>0$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

& $y<0$ atau $x<0$ & $y>0$

Bukti analog dengan 8.

10. $x^2 \geq 0$; secara khusus, jika A adalah ring dengan 1 sebagai elemen identitas maka $1>0$.

karena 1 adalah elemen identitas, sedangkan perkalian dengan elemen identitas tidak mengubah hasil, $x^2.1 \geq 0$.

Dari 8. jika $x^2.1 \geq 0$, maka berlaku salah satu dari $x^2 \geq 0$ & $1 \geq 0$ atau $x^2 \leq 0$ & $1 \leq 0$, karena diketahui $x^2 \geq 0$ maka $1 \geq 0$ dan karena $1 \neq 0$ maka $1>0$.

11. Jika x mempunyai invers, maka $x>0$ bhb $x^{-1}>0$ dan $x<0$ bhb $x^{-1}<0$.

$\forall x \in A$, $\exists x^{-1} \in A \ni 1 = x.x^{-1} > 0$

dengan menggunakan 8. jika $x.y > 0$ maka berlaku salah satu dari $x > 0$ & $y > 0$ atau $x < 0$ & $y < 0$.

Sehingga jika $x.x^{-1} > 0$ dan jika $x > 0$ maka $x^{-1} > 0$.

demikian juga jika $x.x^{-1}>0$ dan $x < 0$ maka $x^{-1} < 0$.

Theorema 2.3.:

Jika A adalah suatu ring terurut dan jika $P = A_+$ maka :

(P1) $P + P \subseteq P$

(P2) $P \cap (-P) = \{0\}$

(P3) $P.P \subseteq P$

Selain itu, jika A adalah ring terurut sederhana, maka

(P4) $P \cup (-P) = A$.

Kebalikannya, jika A adalah ring dan jika P adalah

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

himpunan dari A yang memenuhi (P1),(P2) dan (P3), maka ada satu dan hanya satu urutan $\leq$ pada A yang sesuai dengan struktur ring dari A sedemikian sehingga $P = A_+$. Selain itu jika (P4) juga terpenuhi, maka $\leq$ adalah urutan sederhana.

Catatan :

1. $P = A_+ = \{x \mid x \geq 0,\ x \in A\}$
2. $-P = \{z \mid z = -x,\ x \in A_+\}$
3. Syarat (P1) dan (P3) untuk menunjukkan bahwa sifat tertutup terhadap penjumlahan (+) dan pergandaan (.) yang berlaku pada ring terurut A, juga berlaku pada P himpunan bagian dari A.

Bukti :

Ambil $x, y \geq 0$, sehingga $x + y \geq x \geq 0$ maka $P + P \leq P$. (P1) terpenuhi. Dengan menggunakan no.4 dari theorema 2.2. $-P = \{x \in A : x \leq 0\}$

Akan ditunjukkan bahwa (P2) terpenuhi, ambil $x \in P \cap (-P)$, karenanya $x \geq 0$ dan $x \leq 0$ maka $x = 0$.

Sedangkan syarat (P3) terpenuhi karena ekuivalen dengan syarat (OR) pada ring terurut. Dan jika $\leq$ adalah urutan sederhana, maka (P4) terpenuhi karena untuk setiap $x \in A$, berlaku salah satu dari $x \geq 0$ atau $x \leq 0$. Dengan kata lain untuk setiap $x \in A$ berlaku $x \in P$ atau $x \in (-P)$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Kebalikkannya, ambil P sebagai himpunan bagian dari A suatu Ring yang memenuhi (P1), (P2) dan (P3). Menggunakan 2 dari theorema 2.2., ada tidak lebih dari satu urutan pada A yang sesuai dengan struktur ring dari A sedemikian sehingga $P = A_+$, yaitu yang memenuhi :

$x \leq y$ bhb $y - x \in P$

Akan ditunjukkan bahwa relasi $\leq$ ini adalah suatu urutan sederhana, harus dijelaskan syarat-syarat yang diperlukan. Untuk semua $x \in A$, $x \leq x$ karena $x - x \in P$ oleh (P2) (sifat refleksif terpenuhi). Kemudian jika $x \leq y$ dan jika $y \leq x$, maka $y - x \in P$ dan $-(y-x) = x-y \in P$, maka dengan (P2), $y - x = 0$ jadi $y = x$. (Sifat anti-simetris terpenuhi). Selanjutnya jika $x \leq y$ dan jika $y \leq z$, maka $y - x$, $z - y \in P$, maka dengan $z - x = (z - y) + (y - x)$, $z - x$ juga termasuk P karena (P1), bilamana $x \leq z$. (Sifat transitif terpenuhi). Sehingga untuk $x \leq y$, maka $z + x \leq z + y$ karena $(z + y) - (z + x) = y - x \in P$. Selanjutnya (OR) dipenuhi oleh (P3). Sampai disini terbukti jika P adalah sebuah himpunan bagian dari A yang memenuhi (P1) sampai (P3), maka urutan $\leq$ pada A memenuhi $x \leq y$ bhb $y - x \in P$ didefinisikan terurut dengan P. Selain itu, jika (P4) terpenuhi, maka untuk semua $x, y \in A$, berlaku salah satu dari $y - x \in P$ atau $x - y = -(y - x) \in P$, dengan kata lain berlaku salah satu dari $x \leq y$ atau $y \leq x$. Terbukti bahwa urutan $\leq$ adalah urutan sederhana.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)