BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1. Konsep Vektor.

Definisi 2.1.1.

Vektor adalah suatu potongan (ruang,segmen) garis yang mempunyai arah.

Definisi 2.1.2.

Ruang vektor riel V adalah himpunan yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar yang memenuhi :

A. Jika $x, y \in V$, maka $x + y \in V$ yang disebut penjumlahan x dengan y yang memenuhi sifat-sifat berikut :

1. $x + y = y + x$, untuk setiap $x,y \in V$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$, untuk setiap $x,y,z \in V$
3. Ada suatu o di V sedemikian sehingga $x + o = x$, untuk setiap $x \in V$
4. Untuk setiap $x \in V$, ada $y \in V, y = -x$ sedemikian sehingga $x + y = x + (-x) = o$.

B. Jika $x \in V$ dan $\alpha \in R$, ada αx di V yang disebut perkalian α dengan x yang memenuhi sifat-sifat berikut :

5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, untuk setiap $\alpha,\beta \in R$ dan $x \in V$
6. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, untuk setiap $\alpha \in R$ dan $x,y \in V$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, untuk setiap $\alpha,\beta \in R$ dan $x \in V$

Unsur-unsur V di atas yaitu x,y dan z dinamakan vektor dan unsur o disebut vektor nol.

Definisi 2.1.3.

x dinamakan vektor baris berdimensi n apabila x dituliskan dalam bentuk $x = [x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n]$.

Dan x dinamakan vektor kolom berdimensi n apabila x dituliskan dalam bentuk :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dimana x_i, $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ adalah komponen-komponen dari vektor x.

Definisi 2.1.4.

Himpunan m buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_m\}$ dikatakan bergantung linier (linearly dependent) bila terdapat skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots, \lambda_m$ yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga berlaku :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m u_m = 0$$

Definisi 2.1.5.

Himpunan m buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_m\}$ dikatakan bebas linier (linearly independent) jika terdapat λ_i $i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,m$ sedemikian sehingga berlaku :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m u_m = 0$$

hanya dipenuhi jika $\lambda_i = 0$, $i = 1,2,\ldots\ldots,m$.

Definisi 2.1.6.

Suatu vektor V dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_m\}$ jika terdapat skalar λ_i

$i = 1,2,\ldots\ldots,m$ sedemikian sehingga berlaku :

$$V = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots + \lambda_m u_m.$$

Contoh 2.1.1.

a = [2,1,2] , b = [1,0,3] dan c = [3,1 5]

a merupakan kombinasi linier dari b dan c jika memenuhi

$$[\ 2,1,2\ ] = \lambda_1[\ 1,0,3\ ] + \lambda_2[\ 3,1,5\ ]$$

atau :

$$2 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$1 = 0\lambda_1 + \lambda_2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$2 = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dari persamaan (2) didapat $\lambda_2 = 1$, jika $\lambda_2=1$ disubstitusikan ke (1) didapat $\lambda_1= -1$. Dan jika $\lambda_1= -1$ dan $\lambda_2=1$ disubstitusikan ke persamaan (3) maka persamaan (3) akan dipenuhi, sehingga dapat dituliskan a = -b + c. Jadi a kombinasi linier dari b dan c.

Teorema 2.1.1.

Jika sebagian (himpunan bagian) dari m buah vektor $\{u_1,u_2,\ldots\ldots,u_m\}$ bergantung linier, maka keseluruhan m vektor-vektor tersebut adalah bergantung linier.

Bukti:

Misalkan p vektor, $p < m$, bergantung linier, katakanlah $u_1,u_2,\ldots\ldots\ldots,u_p$, maka terdapat skalar-skalar λ_i, $i = 1,2,\ldots\ldots,p$ yang tidak semua nol sedemikian sehingga :

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots + \lambda_p u_p = 0$ (*)

Kemudian diambil $\lambda_{p+1}= \lambda_{p+2}= \ldots\ldots = \lambda_m= 0$, maka (*)

menjadi $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots + \lambda_p u_p + \lambda_{p+1} u_{p+1} + \ldots\ldots + \lambda_m u_m = 0$ dimana terdapat $\lambda_i = 0$, $(i=1,2,\ldots\ldots,p)$. Jadi m buah vektor tersebut bergantung linier.

Teorema 2.1.2.

Jika himpunan m buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_m\}$ bebas linier maka sebagian (himpunan bagian)-nya juga bebas linier.

Bukti:

Andaikan himpunan bagian vektor tersebut bergantung linier , menurut teorema 2.2.1. keseluruhan m vektor adalah bergantung linier. Suatu kontradiksi. Jadi pengandaian salah. Jadi haruslah himpunan bagian tersebut bebas linier.

Teorema 2.1.3.

Jika m $(m > 1)$ buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_m\}$ bergantung linier, maka paling sedikit terdapat satu vektor dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor selebihnya.

Bukti:

Karena $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_m\}$ bergantung linier, maka paling sedikit diantara skalar-skalar λ_i , $i = 1,2,..m$ tidak nol, misalnya λ_p, sedemikian sehingga :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots + \lambda_p u_p + \lambda_{p+1} u_{p+1} + \ldots\ldots + \lambda_m u_m = 0$$

Kemudian $\lambda_p u_p$ dipindah ruas sehingga diperoleh :

$$-\lambda_p u_p = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots + \lambda_{p-1} u_{p-1} + \lambda_{p+1} u_{p+1} + \ldots\ldots + \lambda_m u_m$$

Dan karena $\lambda_p = 0$ diperoleh :

$$u_p = -\frac{\lambda_1}{\lambda_p}u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_p}u_2 - \ldots\ldots - \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p}u_{p-1} - \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p}u_{p+1}$$

$$- \ldots\ldots\ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_p}u_m$$

$$= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots\ldots + \mu_{p-1}u_{p-1} + \mu_{p+1}u_{p+1} + \ldots\ldots + \mu_m u_m$$

Jadi u_p kombinasi linier dari vektor selebihnya.

Teorema 2.1.4.

Jika satu diantara m vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m\}$ adalah kombinasi linier dari vektor selebihnya maka m vektor tersebut bergantung linier.

Bukti:

Misalkan u_p adalah kombinasi linier dari $\{u_1, u_2, \ldots,$ $u_{p-1}, u_{p+1}, \ldots, u_m\}$ maka :

$$u_p = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{p-1}u_{p-1} + \lambda_{p+1}u_{p+1} + \ldots + \lambda_m u_m$$

Bila u_p dipindah ruas diperoleh :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{p-1}u_{p-1} - u_p + \lambda_{p+1}u_{p+1} + \ldots + \lambda_m u_m = 0$$

Jelas tidak semua λ_i , $i = 1,2,\ldots,m$ nol, karena $\lambda_p = -1$. Jadi m vektor tersebut bergantung linier.

Teorema 2.1.5.

Jika m buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m\}$ bebas linier dan (m+1) buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m, v\}$ bergantung linier maka v adalah kombinasi linier dari $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m\}$.

Bukti:

Karena $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m, v\}$ bergantung linier, maka pada persamaan $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m u_m + \lambda_{m+1} v = 0$

terdapat $\lambda_i = 0$. Dalam hal ini haruslah $\lambda_{m+1} = 0$, sebab jika tidak demikian terjadi kontradiksi yaitu $\lambda_i = 0$ adalah diantara i = 1,2,.....,m dimana :

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m u_m + 0v = 0$ atau

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m u_m = 0$

Berakibat $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m\}$ bergantung linier. Maka bila $\lambda_{m+1} v$ pindah ruas diperoleh :

$-\lambda_{m+1} v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m u_m$

dan karena $\lambda_{m+1} = 0$, diperoleh :

$$v = - \frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{m+1}} u_2 - \ldots\ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} u_m$$

$$= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_m u_m$$

Jadi v kombinasi linier dari $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m\}$.

2.2. Konsep Matriks

Definisi 2.2.1.

Jajaran bilangan yang disusun berdasarkan baris dan kolom, yang berbentuk :

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan komponen-komponen a_{ij}, $i = 1,2,\ldots.,m$ dan $j = 1,2,\ldots.,n$ berupa bilangan-bilangan riel atau kompleks dinamakan Matriks.

Bentuk :

$$[\ a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots\ldots\ldots,a_{in}],\ i=1,2,\ldots\ldots,m$$

dalam matriks A menyatakan baris ke-i dari matriks A.

Sedangkan bentuk:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},\ j= 1,2,\ldots,n$$

menyatakan kolom ke-j dari matriks A.

Karena ada m baris dan n kolom, maka dikatakan matrik A mempunyai ordo/ukuran m x n .

Definisi 2.2.2.

Matriks A = (a_{ij}) berukuran m x n dengan i = 1,2,.....m dan j = 1,2,....,n dikatakan matriks bujursangkar jika m = n.

Definisi 2.2.3.

Misalkan matriks A = (a_{ij}) mempunyai ukuran m x n. Matriks transpose dari A dengan notasi A^T adalah matriks berukuran n x m yang didefinisikan oleh :

$A^T = (a_{ji})$ dengan i = 1,2,.....m dan j = 1,2,.....,n

Definisi 2.2.4.

Rank dari matriks A = (a_{ij}) menyatakan jumlah maksimum vektor-vektor baris/kolom yang bebas linier.

Definisi 2.2.5.

Matriks A = (a_{ij}) dikatakan definite positif jika harga semua determinan minor utamanya, yaitu :

$$|A_1| = |a_{11}|, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad |A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

adalah positif. Dan dikatakan semidefinite positif jika harga semua determinan minor utamanya tidak negatif.

Definisi 2.2.6.

Matriks Bujursangkar $A = (a_{ij})$ berordo n x n disebut matriks simetri jika $A = A^T$.

Definisi 2.2.7.

Matriks simetri $A = (a_{ij})$ berordo n x n disebut matriks momen jika matriks tersebut semidefinit positif.

2.2.1. Operasi Matriks.

Definisi 2.2.8.

Jumlah dua matriks $A = (a_{ij})$ dan matriks $B = (b_{ij})$ yang masing-masing berukuran m x n adalah matriks $C = (c_{ij})$ berukuran m x n, dimana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ dengan $i = 1,2,\ldots..m$ dan $j = 1,2,\ldots\ldots.,n$.

Definisi 2.2.9.

Perkalian matriks $A = (a_{ij})$ berukuran m x n dengan skalar k adalah matriks $C = (c_{ij})$ berukuran m x n dimana $c_{ij} = k.a_{ij}$ dengan $i = 1,2,\ldots.,m$ dan $j = 1,2,\ldots\ldots,n$.

Definisi 2.2.10.

Apabila matriks $A = (a_{ij})$ berukuran m x n dan matriks $B = (b_{jk})$ berukuran n x p , maka perkalian A.B adalah matriks $C = (c_{ik})$ berukuran m x p dimana $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk}$ dengan i = 1,2,....,m dan k = 1,2,......,p.

2.2.2. Determinan Matriks.

Definisi 2.2.11.

Barisan bilangan-bilangan $(j_1,j_2,..,j_n)$ dimana berlaku $j_i \neq j_k$ untuk $i \neq k$ (i dan k = 1,2,...,n) serta j_i salah satu dari bilangan asli (1,2,...,n) disebut suatu permutasi.

Definisi 2.2.12.

Yang dimaksud dengan sebuah inversi pada suatu permutasi $(j_1,j_2,...,j_n)$ ialah adanya $j_k \angle j_i$ (j_k mendahului j_i) padahal $j_i < j_k$ (i dan k = 1,2,...,n).

Definisi 2.2.13.

Jika banyaknya inversi suatu permutasi adalah bilangan ganjil maka disebut permutasi ganjil dan dalam hal lain disebut permutasi genap.

Definisi 2.2.14.

Misalkan $(j_1,j_2,...,j_n)$ suatu permutasi, maka *tanda (sign)* dari permutasi tersebut, ditulis $\sigma(j_1,j_2,...,j_n)$ adalah $\sigma(j_1,j_2,...,j_n) = +1$, bila $(j_1,j_2,...,j_n)$ genap, dan = -1 bila $(j_1,j_2,...,j_n)$ ganjil.

Definisi 2.2.15.

Determinan dari matriks bujur sangkar A berordo n adalah jumlah dari semua n! hasil kali bertanda dari elemen-elemen matriks A tersebut. Dengan kata lain :

$$\text{Det.}A = |A| = \sum \delta(j_1, j_2, \ldots, j_n)\ a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots\cdots a_{nj_n}$$

Definisi 2.2.16.

Minor (M_{ij}) dari elemen a_{ij} adalah determinan suatu matriks A yang dihilangkan baris ke-i dan kolom ke-j.

Definisi 2.2.17.

Kofaktor (A_{ij}) dari elemen a_{ij} adalah $(-1)^{i+j}.M_{ij}$.

Definisi 2.2.18.

Harga determinan suatu matriks bujursangkar A = (a_{ij}) dapat ditulis sebagai:

$$\text{Det.}A = |A| = \sum_{i=j=1}^{n} a_{ij}.A_{ij} = \sum_{i=j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}.M_{ij}$$

Sifat-sifat Determinan.

Diberikan sifat-sifat penting dari determinan :

(S1). Det.(A) = Det.(A^T).

(S2). Tanda determinan berubah apabila dua baris/kolom ditukar tempatnya.

(S3). Harga determinan menjadi k kali, bila suatu baris/kolom dikalikan dengan k (suatu skalar).

(S4). Harga determinan tidak berubah apabila baris/kolom ke-i ditambah dengan k baris/kolom ke-j.

Menghitung Determinan dengan pertolongan Sifat-sifat Determinan.

Untuk menghitung determinan matriks yang berordo besar akan lebih menguntungkan jika menggunakan sifat-sifat determinan. Yaitu dengan cara sebagai berikut :

(1).Carilah baris/kolom yang sudah banyak elemen nol-nya, atau kalau tidak ada carilah apakah ada elemen -1 atau 1, pilihlah baris/kolom tersebut. Kalau tidak ada usahakan dengan S3 atau S4 untuk mendapatkan elemen -1 atau 1.

(2).Jadikan nol (n-1) elemen dari baris/kolom yang mengandung -1 atau 1 tadi, lalu ekspansikan (menurut baris/kolom tadi) dan seterusnya.

Contoh 2.2.1.

Tentukan determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{Det.}A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2.5 - 3.3 = 1.$$

2.2.3. Matriks Invers.

Definisi 2.2.19.

Suatu matriks bujursangkar A disebut singular jika Det.A = 0, dan disebut nonsingular jika Det.A ≠ 0.

Definisi 2.2.20.

Matriks yang nonsingular mempunyai invers, sedangkan matriks singular tidak meempunyai invers.

Definisi 2.2.21.

Matriks A = (a_{ij}) berukuran n x n dikatakan non-singular apabila ada matriks B berukuran n x n sehingga AB = I = BA dengan I adalah matriks identitas berukuran n x n. Selanjutnya matriks B dikatakan matriks invers dari A dan ditulis dengan notasi A^{-1}.

Definisi 2.2.22.

Matriks transpose dari kofaktor (A_{ij}) disebut matriks *adjoin* dari A dan ditulis adj.A , dengan :

$$\text{Adj.A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ .. & .. & \cdots & .. \\ A_{n1} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.23.

Matriks invers dari matriks A = (a_{ij}) adalah A^{-1} dengan $A^{-1} = \dfrac{\text{adj.A}}{\text{Det.A}}$

Contoh 2.2.2.

Akan dicari invers dari matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Kofaktor dari kesembilan elemen matriks A adalah sebagai berikut :

$A_{11}=+\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$; $A_{12}=-\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$; $A_{13}=+\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$

$A_{21}=-\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$; $A_{22}=+\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{31}=+\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 2$; $A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{33}=+\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2$

$$\text{Jadi Adj.A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dari *Contoh* 2.2.1. diketahui Det.A = 1, sehingga invers dari matriks A adalah :

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj.A}}{\text{Det.A}} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3. Sistem Persamaan-persamaan linier.

Definisi 2.3.1.

Bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ disebut Persamaan Linier. Dengan a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ dan b adalah skalar. a_i disebut koefisien , b disebut konstanta dari persamaan, dan x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ disebut peubah (variabel).

Definisi 2.3.2.

Sekumpulan harga dari peubah (variabel) yaitu $x_1 = k_1$ $x_2=k_2$, $x_3=k_3,\ldots,x_n=k_n$ disebut solusi (jawab) dari persamaan $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, apabila terpenuhi $a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n = b$. Jawab tersebut dapat dituliskan dengan notasi vektor $[k_1,k_2,\ldots,k_n]$.

Contoh 2.3.1.

Persamaan $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$. Harga-harga $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ dan $x_3 = 2$ adalah solusi, karena $2.0 + 3.1 + 1.2 = 5$, dan dapat ditulis : $[0,1,2]$.

Definisi 2.3.3.

Pandanglah m buah persamaan-persamaan linier dengan n peubah :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ + \ldots\ + \ldots + \ldots\ = \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right] \ldots (*)$$

dengan a_{ij} dan b_i $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$ masing-masing adalah koefisien-koefisien dan konstanta dari persamaan-persamaan linier (*) di atas.

Bentuk (*) dapat ditulis sebagai : $Ax = B$, dimana :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

berukuran (m x n) dan disebut matriks koefisien dari susunan (*).

$$x = [\ x_1,x_2,\ldots,x_n\ ]^T \text{ dan } B = [\ b_1,b_2,\ldots,b_n\ ]^T$$

adalah vektor vektor kolom peubah dan konstanta.

Susunan persamaan-persamaan linier (*) diatas disebut Susunan persamaan linier nonhomogen.

Teorema 2.3.1.

Suatu susunan persamaan linier akan mempunyai jawab (consistent) apabila rank matriks koefisien sama dengan rank matriks lengkap atau bila r(A) = r(A,B). Dengan

matriks lengkap (A,B) adalah $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$

Bukti :

Persamaan (*) di atas dapat ditulis sebagai :

$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B$ (**), dimana $A_1,A_2,\ldots,A_n$ adalah vektor-vektor kolom dari A. Yang menjadi persoalan apakah ada $x_1,x_2,\ldots,x_n$, yaitu skalar-skalar yang memenuhi persamaan (**). Kalau ada maka haruslah B merupakan kombinasi linier dari $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Dengan kata lain banyaknya vektor-vektor kolom yang bebas linier antara $A_1,A_2,\ldots,A_n$ sama dengan banyaknya vektor-vektor kolom yang bebas linier antara $A_1,A_2,\ldots,A_n,B$, atau B harus di dalam ruang kolom dari matriks A. Jadi r(A) = r(A,B).

Contoh 2.3.2.

Apakah susunan persamaan : $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 13 \end{aligned}\right\}$ punya jawab ?

Dari susunan persamaan tersebut diperoleh :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ Rank (A) = 1

$(A,B) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 13 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 13 \end{bmatrix}$

Karena kolom 1 dan 3 tidak kelipatan maka r(A,B) = 2.

Jadi r(A) ≠ r(A,B). Tidak ada jawab.

Contoh 2.3.3.

Susunan : $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}\right\}$ apakah punya jawab ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

berarti r(A) = 2

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

berarti r(A,B) = 2 . Karena r(A) = r(A,B) maka susunan persamaan di atas punya jawab.

Definisi 2.3.4.

Susunan persamaan linier dengan r(A)=r(A,B) akan mempunyai jawab unik (tunggal) jika r=n dan akan mempunyai banyak jawab jika r < n , dengan n adalah banyaknya peubah (variabel).

Definisi 2.3.5.

Untuk mencari jawab dari susunan persamaan linier non-homogen yang mempunyai jawab tunggal (r = n) dapat digunakan aturan Cramer sebagai berikut :

Untuk susunan persamaan linier nonhomogen : Ax = B ,

maka $x_k = \dfrac{D_k}{D}$,dimana :

$$D_k = \text{Det.} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_n & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(kolom ke-k)

dan D = Det.A (determinan matriks koefisien) $\neq 0$.

Contoh 2.3.4.

Solusi dari susunan persamaan : $\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{array}\right\}$ adalah :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Dengan aturan Cramer didapat :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 1 \text{ dan } x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 1$$

Contoh 2.3.5.

Tentukan solusi dari $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{array}\right\}$

Dari *Contoh* 2.3.3. diperoleh r = 2 sehingga r < n.

Menurut *Definisi* 2.3.4. susunan persamaan di atas mempunyai banyak jawab. Dengan syarat x_2 tidak boleh di ambil = 0 , sebab jika demikian berakibat sisa persamaannya menjadi $r(A) \neq r(A,B)$ (tak punya jawab).

Jika $x_1 = 0$ maka $x_2 = 1$ dan $x_3 = 2$ dan solusinya [0,1,2].

Jika $x_3 = 0$ maka $x_1 = 2$ dan $x_2 = 1$ dan solusinya [2,1,0].

Dan lain sebagainya tergantung pengambilan x_1 dan x_3.

2.4. Himpunan konveks dan Fungsi Konveks.

Definisi 2.4.1.

Suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}^n$=Ruang dimensi n disebut himpunan Konveks K jika untuk setiap dua titik berbeda x_i dan $x_j \in$ K dapat ditemukan $\bar{x} \in$ K sedemikian sehingga berlaku :

$$\bar{x} = \lambda x_i + (1-\lambda)x_j \quad , \quad 0 \le \lambda \le 1$$

Definisi 2.4.2.

Suatu fungsi $F(x) = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ dengan $x \in \mathbb{R}^n$ dan didefinisikan pada suatu himpunan konveks $K \in \mathbb{R}^n$ disebut fungsi konveks jika untuk setiap dua titik berbeda $x_i, x_j \in$ K dan untuk setiap $\lambda \in$ R, $0 \le \lambda \le 1$ berlaku :

$$F\,[\lambda x_i + (1-\lambda)x_j] \le \lambda F(x_i) + (1-\lambda)F(x_j)$$

Teorema 2.4.1.

Jika $Q(x) = p^T x + x^T Cx$ berada dalam himpunan konveks K dan C adalah matriks semidefinit positif maka Q(x) adalah fungsi konveks pada K.

Bukti:

Karena C matriks semidefinit positif, maka menurut *Definisi* 2.2.5., $|C| \ge 0$, sehingga :

$$\lambda x^T Cx \ge \lambda^2 x^T Cx \quad , \text{ untuk } \; 0 \le \lambda \le 1$$

Ambil dua titik berbeda $x_i, x_j \in$ K , maka :

$$\lambda Q(x_i) + (1-\lambda)Q(x_j) = \lambda(p^T x_i + x_i^T Cx_i) + (1-\lambda)(p^T x_j + x_j^T Cx_j).$$

$$= \lambda p^T x_i + (1-\lambda)p^T x_j + \lambda x_i^T Cx_i + (1-\lambda)x_j^T Cx_j$$

$= \lambda p^T x_i + (1-\lambda)p^T x_j + \lambda x_i^T C x_i - \lambda x_j^T C x_j + x_j^T C x_j$

$= \lambda p^T x_i + (1-\lambda)p^T x_j + \lambda x_j^T C(x_i - x_j) + \lambda(x_i - x_j)^T C x_j + \lambda(x_i - x_j)^T C(x_i - x_j) + x_j^T C x_j$

$\geq \lambda p^T x_i + (1-\lambda)p^T x_j + \lambda x_j^T C(x_i - x_j) + \lambda(x_i - x_j)^T C x_j + \lambda^2(x_i - x_j)^T C(x_i - x_j) + x_j^T C x_j$

$= \lambda p^T x_i + (1-\lambda)p^T x_j + [\lambda(x_i - x_j) + x_j]^T C\, [\lambda(x_i - x_j) + x_j]$

$= p^T[\lambda x_i + (1-\lambda)x_j] + [\lambda x_i + (1-\lambda)x_j]^T C\, [\lambda x_i + (1-\lambda)x_j]$

$= Q\, [\lambda x_i + (1-\lambda)x_j]$

Jadi $\lambda Q(x_i) + (1-\lambda)Q(x_j) \geq Q\, [\lambda x_i + (1-\lambda)x_j]$

Atau $Q\, [\lambda x_i + (1-\lambda)x_j] \leq \lambda Q(x_i) + (1-\lambda)Q(x_j)$

Sehingga menurut *Definisi* 2.4.2. maka $Q(x)$ adalah fungsi konveks.

<u>*Definisi* 2.4.3.</u>

Suatu fungsi $F(x) = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ dengan $x \in \mathbb{R}^n$ dan didefinisikan pada suatu himpunan konveks $K \in \mathbb{R}^n$ disebut fungsi konkaf jika untuk setiap dua titik berbeda $x_i, x_j \in K$ dan untuk setiap $\lambda \in R$, $0 \leq \lambda \leq 1$ berlaku :

$$F\, [\lambda x_i + (1-\lambda)x_j] \geq \lambda F(x_i) + (1-\lambda)F(x_j)$$

<u>*Teorema* 2.4.2.</u>

Jika $F(x)$ fungsi konkaf dalam himpunan konveks K maka $-F(x)$ adalah fungsi konveks.

<u>Bukti:</u>

Ambil dua titik berbeda $x_i, x_j \in K$. $F(x)$ fungsi konkaf dalam himpunan konveks K, maka menurut *Definisi* 2.4.3. berlaku : $F\, [\lambda x_i + (1-\lambda)x_j] \geq \lambda F(x_i) + (1-\lambda)F(x_j)$

atau $-\{F[\lambda x_i + (1-\lambda)x_j]\} \le -\{\lambda F(x_i) + (1-\lambda)F(x_j)\}$

Sehungga menurut *Definisi* 2.4.2. $-F(x)$ adalah fungsi konveks.

Teorema 2.4.3.

Jika $F(x)$ fungsi konveks dalam himpunan konveks K maka $-F(x)$ adalah fungsi konkaf.

Bukti:

Ambil dua titik berbeda $x_i, x_j \in K$. $F(x)$ fungsi konveks dalam himpunan konveks K, maka menurut *Definisi* 2.4.2. berlaku : $F[\lambda x_i + (1-\lambda)x_j] \le \lambda F(x_i) + (1-\lambda)F(x_j)$

atau $-\{F[\lambda x_i + (1-\lambda)x_j]\} \ge -\{\lambda F(x_i) + (1-\lambda)F(x_j)\}$

Menurut Definisi 2.4.3 terbukti $-F(x)$ adalah fungsi konkaf.

Definisi 2.4.4.

Fungsi linier adalah fungsi konveks yang sekaligus fungsi konkaf.

2.5. Bentuk Kuadratik

Secara umum bentuk kuadratik dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \\ &= c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + \ldots + 2c_{1n}x_1x_n \\ &\quad + c_{22}x_2^2 + 2c_{23}x_2x_3 + \ldots + 2c_{2n}x_2x_n \\ &\quad + c_{33}x_3^2 + \ldots + 2c_{3n}x_3x_n \\ &\quad + \ldots + c_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

dimana c_{ij} koefisien-koefisien riel.

Jika koefisien yang simetri dianggap sama; $c_{ij} = c_{ji}$, maka bentuk di atas dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \\ &= (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots\ldots + c_{1n}x_n)x_1 \\ &\quad + (c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots\ldots + c_{2n}x_n)x_2 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots\ldots + c_{nn}x_n)x_n \end{aligned}$$

Jika bentuk kuadratik di atas mengalami perluasan maka akan berubah menjadi :

$$\begin{aligned} Q(x) = {} & p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n \\ & + (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots\ldots + c_{1n}x_n)x_1 \\ & + (c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots\ldots + c_{2n}x_n)x_2 \\ & \vdots \\ & + (c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots\ldots + c_{nn}x_n)x_n \end{aligned}$$

Sehingga untuk Program kuadratik dapat dituliskan sebagai berikut :

Maksimalkan :

$$\begin{aligned} Q(x) = {} & p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n \\ & + (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots\ldots + c_{1n}x_n)x_1 \\ & + (c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots\ldots + c_{2n}x_n)x_2 \\ & \vdots \\ & + (c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots\ldots + c_{nn}x_n)x_n \end{aligned}$$

Dengan kendala :

$$h_1(x) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$h_2(x) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \le b_2$

$\vdots$

$h_n(x) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n \le b_n$

Sistem di atas dapat disajikan dalam bentuk matriks yaitu, Memaksimalkan :

$$Q(x) = p^T x + x^T C x$$

Dengan kendala :

$$h_i(x) = a_i^T x \le b_i, \quad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$$

dimana :

p = matriks berukuran n x 1

x = matriks berukuran n x 1

C = matriks berukuran n x n

a_i = matriks berukuran n x 1

p^T = Transpose matriks p

x^T = Transpose matriks x

a_i^T = Transpose matriks a_i

Contoh 2.5.1.

Maksimalkan :

$$Q(x) = -1/2x_1^2 - 1/2x_2^2 + x_1 + 2x_2$$

Dapat dituliskan sebagai :

$$Q(x) = (1 \quad 2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (x_1 \quad x_2)\begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Q(x) = p^T x + x^T C x$$