BAB III

PENYUSUTAN KARENA USIA, CACAT, DAN PENGUNDURAN DIRI

3.1. PELUANG PENYUSUTAN

3.1.1. Dua Variabel Random

Pada bab terdahulu telah diperkenalkan suatu distribusi variabel random kontinyu, T(x), yaitu jangka waktu sampai meningggal dari (x). T(x) yang selanjutnya disingkat T, tetap dipakai untuk menunjukkan jangka waktu sampai penyusutan atau terjadinya perubahan status. Selanjutnya ada lagi variabel lain yang diberi notasi J(x) = J, yaitu menunjukkan suatu penyebab penyusutan. J diasumsikan sebagai suatu variabel random bertipe diskrit. Sebagai contoh, di dalam suatu rencana pensiun, variabel random J itu akan ditentukan oleh harga-harga 1,2,3 atau4, tergantung kepada sebab terjadinya penyusutan atau di sini sebab terjadinya perubahan status karyawan, baik karena mengundurkan diri, cacat, meninggal atau karena telah memasuki usia pensiun. Jika f(t,j) adalah suatu fungsi kepadatan gabungan dari T dan J, maka probabilitas (x) akan mengalami penyusutan dalam jangka waktu t dan t+dt dengan sebab penyusutan j, dapat diberikan sebagai berikut:

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$Pr(t< T < t + dt, J=j) = F(t+dt,J=j) - F(t)$$

$$Pr(t < T < t + dt, J=j) = F(t+dt, J=j) - F(t)$$
$$\simeq f(t,j)dt \qquad (2.1)$$

Sekarang, pandang suatu probabilitas (x) mengalami penyusutan j, yaitu

$$Pr(o < T < t, J=j) = \int_0^t f(s,j)ds \qquad (2.2)$$

dimana,(2.2) mempunyai notasi khusus yaitu ${}_tq_x^{(j)}$ Sehingga:

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f(s,j)ds \quad t>0, j=1,2,3,\ldots,m \qquad (2.3)$$

Sedangkan untuk distribusi marginal untuk J, yang diberi notasi h(j), diberikan sebagai berikut :

$$h(j) = \int_0^\infty f(s,j)ds = {}_\infty q_x^{(j)}; j= 1,2,3,\ldots,m \quad (2.4)$$

Apabila g(t) adalah fungsi kepadatan marginal dari T, dan G(t) adalah fungsi dari T, maka didapatkan :

$$g(t) = \sum_{j=1}^{m} f(t,j)$$

dan untuk setiap $t \geq 0$

$$G(t) = \int_0^t g(s)\, ds \qquad (2.5)$$

Notasi-notasi yang diperkenalkan pada bab terdahulu akan kembali digunakan untuk melengkapi variabel random T. Dengan menggunakan superscript (τ), yaitu menerangkan bahwa suatu fungsi menunjukkan kepada semua penyebab penyusutan, didapatkan

$${}_tq_x^{(T)} = Pr(T \leq t) = \int_0^t g(s)\, ds, \qquad (2.6)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$ {}_tp_x^{(T)} = Pr(T > t) = 1 - {}_tq_x^{(T)} \qquad (2.7) $$

dan

$$ \mu_{x+t}^{(T)} = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(T)}} \frac{d}{dt} {}_tq_x^{(T)} $$

$$ = - \frac{1}{{}_tp_x^{(T)}} \frac{d}{dt} {}_tp_x^{(T)} \qquad (2.8) $$

$$ = - \frac{d}{dt} \ln {}_tp_x^{(T)} $$

Secara matematika fungsi-fungsi untuk variabel random T pada bab ini identik dengan yang ada untuk T dari bab II, perbedaannya adalah pada interpretasi fungsi-fungsi itu di dalam aplikasinya.

Selanjutnya, persamaan (1.1) dapat dianalisa dengan syarat bertahan pada status yang diberikan sampai waktu t. Dengan cara ini akan didapatkan

$$ f(t,j)dt = Pr\ (T>t)\ Pr[(t<T\leq t+dt)\cup(J=j)|T>t] \qquad (2.9) $$

Dengan mengikuti atau analog seperti (1.10) di bab II, persamaan (2.9) diatas akan mengarahkan pada definisi laju penyusutan dengan penyebab j sebagai

$$ \mu_{x+t}^{(j)} = \frac{f(t,j)}{1-G(t)} = \frac{f(t,j)}{{}_tp_x^{(T)}} \qquad (2.10) $$

Laju penyusutan pada usia x+t dengan penyebab mempunyai interpretasi probabilitas bersyarat . Itu adalah harga dari fungsi kepadatan gabungan dari T dan J pada usia x+t.

Kemudian (2.9) dapat ditulis

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

kepadatan gabungan dari T dan J pada usia x+t.

Kemudian (2.9) dapat ditulis

$$f(t,j)dt = {}_tp_X^{(T)}\mu_{x+t}^{(j)}dt \qquad j=1,2,\ldots m,\ t>0$$

atau di dalam kata-kata

(Probabilitas gabungan dari penyusutan diantara t dan t+dt dengan penyebab j)

= (probabilitas ${}_tp_x^{(T)}$, yaitu peluang (x) tetap pada status semula sampai waktu t atau sampai t tahun) ×

(probabilitas bersyarat, $\mu_{x+t}^{(j)}$ dt, yaitu penyusutan terjadi diantara waktu setelah t tahun dan t+dt tahun dengan penyebab j, dengan diberikan bahwa penyusutan tidak terjadi sampai sebelum waktu t atau sebelum t tahun)

Kemudian dengan mendiferensialkan (2.3) dan (2.10)

$${}_tq_x = \int_0^t f(s,j)\,ds$$

$$f(t,j) = \frac{d\,{}_tq_X^{(j)}}{dt}$$

$$\text{dan } \mu_{x+t}^{(j)} = \frac{f(t,j)}{{}_tp_x^{(T)}}$$

$$= \frac{1}{{}_tp_x^{(T)}} \cdot \frac{d\,{}_tq_X^{(j)}}{dt} \qquad (2.11)$$

Sekarang dari (2.6),(2.5),(2.3)

$${}_tq_X^{(T)} = \int_0^t g(s)\,ds = \int_0^t f(s,j)\,ds$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_0^t f(s,j)\,ds = \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)} \qquad (2.12)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dengan mengkombinasikan (2.8),(2.12), dan(2.11), di dapatkan

$$\mu_{x+t}^{(T)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(T)}} \frac{d}{dt} \; {}_tq_x^{(T)}$$

$$= \frac{1}{{}_tp_x^{(T)}} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{{}_tp_x^{(T)}} \frac{d}{dt} {}_tq_x^{(j)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+t}^{(j)} \qquad (2.13)$$

(2.13) adalah Total Laju penyusutan yang berarti adalah jumlah laju-laju penyusutan dengan sebab yang berjumlah m.

Selanjutnya, pernyataan-pernyataan tentang funsi-fungsi kepadatangabungan, distribusi marginal dan distribusi bersyarat yang terdahulu, dapat diringkas sebagai berikut:

$f(t,j) = {}_tp_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(T)}$ dari (2.10)

$h(j) = {}_{\infty}q_x^{(j)}$ dari (2.4)

$g(t) = {}_tp_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(T)}$ dari (2.8)

Sedangkan probabilitas bersyarat dari J, dengan diberikan, bahwa penyusutan terjadi waktu t, adalah :

$$h(j|T=t) = \frac{f(t,j)}{g(t)} = \frac{{}_tp_x^{(T)} \mu_{x+t}^{(j)}}{{}_tp_x^{(T)} \mu_{x+t}^{(T)}}$$

$$= \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(T)}} \qquad (2.14)$$

Dan (2.3) dapat ditulis kembali menjadi

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_tp_x^{(T)} \mu_{x+s}^{(j)} ds$$

contoh 3.1 :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Untuk suatu model penyusutan darab 2 sebab penyusutan, dan laju-laju penyusutan diberikan

$$\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{t}{100}; t \geq 0$$

$$\mu_{x+t}^{(2)} = \frac{t}{100}; t \geq 0$$

Untuk model ini, hitunglah fungsi prebabilitas (atau fungsi kepadatan) untuk gabungannya, distribusi marginal dan distribusi bersyaratnya.

Jawab :

$$\text{Karena } \mu_{x+s}^{(T)} = \mu_{x+s}^{(1)} + \mu_{x+s}^{(2)} = \frac{s+1}{100}$$

Peluang survival (bertahannya) ${}_tp_X^{(T)}$ adalah

$${}_tp_X^{(T)} = \exp[\int_0^t [(s+1) / 100]\, ds]$$

$$= \exp[-(t^2 + 2t)/ 200];\ t \geq 0$$

dan fungsi kepadatan gabungan dari T dan J -nya adalah

$$f(t,j) = \begin{cases} \frac{t}{100} \exp[-(t^2+2t) / 200]; t \geq 0,\ j=1 \\ \\ \frac{1}{100} \exp[-(t^2+2t) / 200]; t \geq 0,\ j=2 \end{cases}$$

Fungsi kepadatan Marginal dari T-nya adalah

$$g(t) = \sum_{j=1}^{2} f(t,j) = \frac{t+1}{100} \exp\ [-t2\ 2t) / 200]; t>0$$

dan fungsi probabilitas marginal dari J-nya adalah

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$h(j)=\begin{cases}\int_0^{\sim} f(t,1)dt \ ; \ j = 1\\ \\ \int_0^{\sim} f(t,2)dt \ ; \ j = 2\end{cases}$$

Adalah lebih mudah untuk mengevaluasi h(2). Didalam pengembangan selanjutnya, $\emptyset(x)$ adalah fungsi distribusi untuk suatau distribusi normal standard $N(\emptyset,1)$.

Dengannya didapatkan

$$h(2)= \frac{1}{100}\, e^{0,005} \int_0^{\sim} \exp[-(t+1)^2/200]dt$$

$$= \frac{1}{100}\, e^{0,005} \sqrt{2\pi}\ 10 \int_0^{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ 10} \exp[-(t+1)^2/200]dt$$

Sekarang kita dapat mengganti variabel $z=(t+1)/10$ dan mendapatkan

$$h(2)= \frac{1}{10} e^{0,005} \sqrt{2\pi} \int_{0,1}^{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)dz$$

$$= \frac{1}{10}\, e^{0,005} \sqrt{2\pi}\, [1-\emptyset(\emptyset,1)]$$

$$= \emptyset,1159$$

Maka $h(1) = 1 - h(2) = 1 - \emptyset,1159 = \emptyset,8841$

Dan akhirnya fungsi probabilitas bersyarat dari J, dengan penyusutan pada t, dan menurut (2,14) adalah

$$h(1|t) = \frac{t}{t+1}$$

dan

$$h(2|t) = \frac{1}{t+1}$$

contoh 3.2 :

Dari suatu tabel penytusutan darab diketahui

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

ada 3 (tiga) penyebab penyusutan dengan $\mu_x^{(1)}$, $\mu_x^{(2)}$ dan $\mu_x^{(3)}$

dimana $\mu_x^{(T)} = \dfrac{3}{11j(100-x)}$

Hitunglah peluang seseorang berusia 10 tahun akan tetapi berada pada kumpulan (anggota) sampai usia 60 tahun.

jawab:

$$\mu_x^{(j)} = \frac{3}{11j(100-x)}$$

$$\mu_x^{(T)} = \mu_x^{(1)} + \mu_x^{(2)} + \mu_x^{(3)}$$

$$= \frac{1}{2(100-x)}$$

Peluang seseorang berusia 10 tahun akan tetap berada pada kumpulan (anggota) sampai usia 60 tahun dan diberi simbol ${}_{50}p_{10}^{(T)}$, dimana

$${}_{50}p_{10}^{(T)} = e^{-\int_0^{50} \mu_{x+t}^{(T)} dt}$$

$$= e^{-\int_0^{50} \frac{1}{2(100-x-t)} dt}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \int_0^{50} \frac{d(90-t)}{90-t} dt}$$

$$= e^{\frac{1}{2} [\ln (90 - t)]_0^{50}}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \ln 40 - \ln 90}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \ln \frac{4}{9}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Dalam prakteknya ,total laju kematian yang diberikan notasi $\mu_x^{(T)}$, didapatkan sebagai nilai hampiran. Dan cara yang biasa dipakai

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

adalah dengan memakai deret Taylor.

Pandang suatu fungsi polinom berderajat 2, maka

$$l_{x+h}^{(T)} = l_x^{(T)} + h\, l_x^{'(T)} + \frac{h}{2!} l_x^{''(T)}$$

untuk $h = 1$, $l_{x+1}^{(T)} = l_x^{(T)} + l_x^{'(T)} + \frac{1}{2} l_x^{''(T)}$

$h=-1$, $l_{x-1}^{(T)} = l_x^{(T)} - l_x^{'(T)} + \frac{1}{2} l_x^{''(T)}$

Dari persamaan dengan h=1 dan h=-1, apabila dikurangkan untuk kedua persamaan tersebut, didapatkan

$$l_{x+1}^{(T)} - l_{x-1}^{(T)} = l_x^{'(T)} + l_x^{'(T)}$$

$$2\, l_x^{'(T)} = l_{x+1}^{(T)} - l_{x-1}^{(T)}$$

$$l_x^{'(T)} = \frac{1}{2} \left(l_{x+1}^{(T)} - l_{x-1}^{(T)} \right)$$

$$\frac{d l_x^{(T)}}{dx} = \frac{1}{2} \left(l_{x+1}^{(T)} - l_{x-1}^{(T)} \right)$$

Sementara itu dari

$$\mu_{x+t}^{(T)} = - \frac{1}{{}_tp_x^{(T)}} \frac{d}{dt}\, {}_tp_x^{(T)}, \text{ didapatkan}$$

untuk $t=\emptyset$, $\mu_x^{(T)} = - \dfrac{1}{{}_xp_o^{(T)}} \dfrac{d}{dt}\, {}_tp_o^{(T)}$, didapatkan

$$= - \frac{1}{s(x)} \cdot \frac{d\, s(x)}{dx}$$

$$= \frac{-\, l_o^{(T)}}{l_x^{(T)}} \frac{d \quad l_x^{(T)}/l_o^{(T)}}{dx}.$$

$$= - \frac{1}{l_x^{(T)}} \cdot \frac{d\, l_x^{(T)}}{dx}$$

Jadi untuk suatu Laju Total Penyusutan $\mu_x^{(T)}$, yang mana

$$\mu_x^{(T)} = - \frac{1}{l_x^{(T)}} \frac{d\, l_x^{(T)}}{dx}, \text{ dapat didekati dengan}$$

hampiran yaitu

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= - \frac{1}{2\, l_x^{(T)}} \left(l_{x+1}^{(T)} - l_{x-1}^{(T)} \right) \qquad (2.15)$$

Analog dengan diatas, untuk laju penyusutan $\mu_x^{(j)}$ dengan sebab j, dapat diaproksimasi dengan

$$\mu_x^{(j)} = \frac{-1}{2\, l_x^{(T)}} \left(l_{x+1}^{(j)} - l_{x-1}^{(j)} \right)$$

Dengan memakai hubungan, $\mu_x^{(j)} = - \frac{1}{l_x^{(T)}} \cdot \frac{d\, l_x^{(j)}}{dx}$

Sekarang pandang notasi - notasi dibawah ini

$l_x^{(T)}$ adalah jumlah orang yang hidup pada usia x tahun dan akan mengalami penyusutan yang diakibatkan oleh m sebab penyusutan (yaitu sebab 1,2, . . . ,m)

$d_x^{(j)}$ adalah jumlah orang yang mengalami penyusutan pada usia antara x dan x+1 tahun dimana disebabkan oleh , penyebab j.

$d_x^{(T)}$ adalah jumlah penyusutan orang-orang pada saat usia antara x dan x+1 yang diakibatkan oleh penyebab 1, penyebab 2,. . .,penyebab m

Karena itu jelaslah bahwa :

$$d_x^{(T)} = d_x^{(1)} + d_x^{(2)} + \ldots + d_x^{(m)}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} d_x^{(j)} \qquad (2.16)$$

$$l_x^{(T)} = l_{x+1}^{(T)} + d_x^{(T)}$$

$$l_{x+1}^{(T)} = l_{x+1}^{(T)} - d_x^{(T)} \qquad (2.17)$$

$q_x^{(j)}$ adalah probabilitas seseorang berumur x tahun akan berubah statusnya atau tepatnya keluar dari kelompok orang-orang yang berumur x dalam masa 1 tahun,dengan penyebab penyusutan j,yang mana :

$$q_x^{(j)} = \frac{d_x^{(j)}}{l^{(T)}} \qquad (2.18)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$q_x^{(T)}$ adalah total peluang dari semua yang berumur x tahun yang akan keluar dari kelompok orang-orang yang berumur x dalam masa 1 tahun,yang disebabkan penyebab1,penyebab2,..., penyebab m sehingga :

$$q_x^{(T)} = q_x^{(1)} + q_x^{(2)} + q_x^{(3)} + \ldots + q_x^{(m)}$$

$$= \frac{d_x^{(1)}}{l_x^{(T)}} + \frac{d_x^{(2)}}{l_x^{(T)}} + \ldots + \frac{d_x^{(m)}}{l_x^{(T)}}$$

$$= \frac{d_x^{(T)}}{l_x^{(T)}}$$

$p_x^{(T)}$ adalah probabilitas seseorang yang berumur x tahun akan bertahan pada kelompok orang-orang yang berusia x paling sedikit selama 1 tahun , dimana:

$$p_x^{(T)} = 1 - q_x^{(T)}$$

$$= 1 - \frac{d_x^{(T)}}{l_x^{(T)}} = \frac{l_x^{(T)}}{l_x^{(T)}} - \frac{d_x^{(T)}}{l_x^{(T)}}$$

$$= \frac{l_x^{(T)} - d_x^{(T)}}{l^{(T)}}$$

$$= \frac{l_x^{(T)}}{l_x^{(T)}} \qquad (2.19)$$

Dari persamaan (2.19) diatas ,maka

$${}_np_x^{(T)} = \frac{l_{x+n}^{(T)}}{l_x^{(T)}}$$

$${}_nq_x^{(T)} = 1 - {}_np_x^{(T)}$$

$$= 1 - \frac{l_{x+n}^{(T)}}{l_x^{(T)}}$$

<u>contoh 3.3:</u>

Tabel dibawah ini menunjukkan tabel penyusutan darab dengan dua penyebab ,yaitu sebab1,dan sebab2

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Tabel Penyusutan

dengan 2 penyebab penyusutan

x/usia	$l_x^{(T)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
24	901.020	299	92.762
25	807.759	314	86.632
26	721.013	324	80.385
27	640.304	329	74.117
28	565.858	329	67.909
29	497.620	324	61.839

Berdasarkan tabel tersebut ,hitunglah :

$q_{24}^{(2)}$, $q_{24}^{(1)}$,${}_3p_{25}^{(T)}$, ${}_2q_{26}^{(2)}$, dan ${}_{21}q_{27}^{(1)}$

<u>jawab:</u>

$$q_{24}^{(2)} = \frac{d_{24}^{(2)}}{l_{24}^{(T)}} = \frac{92.762}{901.020}$$

$$q_{24}^{(1)} = \frac{d_{24}^{(1)}}{l_{24}^{(T)}} = \frac{299}{901.020}$$

$${}_3p_{24}^{(T)} = \frac{l_{28}^{(T)}}{l_{25}^{(T)}} = \frac{565.858}{807.959}$$

$${}_2q_{24}^{(2)} = \frac{d_{24}^{(2)} + d_{27}^{(2)}}{l_{26}^{(T)}} = \frac{80.385+74.117}{721.013}$$

$${}_{21}q_{27}^{(1)} = \frac{d_{29}^{(1)}}{l_{27}^{(T)}} = \frac{324}{640.304}$$

3.1.2 Tabel Penyusutan Tunggal

Dari masing-masing penyebab penyusutan yaitu sebab (1),(2),....,(m), secara umum dapat dinyatakan kedalam tabel penyusutan tunggal ,yaitu yang tergantung hanya kepada satu sebab penyusutan saja.Kemudian ,pandang

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

sebab penyusutan (j) ,lalu ambil $l_o^{'(j)}$. sebagai radix maka

$$l_x^{'(j)} = l_o^{'(j)} \cdot e^{-\int_0^x \mu_y^{(j)} \cdot dy}$$

$$q_x^{'(j)} = 1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^{(j)} \cdot dt} \qquad (2.20)$$

Dari persamaan diatas memperlihatkan suatu fungsi mortalitas yang telah dibab terdahulu ,yaitu :

$$l_x = l_o \cdot e^{-\int_0^x \mu_t \cdot dt}$$

$$q_x = 1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x+t} \cdot dt}$$

Jadi jelaslah apabila penyebab penyusutan tunggal adalah kematian ,maka $l_x^{'(j)}$ dan $q_x^{'(j)}$ dari 2.20 adalah lx dan q_x pada tabel kematian.

Kemudian karena ${}_tp_x^{'(j)} = 1 - {}_tq_x^{'(j)} = \exp\left[-\int_0^1 \mu_{x+s}^{(j)} \cdot ds\right]$

Maka didapatkan

$$p_x^{(T)} = e^{-\int_0^1 (\mu_{x+t}^{(1)} + \mu_{x+t}^{(2)} + \ldots + \mu_{x+t}^{(m)}).dt}$$

$$p_x^{(T)} = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^{(1)} \cdot dt} \cdot e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^{(2)} \cdot dt} \cdot \ldots \cdot e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^{(m)} \cdot dt}$$

$$= p_x^{'(1)} \cdot p_x^{'(2)} \cdot \ldots \cdot p_x^{'(m)}$$

$$= \prod_{j=1}^{m} p_x^{'(m)}$$

Dari (2.21) terlihat,jika selain j, ada beberapa sebab lain terjadi,maka :

$${}_tp_x^{'(j)} \geq {}_tp_x^{(T)}$$

sehingga

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$ {}_tp_x'^{(j)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} \geq {}_tp_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} $$

Jika diintegralkan ke t pada interval (Ø,1),didapatkan

$$ \int_0^1 {}_tp_x'^{(j)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} \; dt \geq \int_0^1 {}_tp_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} \; dt $$

$$ q_x'^{(j)} \geq q_x^{(j)} \qquad (2.22) $$

Sekaligus didapatkan bukti adanya perbedaan antara ${}_tq_x'^{(j)}$ yang disebut Tingkat Absolut dan ${}_tq_x^{(j)}$ yang adalah probabilitas penyusutan karena sebab j.Sekarang akan diuji asumsi-asumsi yang menyangkut akibat atau pengaruh dari penyusutan-penyusutan.Pertama adanya asumsi bahwa laju penyusutan akan konstan untuk setiap penyusutan pada setiap tahun usia .Ini berarti

$$ \mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)} $$

dan

$$ \mu_{x+t}^{(T)} = \mu_x^{(T)} \quad ; \quad 0 \leq t < 1 $$

Kemudian dapat juga didapatkan

$$ q_x^{(j)} = \int_0^1 {}_tp_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} \; dt $$

$$ = \frac{\mu_x^{(T)}}{\mu_x^{(T)}} \int_0^1 {}_tp_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} \; dt $$

$$ = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(T)}} \int_0^1 {}_tp_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(T)} \; dt $$

$$ = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(T)}} \cdot q_x^{(T)} \qquad (2.23) $$

Karena laju penyusutan diasumsikan konstan ,maka :

$$ \int_0^1 \mu_{x+t}^{(T)} \; dt = -\ln {}_tp_x^{(T)} $$

$$ t.\mu_{x+t}^{(T)} \Big]_0^1 = -\ln {}_tp_x^{(T)} $$

$$ \mu_{x+t}^{(T)} = -\ln {}_tp_x^{(T)} $$

Untuk t=1

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\mu_x^{(T)} = - \ln \; p_x^{(T)}$$

dan

$$\mu_x^{(T)} = - \ln \; {}_tp_x'^{(T)}$$

Jadi (2.23) diatas menjadi

$$q_x^{(j)} = \frac{- \ln \; {}_tp_x'^{(j)}}{- \ln \; {}_tp_x^{(T)}} \; q_x^{(T)} \qquad (2.24)$$

Persamaan ini bersama dengan (2.21) dapat digunakan untuk menghitung $q_x^{(j)}$ dari harga-harga $q_x'^{(j)}$,untuk j = 1,2,3,...,m Persamaan (2.24) dapat diselesaikan untuk $q_x'^{(j)}$ untuk memberikan

$$q_x'^{(j)} = 1 - p_x'^{(j)}$$

$$= 1 - [\, p_x^{(T)} \,]^{(q_x^{(j)} / q_x^{(T)})}$$

$$= 1 - [\, 1 - q_x^{(j)} \,]^{(q_x^{(j)} / q_x^{(T)})} \qquad (2.25)$$

Hasil ini berguna untuk mendapatkaan Tingkat Absolut ($q_x'^{(j)}$) dari sekumpulan probabilitas dari penyusutan yang

Karena laju penyusutan diasumsikan konstan ,maka :

$$\int_0^1 \mu_{x+t}^{(T)} \; dt = - \ln \; {}_tp_x^{(T)}$$

$$t.\mu_{x+t}^{(T)} \Big]_0^1 = - \ln \; {}_tp_x^{(T)}$$

$$\mu_{x+t}^{(T)} = - \ln \; {}_tp_x^{(T)}$$

Untuk t=1

$$\mu_x^{(T)} = - \ln \; p_x^{(T)}$$

dan

$$\mu_x^{(T)} = - \ln \; {}_tp_x'^{(T)}$$

Jadi (2.23) diatas menjadi

$$q_x^{(j)} = \frac{- \ln \; {}_tp_x'^{(j)}}{- \ln \; {}_tp_x^{(T)}} \; q_x^{(T)} \qquad (2.24)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Persamaan ini bersama dengan (2.21) dapat digunakan untuk menghitung $q_x^{(j)}$ dari harga-harga $q_x^{\prime(j)}$,untuk j = 1,2,3,...,m. Persamaan (2.24) dapat diselesaikan untuk $q_x^{\prime(j)}$ untuk memberikan

$$\begin{aligned} q_x^{\prime(j)} &= 1 - p_x^{\prime(j)} \\ &= 1 - [\, p_x^{(T)} \,]^{(q_x^{(j)} / q_x^{(T)})} \\ &= 1 - [\, 1 - q_x^{(j)} \,]^{(q_x^{(j)} / q_x^{(T)})} \end{aligned} \qquad (2.25)$$

Hasil ini berguna untuk mendapatkaan Tingkat Absolut ($q_x^{\prime(j)}$) dari sekumpulan probabilitas dari penyusutan yang diberikan.Persamaan (2.25) memiliki suatu asumsi alternatif ,sebutlah bahwa setiap penyusutan dalam konteks penyusutan darab memiliki suatu distribusi uniform di setiap tahun usia .Suatu distribusi VR x dikatakan seragam diantara x_1 dan x_2 bila kepadatannya konstan dalam selang (x_1,x_2) dan nol untuk lainnya.Sehingga disini $q_x^{(j)}$ dikatakan seragam diantara x dan x+1 sebab $\frac{d q_x^{(j)}}{dx}$ diasumsikan konstan dalam selang (x,x+1) yaitu sama dengan 1.Sehingga untuk :

$$_t q_x^{(j)} = t.\ q_x^{(j)} \qquad j= 1,2,\dots,m \quad 0\le t \le 1$$

Dengan asumsi yang diberikan tersebut, terlihat dari (2.11)

$$_t p_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} = q_x^{(j)} \qquad (2.26)$$

dan

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{q_x^{(j)}}{_t p_x^{(T)}} = \frac{q_x^{(j)}}{1 - t.q_x^{(T)}}$$

Kemudian $q_x^{\prime(j)} = 1 - \exp\left[- \int_0^1 \mu_{x+t}^{(j)} \ dt \right]$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= 1 - \exp\left[- \int_0^1 \frac{q_x^{(j)}}{1 - t\, q_x^{(T)}}\, dt \right]$$

$$= 1 - \exp\left[- \frac{q_x^{(T)}}{q_x^{(T)}} \int_0^1 \frac{q_x^{(j)}}{1 - t\, q_x^{(T)}}\, dt \right]$$

$$= 1 - \exp\left[- \frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(T)}} \int_0^1 \frac{q_x^{(T)}}{1 - t\, q_x^{(T)}}\, dt \right]$$

$$= 1 - \exp\left[- \frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(T)}} \left| \frac{d(1 - t.q_x^{(T)})}{(1 - q_x^{(T)})} \right|_0^1 \right]$$

$$q_x^{\prime(j)} = 1 - \exp\left[- \frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(T)}} \cdot \ln\ (1 - q_x^{(T)}) \right]$$

contoh 3.4

Dengan (2.25) dapatkan $q_x^{\prime(1)}$, $q_x^{\prime(2)}$ dari tabel di bawah ini

x	$q_x^{(j)}$	$q_x^{(j)}$
65	0,02	0,05
66	0,03	0,06
67	0,04	0,07
68	0,05	0,08
69	0,06	0,09
70	0,00	1,00

. dikutip dari Asuransi II, penerbit Karunia jakarta

Diatas adalah tabel penyusutan dengan 2 sebab yaitu kematian dan memasuki usia pensiun. Dan terlihat ,disini 70 adalah usia yang ditetapkan sebagai usia pensiun.

penyelesaian:

x	$q_x^{(j)}$	$q_x^{(j)}$	$q_x^{(T)}$	$q_x^{\prime(1)}$	$q_x^{\prime(2)}$
65	0,02	0,05	0,07	0,02052	0,05052
66	0,03	0,06	0,09	0,03095	0,06094
67	0,04	0,07	0,11	0,04149	0,07147
68	0,05	0,08	0,13	0,06294	0,09291
69	0,06	0,09	0,15	0,06294	0,09291
70	0,00	1,00	-	-	-

Walaupun dapat dicari ,dengan $q_{70}^{(1)}$, $q_{70}^{(2)}$, tetapi $q_{70}^{\prime(1)}$, $q_{70}^{(2)}$ tidak perlu dicari karena nilai-nilai tingkat

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

tersebut tergantung kepada batas usia pensiun yang ditetapkan yaitu usia 70 tahun.

3.2 PEMBENTUKAN TABEL PENYUSUTAN DARAB

Didalam pembentukan tabel penyusutan darab (multiple decrement table), akan menjadi lebih baik apabila data tersedia lengkap sehingga dapat digunakan secara langsung untuk membuat estimasi harga-harga probabilitas $q_x^{(j)}$.Tetapi seringkali data tidak resedia.Suatu alternatif untuk membuat tabel penyusutan darab adalah dengan menggunakan tabel penyusutan tunggal.Berikut ini ,cara pembentukan tabel penyusutan darab akan disajikan dalam bentuk contoh.

contoh 3.5:

Dengan (2.21) dan (2.24) buatlah suatu tabel penyusutan darab yang berhubungan dengan tingkat-tingkat absolut dibawah ini .Diasumsikan bahwa sebab 3 yaitu pensiun,dapat terjadi diantara usia 65 dan 70 tahun ,sedangkan usia pensiun diputuskan usia 70 tahun.

x	$q_x'^{(j)}$	$q_x'^{(j)}$	$q_x'^{(T)}$
65	0,020	0,02	0,07
66	0,025	0,02	0,06
67	0,030	0,02	0,08
68	0,035	0,02	0,10
69	0,040	0,02	0,12

,dikutip dari Asuransi II,penerbit Karunia Jakarta

Penyelesaian:

Tabel di bawah memuat hasil-hasil perhitungan dari harga-harga probabilitas penyusutan. Persamaan (2.21) dapat ditulis menjadi

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$q_x^{(T)} = 1 - \prod_{j=1}^{3} (1 - q_x'^{(j)}), \text{maka}$$

x	$q_x^{(T)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$	$l_x^{(T)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$d_x^{(3)}$
65	0,07802	0,01940	0,01941	0,03921	000,00	19,40	19,40	39,21
66	0,10183	0,02401	0,01916	0,05867	921,99	22,14	17,67	54,09
67	0,12545	0,02851	0,01891	0,07803	828,09	23,61	15,66	64,62
68	0,14887	0,03290	0,01866	0,09731	724,20	23,83	13,51	70,47
69	0,17210	0,03720	0,01841	0,11649	616,39	22,93	11,35	71,80
70	1,00000	0,00000	0,00000	1,00000	510,31	0,00	0,00	510,31

Kita ambil untuk x = 66

$$q_{66}^{(T)} = 1 - (1 - q_{66}'^{(1)})(1 - q_{66}'^{(2)})(1 - q_{66}'^{(3)})$$

$$= 1 - (0,975)\ (0,98)\ (0,94)$$

$$= 1 - 0,89817$$

$$= 0,10183$$

$$q_{66}^{(1)} = \frac{\ln p_{66}'^{(1)}}{\ln p_{66}^{(T)}}$$

$$= 0,02401$$

$$q_{66}^{(2)} = \frac{\ln 0,98}{\ln 0,89817} \cdot 0,10083 = 0,01916$$

$$q_{66}^{(3)} = \frac{\ln 0,94}{\ln 0,89817} \cdot 0,10183 = 0,05867$$

$$d_{66}^{(1)} = l_{66}^{(T)} \cdot q_{66}^{(1)} = 921,99 \cdot 0,02401$$

$$= 22,1369799$$

$$\approx 22,14$$

$$d_{66}^{(2)} = 921,99 \cdot 0,01916 = 17,665 \approx 17,67$$

$$d_{66}^{(3)} = 921,99 \cdot 0,05867 = 54,09315 \approx 54,09$$

$$l_{66}^{(T)} = l_{65}^{(T)} \cdot p_{65}^{(T)} = 1000 \cdot 0,92199 = 921,99$$

Sekarang apabila pada tabel penyusutan tunggal untuk tiap tahun usia diasumsikan berdistribusi seragam (uniform distribution of decrement) akan dibuktikan bahwa :

$$q_x^{(d)} \approx q_x'^{(d)} \left[1 - \tfrac{1}{2}(q_x'^{(w)} + q_x'^{(r)}) + \tfrac{1}{3}\, q_x'^{(w)}\, q_x'^{(r)} \right]$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Yaitu yang berasal dari tabel penyusutan darab dengan 3 sebab penyusutan .Yaitu keluar secara sukarela (w), keluar karena kematian (d) dan keluar karena pensiun (r).Bukti:

Dari (2.13) didapatkan

$$\mu_x^{(T)} = \sum_{j=1}^{3} \mu_x^{(j)}$$

maka

$$_tp_x^{(T)} = e^{-\int_0^t (\mu_{x+s}^{(1)} + \mu_{x+s}^{(2)} + \mu_{x+s}^{(3)})ds}$$

$$= e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(1)} ds} \cdot e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(2)} ds} \cdot e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(3)} ds}$$

$$= {}_tp_x'^{(1)} \cdot {}_tp_x'^{(2)} \cdot {}_tp_x'^{(3)}$$

Sebelumnya bahwa

$$q_x^{(j)} = \int_0^1 {}_tp_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} \cdot dt$$

Sehingga

$$q_x^{(1)} = \int_0^1 {}_tp_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(1)} \cdot dt$$

$$= \int_0^1 \frac{{}_tp_x^{(T)}}{{}_tp_x'^{(1)}} \, {}_tp_x'^{(1)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} \cdot dt$$

$$\approx q_x'^{(1)} \cdot \int_0^1 \frac{{}_tp_x^{(T)}}{{}_tp_x'^{(1)}} \cdot dt$$

$$= q_x'^{(1)} \cdot \int_0^1 {}_tp_x'^{(2)} \cdot {}_tp_x'^{(3)} \, dt$$

Dengan asumsi diatas (uniform distribution of decrement) maka

$$_tq_x^{(j)} = t \cdot q_x^{(j)}$$

sehingga

$$q_x^{(1)} \approx q_x'^{(1)} \cdot \int_0^1 {}_tp_x'^{(2)} \cdot {}_tp_x'^{(3)} \, dt$$

$$= q_x'^{(1)} \int_0^1 (1 - t.q_x'^{(2)}).(1 - t.q_x'^{(3)}).dt$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= q_x'^{(1)} \int_0^1 (1 - t(q_x'^{(2)} + q_x'^{(3)}).t^2 q_x'^{(2)} q_x'^{(3)})\,dt$$

$$= q_x'^{(1)}.\left[1 - \tfrac{1}{2}(q_x'^{(2)} + q_x'^{(3)}) + \tfrac{1}{3} q_x'^{(2)} q_x'^{(3)}\right]$$

Sehingga untuk 2 sebab penyusutan lainnya

$$q_x^{(2)} \approx q_x'^{(2)}.\left[1 - \tfrac{1}{2}(q_x'^{(1)} + q_x'^{(3)}) + \tfrac{1}{3} q_x'^{(1)} q_x'^{(3)}\right]$$

$$q_x^{(3)} \approx q_x'^{(3)}.\left[1 - \tfrac{1}{2}(q_x'^{(1)} + q_x'^{(2)}) + \tfrac{1}{3} q_x'^{(1)} q_x'^{(2)}\right]$$

dengan keluar sukarela (w) adalah 1

meninggal (d) adalah 2

pensiun (r) adalah 3

maka

$$q_x^{(d)} \approx q_x'^{(d)}\left[1 - \tfrac{1}{2}(q_x'^{(w)} + q_x'^{(r)}) + \tfrac{1}{3} q_x'^{(w)} q_x'^{(r)}\right]$$

contoh 3.6

Dapatkan harga-harga probabilitas penyusutan untuk usia-usia antara 65-69 dari data contoh 3.5,dengan diasumsikan pada tabel penyusutan tunggal ,pada tiap tahun usianya berdistribusi seragam

penyelesaian:

Ini adalah aplikasi dari persamaan yang telah dibuktikan di atas.

x	$q_x'^{(j)}$	$q_x'^{(j)}$	$q_x'^{(T)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
65	0,020	0,02	0,07	0,01941	0,01941	0,03921
66	0,025	0,02	0,06	0,02401	0,01916	0,05868
67	0,030	0,02	0,08	0,02852	0,01892	0,07802
68	0,035	0,02	0,10	0,03292	0,01867	0,09727
69	0,040	0,02	0,12	0,03723	0,01843	0,11643

Misalkan kita ambil x = 65 ,maka

$$q_{65}^{(1)} = q_{65}'^{(1)}\left[1 - \tfrac{1}{2}(q_{65}'^{(2)} + q_{65}'^{(3)}) + \tfrac{1}{3} q_x'^{(2)} q_x'^{(3)}\right]$$

$$= 0{,}020\left[1 - \tfrac{1}{2}(0{,}02 + 0{,}04) + \tfrac{1}{3}\,0{,}02\,.\,0{,}04\right]$$

$$= 0{,}01941$$

$$q_{65}^{(2)} = 0{,}020\left[1 - \tfrac{1}{2}(0{,}02 + 0{,}04) + \tfrac{1}{3}\,0{,}02\,.\,0{,}04\right]$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= 0{,}01941$$

$$q_{65}^{(3)} = 0{,}040 \left[1 - \tfrac{1}{2} (0{,}02 + 0{,}02) + \tfrac{1}{3}\, 0{,}02 \cdot 0{,}02 \right]$$

$$= 0{,}03921$$

Apabila diperhatikan , hasil diatas mendekati dengan hasil yang didapatkan dari contoh 3.5 yang memakai (2.24).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)