BAB II

BEBERAPA DEFINISI DAN THEOREMA PENDUKUNG

2.1. Vektor dan Matriks.

Definisi 2.1.1.

Ruang vektor riil V di atas field K adalah himpunan V yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan terhadap elemen-elemen V dan perkalian skalar (perkalian elemen-elemen V dengan elemen K) yang memenuhi:

1. Untuk setiap $u, v \in V$ dan $\alpha \in K$ maka $u+v \in V$.
2. Untuk setiap $u,v,w \in V$ maka $(u+v)+w = u+(v+w)$.
3. Untuk setiap $u, v \in V$ dan $\alpha \in K$ maka $\alpha(u+v) = \alpha u+\alpha v$.
4. Terdapat $0 \in V$, sedemikian sehingga untuk setiap $u \in V$ berlaku $0+u = u+0 = u$.
5. Untuk masing-masing $u \in V$, terdapat $-u \in V$, sedemikian sehingga $(-u)+u = u+(-u) = 0$.
6. Untuk setiap $u, v \in V$ maka $u+v = v+u$.
7. Untuk setiap $u \in V$ dan $\alpha, \beta \in K$ berlaku $(\alpha+\beta)u = \alpha u+\beta u$.
8. Untuk setiap $u \in V$ dan $\alpha,\beta \in K$ berlaku $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
9. Untuk setiap $u \in V$ berlaku $1u = u$, dengan 1 adalah elemen satuan dari K.

Unsur-unsur V di atas, yaitu u, v, dan w dinamakan vektor dan unsur 0 disebut vektor nol.

Definisi 2.1.2.

u dinamakan vektor baris berdimensi n apabila u dituliskan dalam bentuk

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

Dan dinamakan vektor kolom berdimensi n apabila u dituliskan dalam bentuk

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

dimana u_i, $i = 1,2,\ldots,n$ adalah komponen-komponen dari u.

Definisi 2.1.3.

Vektor $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sama, jika $u_i = v_i$, untuk setiap $i = 1,2,\ldots,n$.

Definisi 2.1.4.

Dot produk dari u dan v, disajikan sebagai $u.v$, dibaca "u dot v" adalah suatu skalar:

$$u.v = |u|\ |v| \cos\theta.$$

Definisi 2.1.5.

Vektor v dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $u_1, u_2, \ldots, u_n$ apabila ada skalar α_i, $i=1,2,\ldots,n$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian sehingga

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

Definisi 2.1.6.

Himpunan n buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dikatakan bergantung linier bila terdapat skalar-skalar α_i, $i = 1,2,\ldots,n$ yang tidak semuanya nol, sedemikian sehingga dipenuhi

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$$

Definisi 2.1.7.

Himpunan n buah vektor $\{ u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dikatakan bebas linier apabila terdapat sklar-skalar α_i, $i=1,2,\ldots,n$, sedemikian sehingga :

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$$

hanya dipenuhi jika

$$\alpha_i = 0 \ , \ i=1,2,\ldots,n.$$

Definisi 2.1.8.

Suatu ruang vektor V dikatakan berdimensi n, bila dapat diketemukan suatu himpunan n vektor-vektor $\in$ V yang bebas linier, sedangkan setiap himpunan (n+1) vektor-vektor $\in$ V selalu bergantung linier.

Definisi 2.1.9.

Setiap himpunan n vektor-vektor yang bebas linier $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dari ruang vektor berdimensi n, disebut basis dari ruang vektor.

Definisi 2.1.10.

Himpunan elemen-elemen yang disusun menurut baris dan kolom sehingga membentuk empat persegi panjang disebut matriks.

Dengan demikian bentuk $A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

dengan komponen-komponen a_{ij}, $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$ berupa bilangan-bilangan riil atau kompleks, juga disebut matriks.

Bentuk $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $i = 1,2,\ldots,m$, dalam matriks A menyatakan baris ke i dari matriks A. Sedangkan bentuk

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

menyatakan kolom ke j dari matriks A.

Karena ada m baris dan n kolom, maka dikatakan A matriks yang mempunyai ukuran m x n.

Definisi 2.1.11.

Jumlah dua matriks $A = (a_{ij})$ dan matriks $B = (b_{ij})$ yang masing-masing berukuran m x n adalah matriks $C = (c_{ij})$ yang berukuran m x n, dimana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$.

Definisi 2.1.12.

Perkalian matriks $A = (a_{ij})$ berukuran $m \times n$, dengan skalar r adalah matriks $C = (c_{ij})$ berukuran $m \times n$, dimana $c_{ij} = ra_{ij}$, $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$.

Definisi 2.1.13.

Apabila matriks $A = (a_{ij})$ berukuran $m \times n$ dan matriks $B = (b_{jk})$ berukuran $n \times p$, maka perkalian $A.B$ adalah matriks $C = (c_{ik})$ yang berukuran $m \times p$, dimana

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \quad i = 1,2,\ldots,m \text{ dan } k = 1,2,\ldots,p.$$

Definisi 2.1.14.

Matriks A ukuran $n \times n$ dikatakan non-singular apabila ada matriks B berukuran $n \times n$ sehingga $A.B = I = B.A$. Selanjutnya matriks B dikatakan matriks invers dari matriks A dan ditulis dengan notasi A^{-1}.

Definisi2.1.15.

Misalkan matriks $A = (a_{ij})$ mempunyai ukuran $m \times n$. Matriks transpos dari A dengan notasi A^T adalah matriks yang mempunyai ukuran $n \times m$, yang didefinisikan oleh :

$$A^T = (a_{ji}) \; , \; i = 1,2,\ldots,m \text{ dan } j = 1,2,\ldots,n.$$

Definisi 2.1.16.

Ruang baris dari matriks riil A ($m \times n$) adalah suatu ruang vektor bagian dari R^n yang dibentuk oleh vektor-vektor baris dari A.

Definisi 2.1.17.

Ruang kolom dari matriks riil A (m x n) adalah suatu ruang vektor bagian dari R^m yang dibentuk oleh vektor-vektor kolom dari A.

Definisi 2.1.18.

Matriks $A = (a_{ij})$ dikatakan definite positif jika harga semua determinan minor utamanya, yaitu

$$|A_1| = |a_{11}|, |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots$$

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ adalah positif,}$$

dan A dikatakan semidefinite positif jika harga semua determinan minor utamanya tidak negatif. {ada elemen 0}.

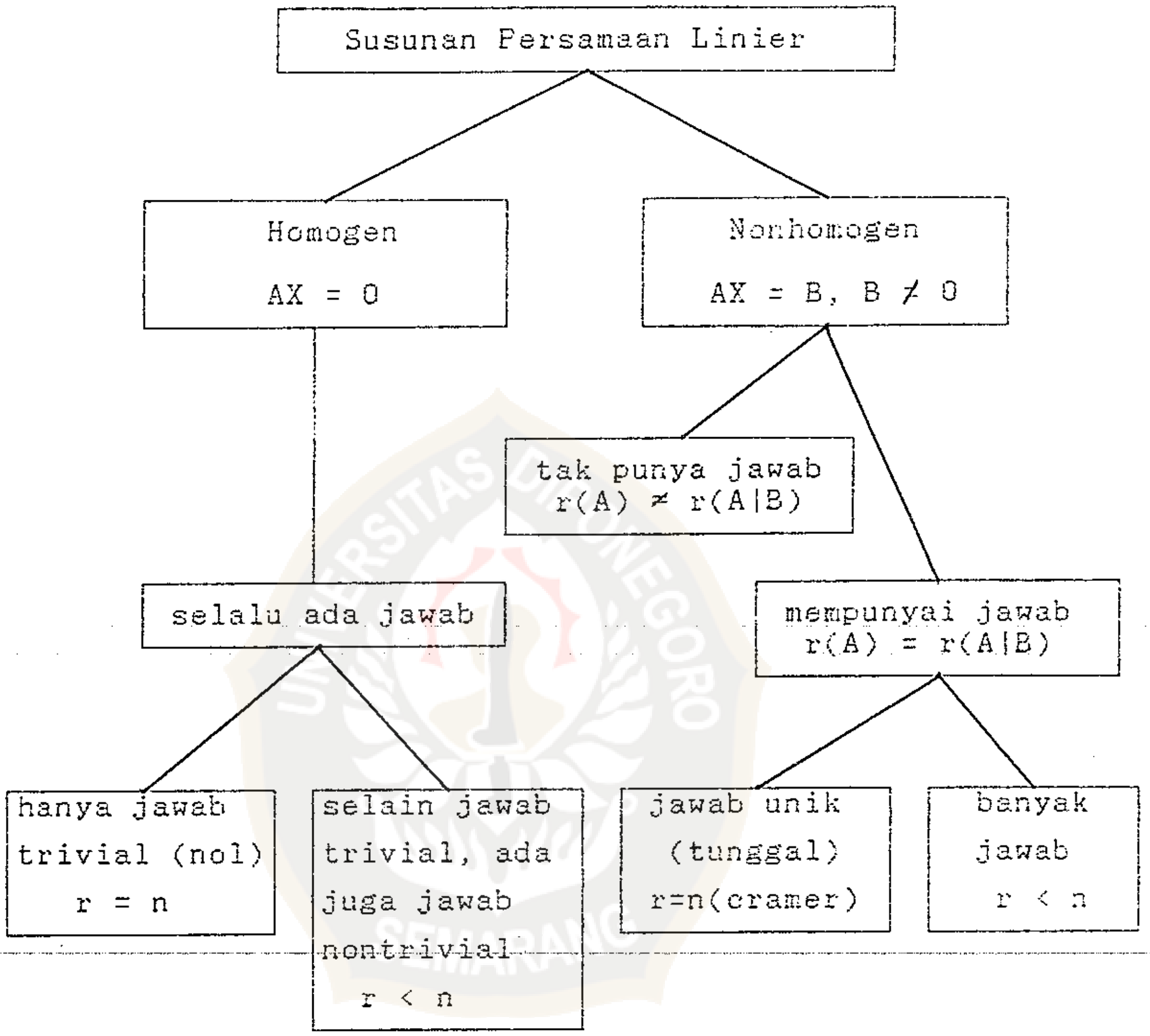
Definisi 2.1.19.

Rank baris dari matriks A adalah dimensi dari ruang baris matriks A. Rank kolom dari matriks A adalah dimensi dari ruang kolom matriks A. Rank matriks A adalah harga rank baris = rank kolom dari matriks A tersebut, ditulis r(A).

Definisi 2.1.20.

Bentuk $a_1x_1+a_2x_2+ \ldots +a_nx_n = b$ disebut persamaan linier.

Susunan Persamaan Linier.



r menyatakan rank dan n menyatakan banyaknya peubah.

2.2. Himpunan Konveks dan Fungsi Konveks.

Definisi 2.2.1.

K suatu himpunan bagian dari R^n disebut himpunan konveks jika untuk setiap dua titik $X_1, X_2 \in K$ dan untuk setiap $\lambda \in R$, $0 \le \lambda \le 1$, dapat ditemukan $X \in K$ sedemikian sehingga : $X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$.

Definisi 2.2.2.

Suatu fungsi $F(X) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yang bernilai riil dan didefinisikan pada suatu himpunan konveks $K \subset R^n$, disebut fungsi konveks jika untuk setiap dua titik X_1 dan X_2 dalam K dan untuk setiap $\lambda \in R$, $0 \le \lambda \le 1$, berlaku :

$$F(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda F(X_1) + (1-\lambda)F(X_2)$$

Definisi 2.2.3.

Suatu fungsi $F(X) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yang bernilai riil dan didefinisikan pada suatu himpunan konveks $K \subset R^n$, disebut fungsi konkaf jika untuk setiap dua titik X_1 dan X_2 dalam K dan untuk setiap $\lambda \in R$, $0 \le \lambda \le 1$, berlaku :

$$F(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \ge \lambda F(X_1) + (1-\lambda)F(X_2)$$

Theorema 2.2.1.

Jika F(X) suatu fungsi konkaf dalam himpunan konveks K, maka -F(X) adalah fungsi konveks.

Bukti :

Ambil $X_1, X_2 \in K$

F(X) fungsi konkaf dalam himpunan konveks K, maka menurut definisi 2.2.3. berlaku :

$$F(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \ge \lambda F(X_1) + (1-\lambda)F(X_2)$$

$$-\{F(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \ge \lambda F(X_1) + (1-\lambda)F(X_2)\}$$

$$-\{F(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2)\} \le -\{\lambda F(X_1) + (1-\lambda)F(X_2)\}$$

menurut definisi 2.2.2, maka -F(X) adalah konveks

Terbukti -F(X) adalah fungsi konveks.

Theorema 2.2.2

Jika F(X) suatu fungsi konveks dalam himpunan konveks K, maka-F(X) adalah fungsi konkaf.

Bukti :

Ambil $X_1, X_2 \in K$

F(X) fungsi konveks dalam himpunan konveks K, maka menurut definisi 2.2.2. berlaku :

$$F(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda F(X_1) + (1-\lambda)F(X_2)$$

$$-\{F(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda F(X_1) + (1-\lambda)F(X_2)\}$$

$$-\{F(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2)\} \geq -\{\lambda F(X\ ) + (1-\lambda)F(X\ )\}$$

menurut definisi 2.2.3, maka -F(X) adalah konkaf

Terbukti -F(X) adalah fungsi konkaf.

Definisi 2.2.4.

Fungsi linier adalah fungsi konveks sekaligus fungsi konkaf, sehingga dipenuhi

$$F(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) = \lambda F(X_1) + (1-\lambda)F(X_2).$$

Theorema 2.2.3.

Jika $Q(X) = p^T X + X^T CX$ berada dalam himpunan konveks K, C matriks semidefinite positif, maka Q(X) adalah konveks.

Bukti :

Matriks C semidefinite positif, maka menurut definisi $|\ C\ | \geq 0$, sehingga :

$\lambda X^T CX \geq \lambda^2 X^T CX$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

ambil $X_1, X_2 \in K$, maka

$$\lambda Q(X_1) + (1-\lambda)Q(X_2) = \lambda(p^T X_1 + X_1^T C X_1) + (1-\lambda)(p^T X_2 + X_2^T C X_2)$$

$$= \lambda p^T X_1 + (1-\lambda)p^T X_2 + \lambda X_2^T C(X_1 - X_2) + \lambda(X_1 - X_2)^T C X_2 + \lambda(X_1 - X_2)^T C(X_1 - X_2) + X_2^T C X_2.$$

$$\geq \lambda p^T X_1 + (1-\lambda)p^T X_2 + \lambda X_2^T C(X_1 - X_2) + \lambda(X_1 - X_2)^T C X_2 + \lambda^2 (X_1^T - X_2^T)\ C(X_1 - X_2) + X_2^T C X_2.$$

$$= \lambda p^T X_1 + (1-\lambda)p^T X_2 + \{\lambda(X_1 - X_2) + X_2\}^T C\ \{\lambda(X_1 - X_2) + X_2\}.$$

$$= p^T(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) + \{\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2\}^T C\ \{\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2\}.$$

$$= Q(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2).$$

Jadi $\lambda Q(X_1) + (1-\lambda)Q(X_2) \geq Q(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2)$.

sehingga $Q(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda Q(X_1) + (1-\lambda)Q(X_2)$

menurut definisi 2.2.2, maka $Q(X)$ konveks.

Definisi 2.2.5.

Fungsi $F(x,y)$ diferensiabel pada x jika :

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x + \Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x}$ ada dan merupakan derifative parsial F pada $x = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = F'_x(x,y)$ dan diferensiabel pada y jika : $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{F(x,y + \Delta y) - F(x,y)}{\Delta y}$ ada dan merupakan derifative parsial F pada $y = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ $= F'_y(x,y)$

Theorema 2.2.4.

menurut definisi 2.2.5 maka derifative parsial pertama dari persamaan $Q(X) = p^T X - X^T CX$ jika ditulis dalam bentuk matriks yaitu $\dfrac{\partial Q}{\partial X} = p - 2CX$

Bukti :

Karena koefisien riil $c_{ij} = c_{ji}$, maka persamaan $Q(X) = p^T X - X^T CX$ dapat ditulis :

$$\begin{aligned} Q(x_1,x_2,\ldots,x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n - \{ & c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + \ldots + 2c_{1n}x_1x_n \\ & + c_{22}x_2^2 + 2c_{23}x_2x_3 + \ldots + 2c_{2n}x_2x_n \\ & + c_{33}x_3^2 + 2c_{34}x_3x_4 + \ldots + 2c_{3n}x_3x_n \\ & + c_{nn}x_n^2 \}. \end{aligned}$$

sehingga

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = p_1 - 2(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n).$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x_2} = p_2 - 2(c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n).$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x_n} = p_n - 2(c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n).$$

maka :

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

.
.
.

jika ditulis dalam bentuk matriks :

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = p - 2CX$$

dimana p = vektor kolom dengan komponen p_j, $(j = 1,2,\ldots,n)$.

X = vektor kolom dengan komponen X_j, $(j = 1,2,\ldots,n)$.

C = matriks simetris dengan komponen c_{ij},

$(\ i = 1,2\ldots,n\ ;\ j = 1,2,\ldots,n\ )$.

2.3. Metoda Simpleks dari Masalah Program Linier.

Tinjau masalah program linier berbentuk standar berikut

maksimalkan $F = C^T X$ (2.1).

terhadap kendala

$$AX = b \qquad (2.2).$$

$$X \geq 0.$$

dimana

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3.1.

Titik X yang memenuhi kendala (2.2) disebut penyelesaian fisibel, dan himpunan penyelesaian fisibel disebut daerah fisibel.

Definisi 2.3.2.

Penyelesaian dari m persamaan dengan n perubah, dan (n-m) perubah diambil nol disebut penyelesaian basis.

Definisi 2.3.3.

Perubah-perubah yang tidak dipilih nol untuk memperoleh penyelesaian basis disebut perubah basis.

Definisi 2.3.4.

Penyelesaian basis yang memenuhi syarat kenonnegatifan disebut penyelesaian basis fisibel.

Definisi 2.3.5.

Penyelesaian basis fisibel yang merosot ialah penyelesaian basis fisibel yang memuat satu atau lebih perubah basis bernilai nol.

Adapun langkah-langkah penyelesaian suatu masalah dengan metode simpleks, dari masalah program linier dengan kendala untuk kasus maksimal, dapat ditetapkan sebagai berikut :

Langkah 1. Menentukan Perubah Basis dan Perubah Non-basis.

Setelah ada bentuk tereduksi lengkap dalam susunan persamaan syarat, yaitu sudah ada matriks I dalam matriks A dan dengan menentukan peubah-peubah basisnya, maka dari persamaan (2.1) dan (2.2) dapat dibentuk tabel simpleks sebagai berikut :

	c_j	c_1 c_2 . . . c_n		
c_i	x_j / x_i	x_1 x_2 . . . x_n	b_i	R_i
c_1 c_2 . . . c_m	x_1 x_2 . . . x_m	a_{11} a_{12} . . . a_{1n} a_{21} a_{22} . . . a_{2n} . . . . a_{m1} a_{m2} . . . a_{mn}	b_1 b_2 . . . b_m	
	z_j		Z	
	$z_j - c_j$			

Kotak ditengah adalah matriks A, dilengkapi dengan b dikanannya .

Baris x_j : semua perubah.

Baris c_j : Koefisien x_j dalam $F = \sum_j c_j x_j$

Kolom x_i : Perubah yang menjadi basis.

Kolom c_i : Koefisien yang sesuai dengan x_i (koefisien dari perubah yang menjadi basis).

Baris z_j : $$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$$

Langkah 2. Menentukan Perubah yang Memasuki Basis.

Dipilih k sedemikian sehingga

$$z_k - c_k < 0$$

dan $z_k - c_k = \min_j \{ z_j - c_j \}$.

Selanjutnya kolom ke-k disebut kolom kunci serta x_k dipilih sebagai perubah yang memasuki basis.

Langkah 3. Memilih Perubah Basis yang Keluar dari Basis.

Jika kolom ke-k adalah kolom kunci, maka disusun $R_i = \dfrac{b_i}{a_{ik}}$ dengan $a_{ik} > 0$. Selanjutnya dipilih r sedemikian rupa sehingga $R_r = \min_i \{ R_i \}$.

maka x_r adalah perubah basis yang dipilih untuk diganti.

Baris ke-r disebut baris kunci dan a_{rk} disebut unsur kunci.

Langkah 4. Menghitung komponen-komponen akibat pertukaran basis.

Setelah pertukaran perubah basis, maka selanjutnya dilakukan operasi-operasi elementer terhadap baris-baris A supaya dalam tabel selanjutnya, kolom kunci menjadi satuan, menggantikan kolom satuan dari perubah basis yang digantikan, jadi :

Baris kunci dibagi dengan unsur kunci supaya unsur kunci menjadi = 1. Kemudian unsur-unsur laindalam kolom kunci dinolkan dengan perantaraan baris kunci yang baru.

Baris z_j dan $z_j - c_j$ disusun lalu proses diulang sampai diperoleh penyelesaian optimal.

Syarat Optimal.

Jika terdapat penyelesaian fisibel basis $X_o = D^{-1}b$ yang menghasilkan $F(X_o) = Z_o = CX_o$ sedang $z_j - c_j \geq 0$ untuk semua j diluar basis maka $F(X_o) = F(X)_{maks}$.

Bukti :

Ambil sembarang penyelesaian fisibel X, jadi AX = b dengan

$F(X) = CX$ atau $\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b$ dengan $F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

karena $A_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} D_i = D\ Y_j$ maka

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} y_{ij} D_i = b \qquad n > m$$

atau $\sum_{i=1}^{n} D_i \sum_{j=1}^{m} Y_{ij} x_j = b$

karena diketahui $\sum_{i=1}^{m} D_i\ x_i = b$

jadi $x_i = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} x_j$ ....(2.3).

untuk kolom dalam basis, misalkan A_j menjadi D_i dalam D

$$A_j = D_i$$

$$c_j = c_i$$

karena $A_j = DY_j$ maka

$$Y_j = D^{-1}A_j = D^{-1}D_i = b_i \text{ (vektor satuan ke-}i\text{)}$$

sehingga

$$z_j = C\ Y_j = C\ b_i = c_i = c_j$$

jadi $z - c = 0$ (untuk j didalam basis).

Berarti syarat $z_j - c_j \geq 0$ sebetulnya berlaku untuk semua j.

Jadi dari ($z_j - c_j$) $x_j \geq 0$ (untuk semua j) dapat disusun jumlahan :

$$\sum_{j=1}^{n} (z_j - c_j)x_j \geq 0 \text{ sedemikian sehingga}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = F(X) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.(2.4).$$

karena $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i Y_{ij}$ maka

$$\sum_{j=1}^{n} z_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_i Y_{ij} x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} x_j$$

dengan (2.3) $= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i = CX_o = F(X_o)$

sehingga (2.4) dapat ditulis :

$$F(X_o) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \geq F(X)$$

$F(X_o) \geq F(X)$ untuk sembarang X fisibel

Terbukti $F(X_o)$ adalah F(X) maksimal.