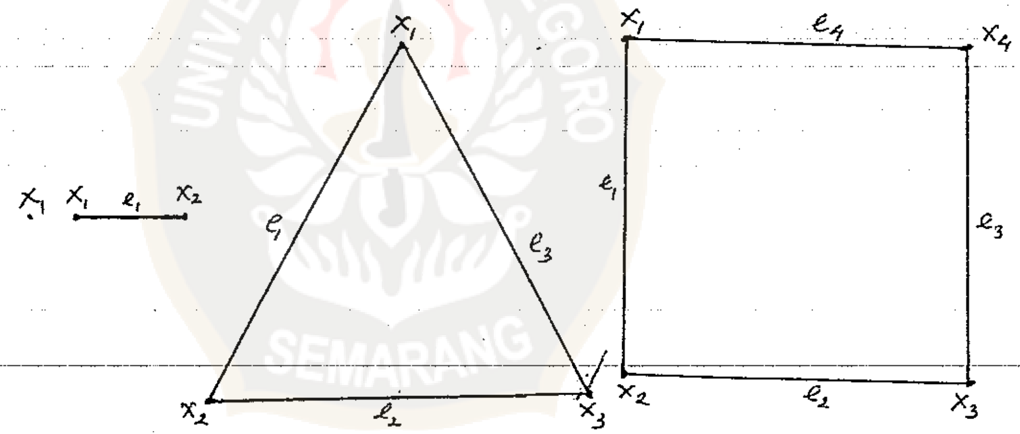
BAB II
TEORI PENUNJANG

2.1. Graph Dasar

Definisi 2.1.1

Graph G = (X,E) adalah himpunan pasangan berurutan dari G = (X,E) dengan X = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ merupakan himpunan titik-titik dan tidak kosong sedangkan E = $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ merupakan himpunan garis-garis.

contoh.



Gambar 2.1.

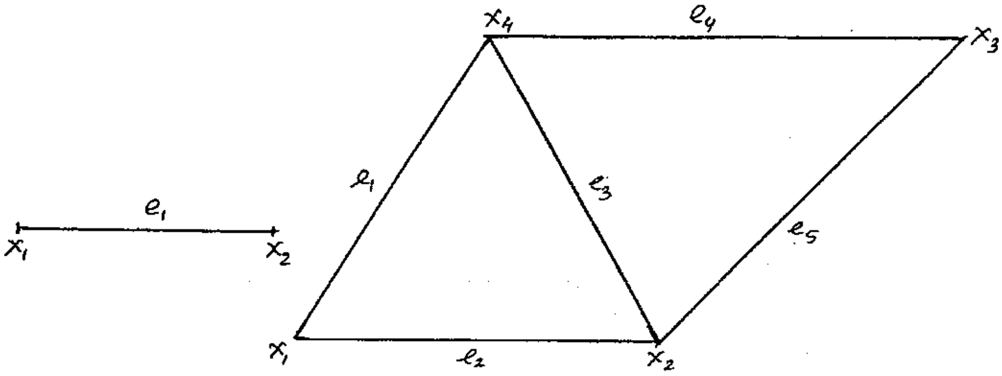
Definisi 2.1.2

Graph $\overline{G} = (\overline{X}, \overline{E})$ dikatakan simple graph bila :

(1) Tidak mempunyai loops.

(2) Tidak lebih dari satu garis yang menghubungkan dua titik.

contoh.

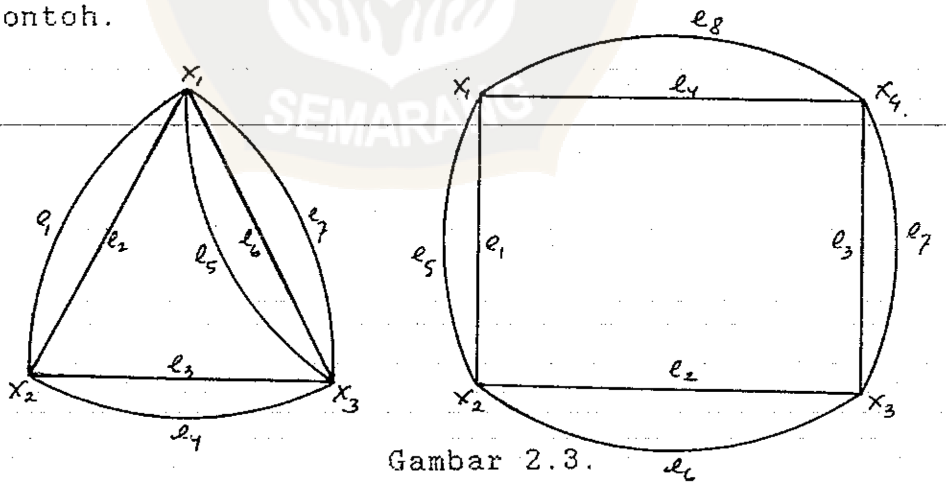


Gambar 2.2.

Definisi 2.1.3

Suatu graph $G = (X,E)$ dikatakan multigraph, jika diantara dua titik dalam graph G maka terdapat lebih dari satu garis yang menghubungkan dua titik.

contoh.



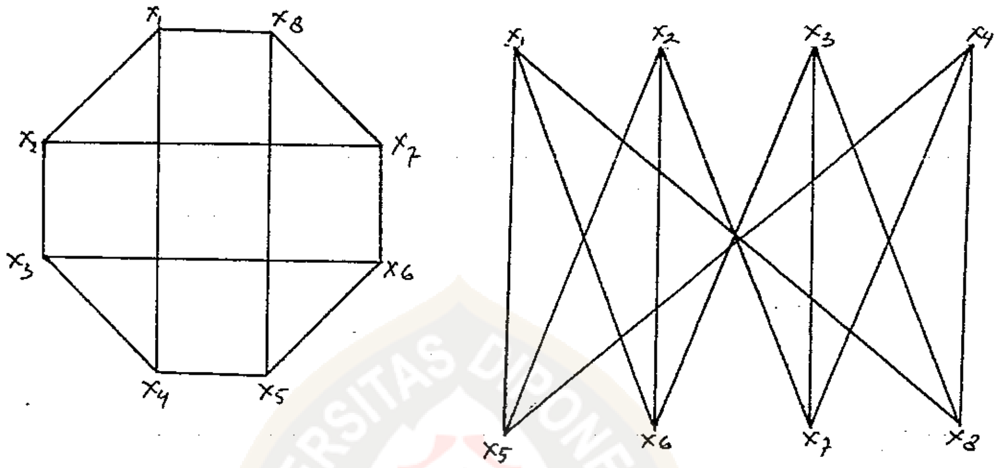
Gambar 2.3.

Definisi 2.1.4

Suatu graph $G = (X,E)$ adalah bipartite jika titik-titiknya dipartisi ke dalam dua himpunan X_1 dan X_2 sedemikian sehingga dua titik dalam himpunan yang sama tidak adjacent.

Graph ini ditulis sebagai $G = (X_1, X_2, E)$

contoh.



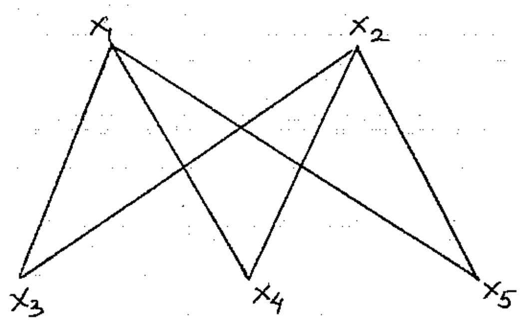
Gambar 2.4.

a. Graph $G=(X,E)$ b. Bipartite Graph $G =(x_1,x_2,E)$

Definisi 2.1.5

Suatu graph $G = (X,E)$ dikatakan complete bipartite graph jika untuk semua $x_i \in X_1$ dan semua $x_j \in X_2$ maka setiap garis menghubungkan semua titik dari $x_i \in X_1$ dan $x_j \in X_2$ sehingga graph $G = (X_1, X_2, E)$

contoh.

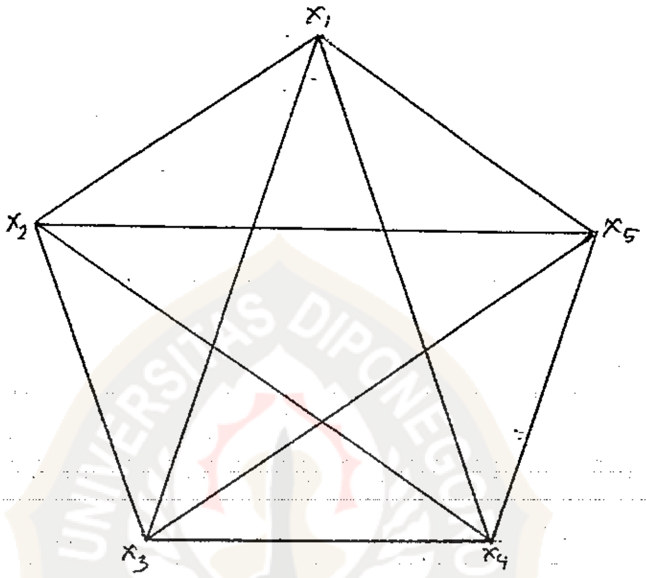


Gambar 2.5.

Definisi 2.1.6

Suatu graph G = (X,E) dikatakan complete graph bila semua titik adjacent dengan titik lainnya.

contoh.

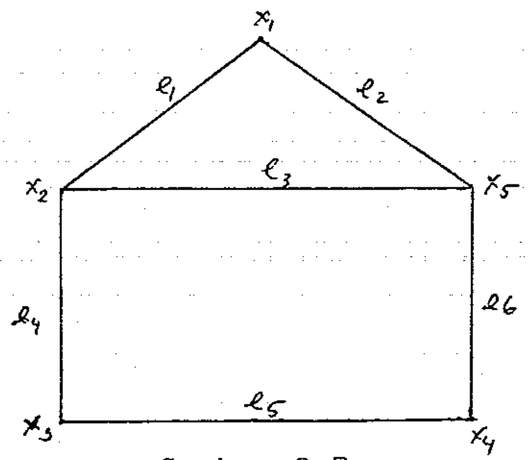


Gambar 2.6.

Definisi 2.1.7

Graph G = (X,E) dikatakan connected (terhubung) bila untuk setiap dua titik didalamnya terdapat garis.

contoh.

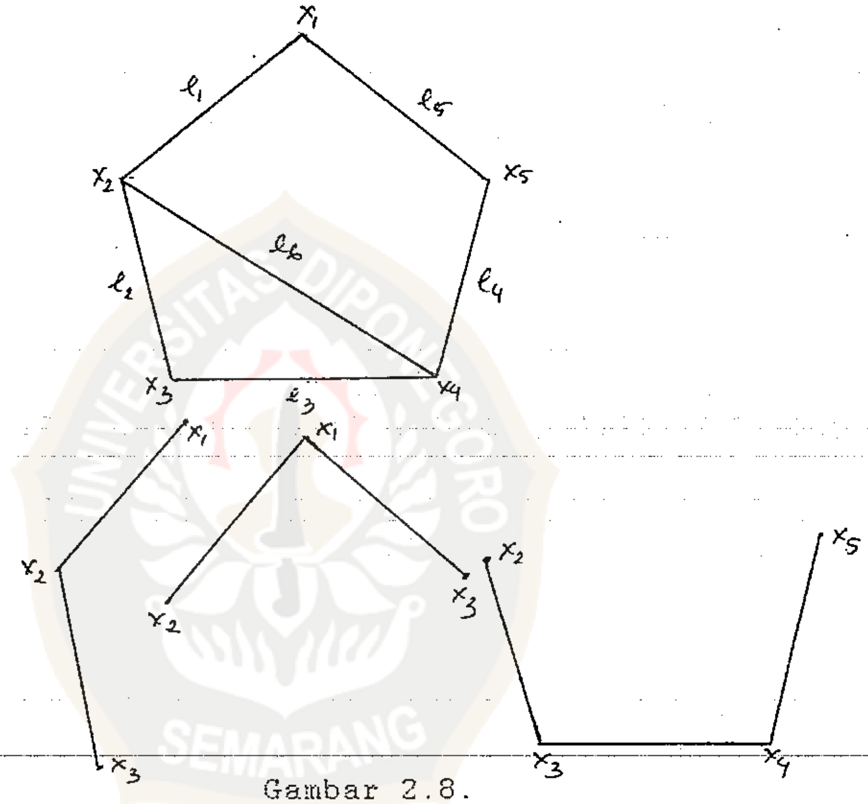


Gambar 2.7.

Definisi 2.1.8

$G_1 = (X_1, E_1)$ disebut subgraph dari graph $G = (X,E)$ jika X_1 subset dari X dan E_1 subset dari E dengan $X_1 \neq \emptyset$.

contoh.



Gambar 2.8.

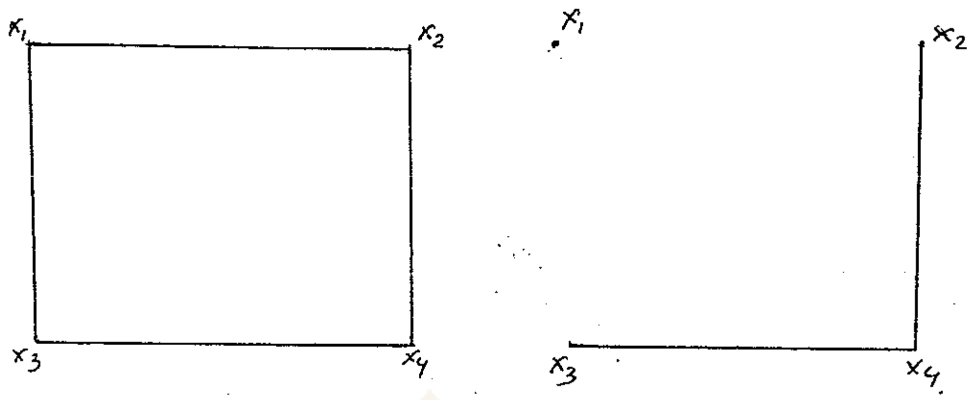
Gambar a adalah graph $G = (X,E)$

Gambar b, c, d adalah subgraph $G_1 = (X_1, E_1)$

Definisi 2.1.9

Diberikan suatu graph $G = (X,E)$. Ambil F suatu subset dari E. $G = (X,F)$ adalah graph dengan titik yang sama dengan $G = (X,E)$ tetapi hanya garis-garis dalam F merupakan bagian dari E sehingga graph $G = (X,F)$ dikatakan partial graph dari G.

contoh.



Gambar 2.9.

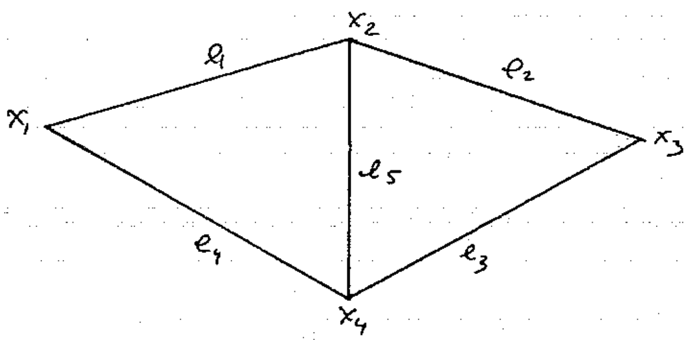
a. Graph G = (X,E) b. Partial graph

2.2 Hal-Hal Yang Terdapat Dalam Graph G

<u>Definisi 2.2.1</u>

- Dua buah titik sembarang x_i dan x_j disebut adjacent jika ada dua garis yang langsung menghubungkan kedua titik tersebut.
- Sedangkan dua buah garis tersebut adjacent bila kedua garis mempunyai satu titik persekutuan.

contoh.



Gambar 2.10.

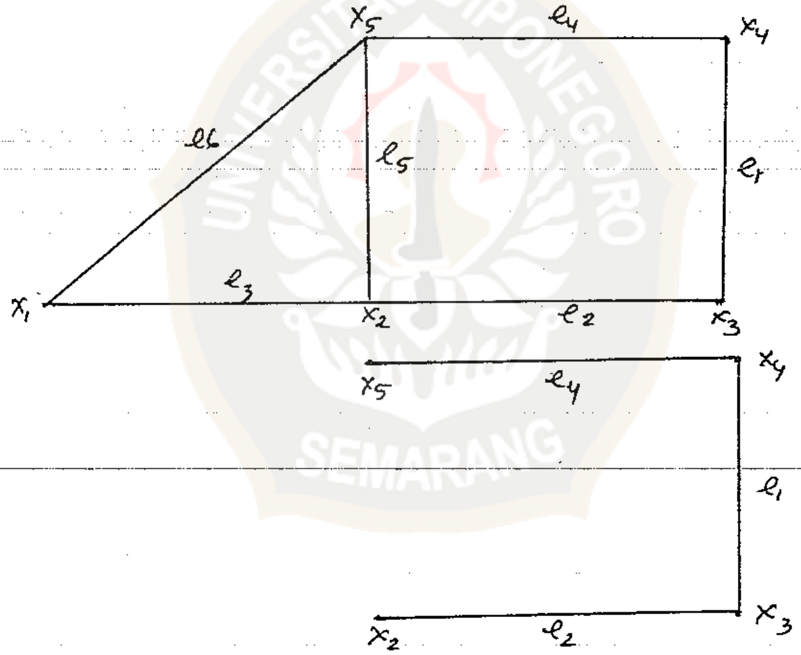
titik x_1 adjacent dengan titik x_2 membentuk garis e_1

Garis e_1 adjacent dengan garis e_4 pada x_1 sehingga titik x_1 merupakan titik persekutuan.

Definisi 2.2.2

Path adalah deretan titik-titik dan garis-garis secara bergantian tetapi semua titik harus berlainan (kecuali ada kemungkinan titik awal dengan titik akhir sama jika path tertutup)

contoh.



Gambar 2.11

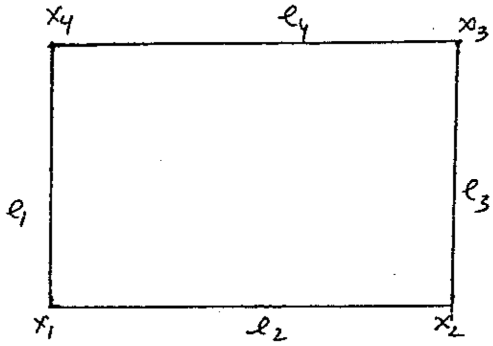
Gambar a. Adalah graph G = (X,E)

b. Path = (x_5, e_4, x_4, e_3, x_3, e_2, x_2)

Definisi 2.2.3

Cycle adalah path tertutup

contoh.



Gambar 2.12.

Dari gb. 2.11 dapat dilihat suatu path tertutup yang dinamakan cycle.

Path tertutup = cycle = $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

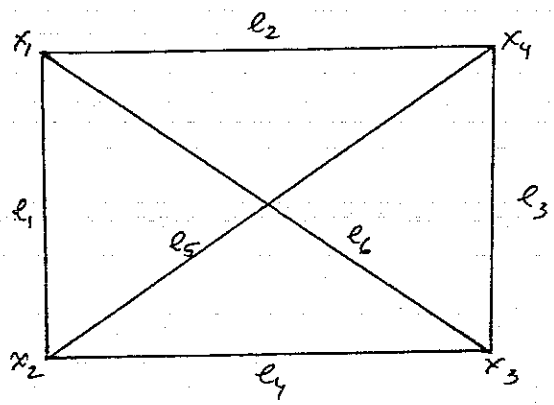
2.3. Degree

Definisi 2.3.1

Bila sebuah titik x_1 adalah titik ujung dari beberapa garis e_j maka dikatakan x_i incident (bertemu) dengan e_j atau e_j bertemu dengan x_i.

Banyaknya garis yang incident pada titik x_i disebut degree titik x_i, ditulis dengan $d_G(x_i)$.

contoh.



Gambar 2.13.

Garis $\{e_1, e_2, e_6\}$ incident dengan titik x_1

$d(x_1) = 3$, $d(x_2) = 3$, $d(x_3) = 3$, $d(x_4) = 3$

$$\text{jadi } d_G(x_i) = d(x_1) + d(x_2) + d(x_3) + d(x_4)$$
$$= 3 + 3 + 3 + 3$$
$$= 12.$$

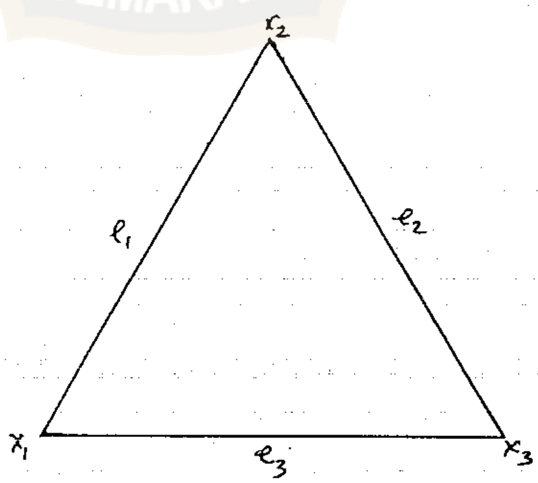
Theorema 2.3.1

Banyaknya semua degree dari titik-titik pada sebuah graph G adalah dua kali banyaknya garis.

Bukti:

Tiap garis bertemu dengan dua titik dan tiap garis memberikan dua sehingga jumlah semua degree dua kali jumlah garis.

Misal ada sebuah graph dengan titik-titik x_1, x_2, x_3 dan garis-garis e_1, e_2, e_3



Gambar 2.14.

$\Sigma e_1 = e_1 + e_2 + e_3 = 3$

$d(x_1) = 2$, $d(x_2) = 2$, $d(x_3) = 2$

$$\Sigma d_G(x_i) = d(x_1) + d(x_2) + d(x_3)$$
$$= 2 + 2 + 2$$
$$= 6$$

Jadi $\Sigma d_G(x_i) = 2 \Sigma e_i$ (Terbukti)

Theorema 2.3.2

Banyaknya titik berdegree ganjil dalam suatu graph $G = (X,E)$ selalu merupakan bilangan genap.

Bukti :

Misalkan titik-titik dari suatu graph G adalah $x_1, x_2, \ldots, x_n$, yang masing-masing dari garis x_i mempunyai derajat d_i. Misalkan pula jumlah dari garis G adalah m. Karena setiap garis menghubungkan dua titik maka setiap garis akan menambahkan satu derajat pada dua buah titik yang berbeda atau menambahkan 2 derajat pada satu titik yang sama. Dengan demikian jumlah derajat dari setiap titik adalah dua kali jumlah garis pada G atau

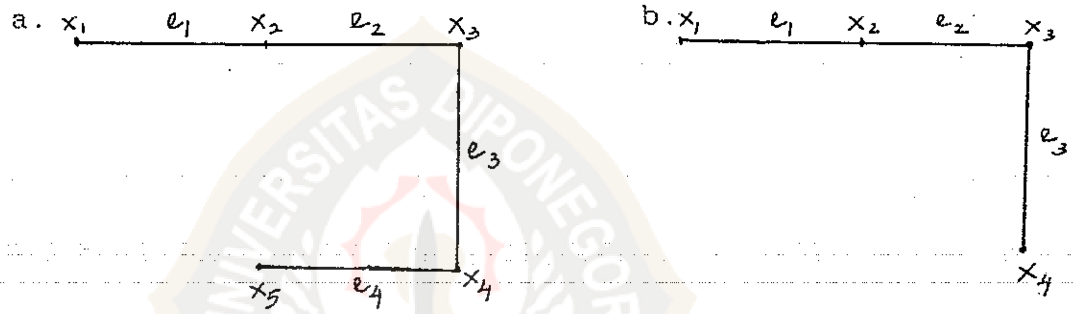
$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2\ m$$

dan jumlah ini merupakan bilangan genap. Karena sebagian dari d_i, ini bernilai ganjil, dan sebagian lainnya bernilai genap, maka dapat disimpulkan bahwa jumlah titik derajat ganjil adalah genap.

definisi 2.3.2

Suatu chain (lintasan) dari G = (X,E) adalah barisan $x_1, x_2 \ldots, x_k$ dari titik-titik dengan $k \geq 2$ dimana himpunan $\{(x_1,x_2), (x_2,x_3), \ldots, (x_{k-1},x_k)\}$ adalah himpunan titik-titik berpasangan (sisi berurutan) yang merupakan bagian dari E

contoh



Gambar 2.15

Gambar a. Graph G = (X,E)

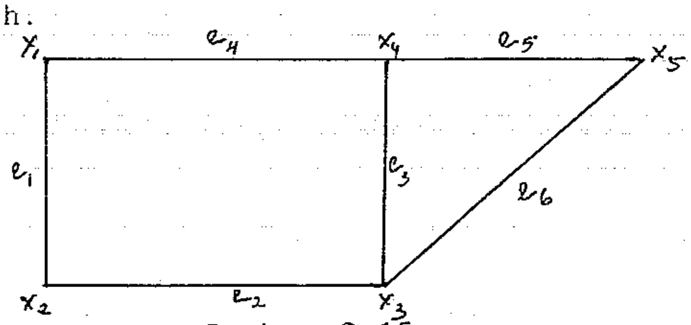
b. Chain $= \{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4)\}$

$= \{e_1, e_2, e_3\}$

Definisi 2.3.3

Panjang dari lintasan x_i ke x_j dalam graph G = (X,E) adalah banyaknya garis yang berada dalam lintasan tersebut.

contoh.



Gambar 2.15.

Panjang lintasan = $(x_1, x_3, x_4, x_5) = 3$

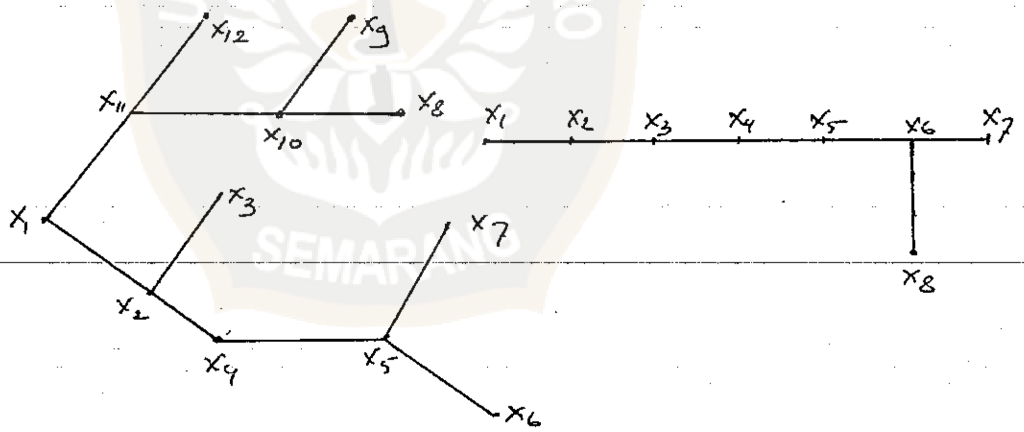
2.4. Tree

Ada satu simple graph dan penting macamnya yang diberi nama Tree. Tree tidak hanya penting untuk aplikasi bidang lain tapi juga untuk teori graph itu sendiri.

Definisi 2.4.1

Sebuah graph adalah acyclic bila tidak mempunyai cycle. Tree adalah suatu graph terhubung yang tidak mempunyai cycle

Contoh.



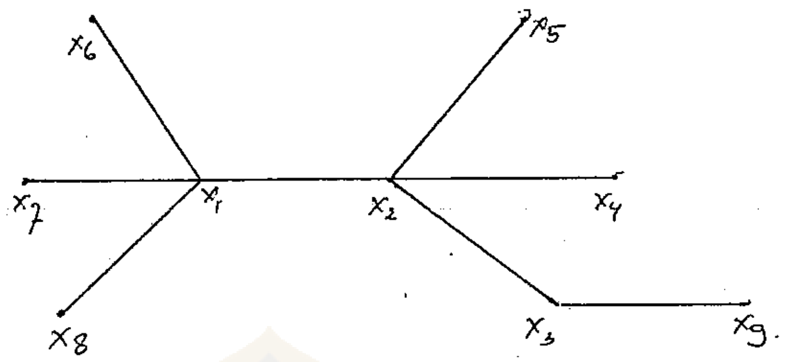
Gambar 2.16

2.5. Istilah Dalam Tree

Definisi 2.5.1.

Leaf adalah titik yang mempunyai degree 1 (satu)

Contoh.



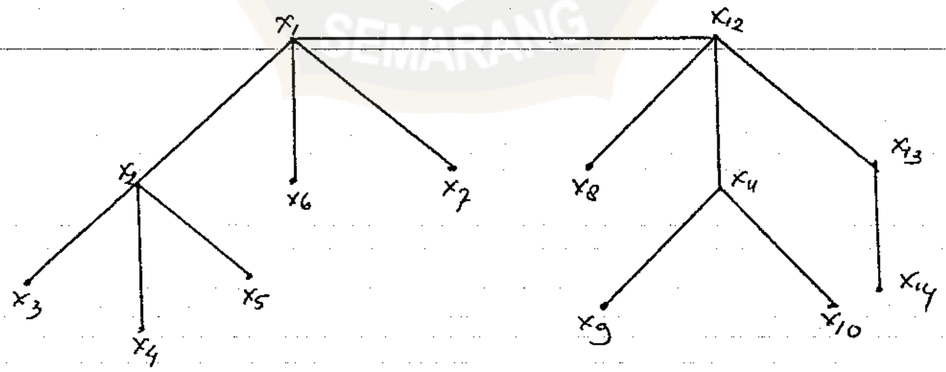
Gambar 2.17

Titik-titik x_9, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 adalah leaf.

Definisi 2.5.2

BRANCH (interval dari titik) adalah titik dengan degree lebih dari satu.

contoh.



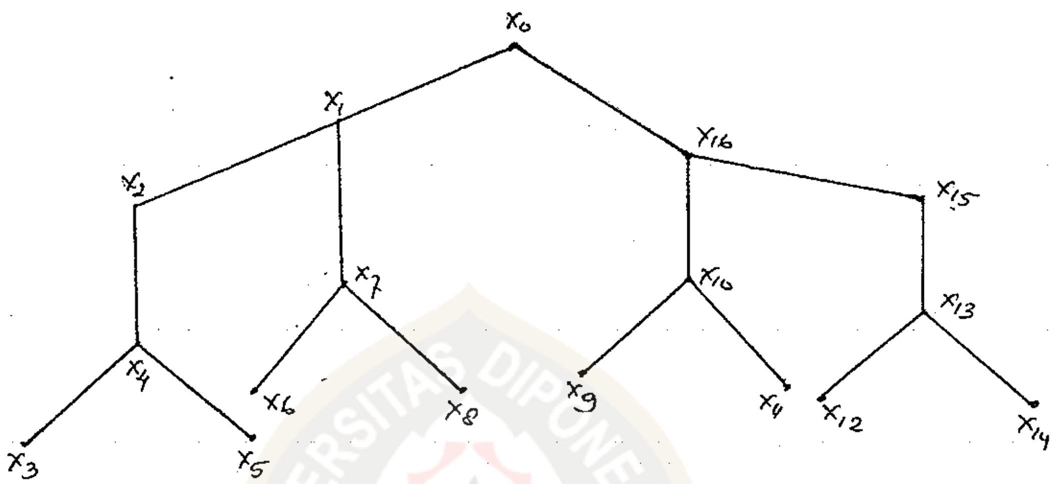
Gambar 2.18.

Titik $x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{13}$ adalah branch dari tree

Definisi 2.5.3

Root tree adalah suatu tree yang terdapat satu titik yang dibedakan terhadap yang lain.

Contoh.



Gambar 2.18.

Titik x_o adalah titik yang dibedakan disebut Root dari tree.