BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 DISTRIBUSI SURVIVAL DAN TABEL KEHIDUPAN

2.1.1 PROBABILITAS USIA KEMATIAN

Suatu distribusi variabel acak dari usia kematian diikhtisarkan oleh tabel kehidupan atau juga disebut tabel mortalitas.Tabel ini dibutuhkan diberbagai bidang ilmu .Misalkan para ahli biostatistika akan memakai tabel ini untuk membandingkan hasil keefektifan beberapa cara penanggulangan suatu wabah.Sedangkan para ahli demografi memakai tabel ini sebagai alat untuk memproyeksikan populasi

2.1.1.1 Angka Survival

Angka survival untuk usia x diberi notasi s(x) adalah probabilitas suatu kelahiran baru yang dapat mencapai usia x.Jika X adalah suatu usia kematian ,x usia sekarang dan F(x) adalah probabilitas kematian sampai usia x,sehingga

$$F(x) = \Pr (X \leq x) \; ; \; x \geq 0$$

maka

$$s(x) = 1 - F(x) = \Pr (X > x) \; ; \; x \geq 0$$

<u>contoh 1.1:</u>

Jika tidak ada kegagalan dalam persalinan,jadi F(0)=0,atau berarti semua bayi yang lahir selamat,sehingga angka survival bayi usia 0 sama dengan,s(0)= 1 - 0 =1

Atau dengan kata lain semua bayi lahir dalam keadaan hidup.

hidup.

2.1.1.2. Waktu Sampai Kematian Pada Seseorang Berumur Tepat x.

Nilai kemungkinan bersyarat bahwa suatu kelahiran baru akan meninggal diantara usia x dan z,dengan syarat telah mencapai usia x adalah:

$$\Pr\ (\ x < X \le z \mid X > x\ ) = \frac{F(z) - F(x)}{1 - F(x)}$$

$$= \frac{s(x) - s(z)}{s(x)} \qquad (1.3)$$

Persamaan diatas berasal dari definisi probabilitas bersyarat yaitu :

Definisi : Nilai kemungkinan bersyarat kejadian A jika kejadian B diketahui, ditulis sebagai $P(A|B)$ dan ditentukan oleh $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$,$P(B) \neq 0$

Simbol (x) selanjutnya akan digunakan untuk menandai suatu kehidupan berusia x tahun.Sedangkan waktu kehidupan masa mendatang dari (x) yaitu X - x akan ditandai dengan notasi T(x).Untuk membuat pernyataan probabilitas tentang T(x),akan dijumpai notasi-notasi sebagai berikut :

$${}_tq_x = \Pr\ (\ T(X) \le t),\ t \ge 0 \qquad (1.4)$$

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \Pr\ (\ T(x) > t\ )\ ,\ t \ge 0 \qquad (1.5)$$

${}_tq_x$ dapat diinterpretasikan sebagai nilai probabilitas (x) akan meninggal dalam waktu t tahun mendatang .Dan ${}_tq_x$ adalah suatu fungsi distribusi dari T(x) .

${}_tp_x$ dapat diinterpretasikan sebagai nilai probabilitas

(x) akan mencapai usia x+t .Dan ${}_tp_x$ adalah suatu angka survival untuk (x).Untuk kasus khusus pada usia kehidupan usia0 ,maka didapatkan T(0) = X dan

$${}_xp_0 = s(x) \ , \ x \geq 0 \qquad (1.6)$$

Jika t =1 maka awalan simbol yang didefinisikan di (1.4) dan (1.5) bisa dihilangkan dan didapatkan :

q_x = Pr ((x) akan meninggal di antara selang waktu 1 tahun)

p_x = Pr ((x) akan mencapai usia x+1)

Ada simbol spesial untuk peristiwa yang lebih umum yaitu,(x) akan bertahan t tahun dan meninngal u tahunsetelah itu, berarti a(x) akan meninngal diantara usia x+t dan x+t+u dan simbol spesial itu adalah

$$\begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= \Pr(\ t < T(x) \leq t+u\ ) \\ &= {}_{t+u}p_x - {}_tq_x \\ &= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x \qquad (1.7) \end{aligned}$$

seperti diats jika u = 1 ,ditulis ${}_{t|1}q_x = {}_{t|}\,q_x$

Dari sini dapat ditunjukkan bahwa ada dua cara menunjukkan nilai probabilitas bahwa (x) akan meninggal diantara usia x dan x+u.Kedua cara itu adalah :

a. dari persamaan 1.3 dengan z = x+u

b. dari persamaan 1.7 dengan t=0

Persamaan 1.3 adalah suatu probabilitas bersyarat dari suatu kelahiran baru yang akan meninggal diantara usia x dan z,dengan z = x+u dengan syarat telah mencapai usia x.Sedangkan persamaan 1.7 menyatakan nilai probabilitas dari kehidupan yang diamati pada saat usia x yang akan meninggal diantara usia x dan x+u.Sehingga dari hubungan kedua persamaan tadi didapatkan :

$$Pr\ (\ x < X \le z \mid X > x\ ) = {}_{u}q_{x}$$

$$\frac{s(x) - s(z)}{s(x)} = {}_{u}q_{x}$$

$$\frac{s(x)}{s(x)} - \frac{s(z)}{s(x)} = {}_{u}q_{x}$$

$${}_{u}q_{x} = 1 - \frac{s(z)}{s(x)}$$

$${}_{u}q_{x} = 1 - \frac{s(x + u)}{s(x)} \qquad (1.8)$$

$${}_{u}p_{x} = \frac{s(x + u)}{s(x)} \qquad (1.9)$$

2.1.1.3 Laju Kematian (Force of Mortality)

Kita lihat persamaan 1.3 dapat disajikan dengan distribusi F(x) dan juga angka survival s(x) ,dengan menyatakan probabilitas bersyarat dari (0) yang akan meninggal diantara usia x dan z ,dengan diberikan survival sampai umur x,dengan z - x diberikan konstan sebut c,dipikirkan sebagai fungsi dari x, probabilitas bersyarat ini menerangkan distribusi probabilitas dari kematian di waktu yang dekat (dalam selang waktu 0 dan c) untuk suatu kehidupan yang telah mencapai usia x.Analog dengan fungsi ini untuk suatu kematian mendadak dapat dihitung dengan menggunakan fungsi kepadatan kematian setelah mencapai umur x yaitu dengan persamaan 1.3 dengan $z = x + \Delta x$,

$$Pr(x < X \le x+\Delta x \mid X > x) = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1 - F(x)}$$

$$\approx \frac{f(x)\Delta x}{1 - F(x)} \qquad (1.10)$$

Fungsi : $\dfrac{f(x)}{1 - F(x)}$

Pada persamaan 1.10 diatas mempunyai suatu penafsiran dimulai (0),dan menandai waktu survival sampai x,didapat

$$_xp_o = s(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_s\, ds\right) \qquad (1.14)$$

sehingga

$$F(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \mu_s\, ds\right) \qquad (1.15)$$

$$F'(x) = f(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_s\, ds\right)$$

$$= {_xp_o}.\mu_x$$

Sekarang kita catat G(t) dan g(t) masing-masing notasi untuk menandai funfsi distribusi dan fungsi kepadatan dari T(x) ,yaitu waktu kehidupan masa mendatang (x).

Dari 1.4 diketahui bahwa $G(t) = {_tq_x}$ karena itu :

$$g(t) = \frac{d\ {_tq_x}}{dt}$$, yaitu dari definisi fungsi kepadatan.

$$= \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right]$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)}\left[-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}\right]$$

$$= {_tp_x}\ \mu_{x+t}\ ,\ t \geq 0 \qquad (1.16)$$

Jadi ${_tp_x}\ \mu_{x+t}\ dt$ adalah nilai probabilitas bahwa (x) akan meninggal diantara usia t dan t+dt, dan

$\int_0 {_tp_x}\ \mu_{x+t}\ dt = 1$,karenan setiap orang pasti akan meninggal.

2.1.2 TABEL KEHIDUPAN

2.1.2.1 Hubungan Fungsi-fungsi Tabel Kehidupan dengan Angka Survival

Suatu tabel kehidupan biasanya memuat fungsi-fungsi dasar q_x , l_x , d_x dan kemungkinan beserta fungsi-fungsi tambahan lainnya.Sebelum menampilkan suatu tabel kehidupan ,perlu dipikirkan interpretasi dari fungsi-fungsi dibawah ini yang langsung berhubungan dengan fungsi-fungsi probabilitas yang telah dibicarakan didepan .

Pandang l_o sebagai jumlah kelahiran baru ,dan l_x adalah jumlah yang diharapkan dapat bertahan sampai umur x dari l_o kelahiran baru.Telah diketahui s(x) adalah nilai probabilitas dari kelahiran baru untuk mencapai umur x,maka didapatkan :

$$l_x = l_o.s(x) \text{ atau } s(x) = \frac{l_x}{l_o} \qquad (1.17)$$

Apabila $_nd_x$ adalah jumlah orang yang akan meninggal diantara usia x dan x+n dan probabilitas kematian diantara usia x dan x+n dari suatu kelahiran baru adalah s(x)-s(x+n) maka

$$_nd_x = l_o\,(s(x) - s(x+n))$$
$$= l_x - l_{x+n} \qquad (1.18)$$

Hal lain yang diperlukan dalam membangun suatu tabel kehidupan adalah harapan hidup yang terdiri dari 2 macam ,yaitu:

1.harapan hidup ringkas dengan notasi e_x

2.harapan hidup lengkap dengan notasi $\overset{o}{e}_x$

Harapan hidup ringkas adalah rata-rata jumlah tahun lengkap yang akan dialami seseorang yang sekarang berusia x tahun.Tahun lengkap adalah tahun yang penuh dialami. Misalkan seseorang meninggal pada usia 3 bulan setelah ulang tahunnya yang ke 30 tahun,maka dalam penghitungan harapan hidup,umurnya dihitung 30 bukan 30,25 tahun.Jika l_x adalah jumlah orang yang tepat berusia x tahun maka l_{x+1} orang diantaranya akan hidup pada hari ulangtahunnya yang ke x+1,dan l_{x+2} dari padanya akan masih hidup pada ulang tahunnya yang ke x+2 tahun dan begitu seterusnya sampai tinggal l_v orang yang masih dapat merayakan ulang tahunnya terakhir.Maka jumlah tahun yang akan dialami oleh l_x orang sampai semuanya meninggal (hanya dihitung tahun lengkap) adalah

$$l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_v$$

Berarti setiap orang dari l_x pada rata-ratanya kebagian sebanyak:

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_v}{l_x} \qquad (1.19)$$

Untuk gambaran misalkan l_x orang melakukan lari masal.Dari l_x, l_{x+1} yang mampu menyelesaikan kilo pertama secara lengkap, l_{x+2} yang menyelesaikan kilometer kedua secara lengkap dan seterusnya dan yang sampai ke garis finis hanya l_v orang.Jadi rata-rata panjang jalan yang dilalui seseorang(hanya dihitung bagian kilometer yang penuh ditempuh) adalah

$(l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots + l_v) / l_x$ km

Jika dalam penghitungan e_x diatas,bagian pecahan diperhitungkan ,maka kita dapatkan harapan hidup lengkap dengan simbol $\mathring{e}$ secara tepat adalah:

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^v l_{x+t}\, dt$$

$$= \int_0^v {}_tp_x \, dt \qquad (1.20)$$

Dalam praktek fungsi l_x sulit diketahui.Ada cara lebih sederhana,tetapi hasilnya lebih kasar ,ialah memisalkan bahwa kematian terjadi merata sepanjang tahun.Dalam pelajaran statistika ini namanya menggunakan distribusi uniform Dengan demikian kematian dalam setahun dapat dimisalkan terjadi pada pertengahan tahun .Ini berarti secara aproksimasi:

$$\mathring{e}_x = e_x + 0,5$$

Persamaan ini sekali lagi hanyalah hampiran karena kematian tidaklah terjadi sepanjang tahun .Karena sesungguhnya tidak kita ketahui, tetapi dapat dihampiri secara memuaskan .

2.1.2.2.Contoh Tabel Kehidupan

Sebagai contoh akan diambil tabel mortalitas (CSO 1941) yang berasal dari AAmerika Serikat.Sampai saat ini perusahaan Asuransi di Indonesia belum memiliki tabel yang berdasarkan pengalaman sendiri,dikarenakan tidak tersedinya data yang cukup baik keadaanya.Benerapa perusahaan asuransi dui Indonesia masih memakai tabel CSO ini.Tabel berdasarkan pengalaman asuransi jiwa di AS selama jangka waktu 1930-1940.Tetapi tidak berarti peluang meninggal dalam tabel itu betul-betul menggambarkan pengalaman pemegang polis dalam waktu itu di AS.Keadaan sesungguhnya sedikit lebih baik ,yaitu peluang meninggal yang sebenarnya dialami sedikit lebih rendah dari pada tertera di tabel CSO itu.

Pada tabel CSO ini di kolom pertama menyatakan usia yang dicapai.lx adalah jumlah orang yang tepat berusia x tahun ,dx jumlah orang yang meninggal setahun antara usia x dan x+1 tahun ,1000 q_x menyatakan peluang seseorang berusia x akan meninggal sebelum usia x+1 dikalikan 1000 (agar bilangan tidak terlalu banya dibelakang koma), dan terakhir $\overset{o}{e}_x$ adalah harapan hidup pada usia x.

contoh

bahwa :

l_0 = 1.023.102 orang ; l_8 = 976.124 orang

w = 99 tahun ; d_{23} = 2.531 orang ;

q_{15} = 2,15/1000 = 0,00215 ; $\overset{o}{e}_{34}$ = 34,29 tahun

Bagian terpenting suatu tabel mortalitas ialah lajur q_x .Bilangan pada lajur ini ditaksir dari data yang dikumpulkan oleh perusahaan asuransi jiwa. Kemudian l_0 dipilih agak sembarang dan disebut radix. Biasanya l_0 dipilih sebesar 100.000 orang. Pada tabel contoh (CSO 1941) disini , l_0 dipilih sebesar 1.000.000 kemudian l_1 dihitung dengan menggunakan hubungan

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

Lalu hitunglah harapan hidup $\overset{o}{e}_x$, kita ambil contoh cara menghitung $\overset{o}{e}_{95}$ menurut tabel itu. (Secara aproksimasi)

Jawab :

Dari tabel kita dapat baca bahwa l_{95}= 3011, l_{96}= 1818 l_{97}= 1005, l_{98}= 454 dan l_{99}= 125

sehingga,

$$e_{95} = \frac{1818 + 1005 + 454 + 125}{3011}$$

$$= \frac{3402}{3011}$$

$$= 1.13 \text{ tahun}$$

Jadi $\overset{o}{e}_{95} = 1,13 + 0,5 = 1,63$

kalau kita perhatikan hasil ini sama dengan yang tertera pada tabel.

2.2 ASURANSI JIWA

Tujuan pokok dari Asuransi adalah perlindungan terhadap ahli waris dari seseorang yang diasuransikan,perlindungan itu berupa pemberian ataupembayaran santunan.Pada umumnya pembayaran santunanatau klaim itu dilaksanakan segera setelah kematian terjadi.Akan tetapi untuk menjadikan perhitungan lebih sederhana disini hanya akan dibicarakan pembayaran yang akan dilaksanakan pada akhir tahun polis.Adapun satu tahun polis adalah perhitungan waktu satu tahun mulai saat tanggal pengeluaran polis sampai tanggal yang sama tahun berikutnya.Premi yang ditinjau disinipun berupa premi netto bukannya gross premi.Premi netto adalah premi yang dihitung tanpa memperhatikan faktor biaya.Sedangkan premi sesungguhnya(grosspremi) sedikit lebih tinggi dari preminetto.

2.2.1. Asuransi Selama Hidup (Whole Life Insurance)

Asuransi Selama Hidup adalah suatu asuransi yang menjanjikan pemberian santunan pada akhir tahun polis, tahun dimana orang yang diasuransikan meninggal kapanpun dimasa mendatang.

Apabila A_x adalah Premi Tunggal Netto untuk membeli polis pertanggungan (asuransi) selama hidup misal sebesar \$ 1, maka A_x adalah biaya yang harus dikeluarkan tertanggung untuk suatu polis sebesar \$ 1, itu dan \$ 1 inilah yang akan dibayarkan kepada ahli waris pada akhir tahun polis, tahun dimana si tertanggung meninggal dunia.

Misalkan ada l_x orang yang berusia x tahun yang membeli polis asuransi jiwa selama hidup sebesar \$ 1.Maka pihak perusahaan asuransi akan menerima uang sejumlah ($l_x . A_x$) dollar. Yaitu berasal dari jumlah peserta dikalikan dengan biaya yang dikeluarkan tiap peserta yaitu sebesar A_x.Dan untuk memenuhi tuntutan kematian yang harus dibayarkan tiap akhir tahun polis secara berturut-turut yaitu masing-masing sebesar d_x , d_{x+1} , d_{x+2},... Dimana d_{x+1} seperti diketahui adalah jumlah orang yang meninggal pada usia antara x+1 dan x+2 tahun dan seterusnya. Sehingga untuk mendapatkan nilai sekarang atau nilai kontan dari seluruh tuntutan tersebut harus sama dengan jumlah uang yang diterima oleh perusahaan asuransi adalah dengan cara

$$l_x . A_x = v\, d + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \qquad \text{(sampai akhir tabel)}$$

dimana v adalah faktor diskonto dengan $v = (1+1)^{-1}$

$$\text{jadi } l_x \cdot A_x = \sum_{k=0}^{\sim} v^{k+1} d_{x+k}$$

Rumus (1.21) tak lain dari rumus untuk menemukan nilai sekarang dari nilai akhir yang disebut mendiskonto, yaitu

$P = S\ (1+i)^{-n}$, dimana P adalah niali sekarang

S adalah nilai akhir

i suku bunga periode konversi

n banyaknya periode bunga atau konversi seluruhnya

Apabila (1.21) ditulis dalam lambang komutasi, pertama harus diingat dahulu definisi komutasi yaitu :

$$D_x = v^x\ l_x$$

$$C_x = v^{x+1} d_x$$

$$M_x = \sum_{k=0}^{\sim} C_{x+k}$$

sekarang apabila (1.21) dikalikan v^x, didapatkan

$$v^x \cdot l_x \cdot A_x = \sum_{k=0}^{\sim} v^{x+k+1} d_{x+k}$$

$$A_x = \frac{\sum_{k=0}^{\sim} v^{x+k+1} d_{x+k}}{v^x\ l_x} = \frac{\sum_{k=0}^{\sim} C_{x+k}}{D_x}$$

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \qquad (1.22)$$

Apabila polis syang dibeli bukan \$ 1 tetapi \$s , maka (1.23) menjadi

$$A_x = s\ \frac{M_x}{M_x}$$

2.2.2. Asuransi Waktu (Term Insurance)

Asuransi waktu atau juga dalam istilahnya n-year term life insurance adalah suatu bentuk asuransi yang akan memberikan santunan kepada ahli waris hanya apabila tertanggung atau orang yang diasuransikan meninggal dalam waktu yang telah ditentukan yaitu n tahun.

Analog dengan asuransi selama hidup, maka apabila $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ adalah premi tunggal netto untuk pembelian polis asuransi waktu n tahun sebesar \$1, maka nilai kontan atau nilai sekarang dari seluruh tuntutan untuk lx orang yang memberi polis adalah

$$lx.\ A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ dx+k \qquad .(1.24)$$

Atau kalau diubah ke dalam bentuk komutasi adalah sebagai berikut :

$$lx.\ A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ dx+k$$

persamaan diatas dikalikan v^{x} didapatkan

$$v^{x}\ lx.\ A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{x+k+1}\ dx+k$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} v^{x+k+1}\ dx+k}{v^{x}\ lx}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} C_{x+k}}{Dx}$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{Mx - Mx+n}{Dx} \qquad (1.25)$$

Apabila polis seharga \$s maka nilai sekarangnya

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = s \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

2.2.3 Asuransi Endowment

Adalah suatu bentuk asuransi gabungan antara Term Insurance dan Endowment Murni.Pada Endowment Murni,perusahaan akan membayar si tertanggung apabila ia masih hidup pada akhir jangka waktu yang telah ditentukan. Dengan demikian Asuransi Endowment adalah suatu bentuk Asuransi yang akan memberikan santunan kepada pihak ahli waris apabila tertanggung meninggal dalam masa yang ditentukan dan akan menmberikan sejumlah yang sama kepada tertanggung apabila ia masih hidup pada akhir waktu yang ditentukan itu.

Sebelumnya kita bicarakan lebih dahulu tentang Endowment Murni. Dikatakan tadi bahwa Endowment Murni, pihak perusahaan asuransi akan memberikan uang kepada tertanggung apabila ia berhasil mencapai usia x+n yaitu batas akhir masa yang ditentukan yaitu n tahun.Apabila ${}_nE_x$ adalah biaya netto yang dikeluarkan seorang untuk membeli polis sebesar $1, maka perusahaan asuransi akan mengumpulkan uang sejumlah

$$l_x \,.\, {}_nE_x$$

Apabila uang sebanyak itu ditanamkan dan berkembang dalam n tahun dengan bunga efektif i maka uang sebanyak $l_x . {}_nE_x$ akan menjadi

$$(l_x \,.\, {}_nE_x)(1 + i)^n$$

Apabila dari l_x orang yang bertahan dan mencapai usia x+n berjumlah l_{x+n} orang maka masing-masing akan menerima uang sejumlah \$1 yang didapat dari persamaan :

$$l_{x+n} = l_x \ . \ {}_nE_x \quad (1+i)^n$$

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x\,(1+i)^n} = \frac{l_{x+n} \quad (1+i)^{-n}}{l_x}$$

Karena $(1+i)^{-1}$ dinyatakan sebagai v, maka

$$(1+i)^{-n} = v^n$$

sehingga

$${}_nE_x = \frac{v^n \quad l_{x+n}}{l_x} \qquad (1.26)$$

$$= v^n \frac{l_{x+n}}{l_o} \cdot \frac{l_o}{l_x}$$

$$= v^n \frac{s(x+n)}{s(x)}$$

$$= v^n \quad {}_np_x \qquad (1.27)$$

Apabila (1.26) akan diubah dalam bentuk komutasi, perlu diingat bahwa $D_x = v^x \ l_x$ maka apabila pembilang dan penyebut dari (1.26) ruas kanan dikalikan dengan v^x , didapatkan

$${}_nE_x = \frac{v^{x+n} \quad l_{x+n}}{v^x \quad l_x}$$

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \qquad (1.28)$$

Apabila polis yang dibeli bukan seharga \$1, tetapi \$s maka nilai kontan atau premi tunggal netto akan menjadi

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ 1} = s \quad {}_nE_x \qquad (1.29)$$

Setelah kita mengetahui tentang Pure Endowment, maka kita kembali ke Asuransi Endowment,yang merupakan gabungan antara asuransi Waktu dan Endowment Murni.

Apabila $A_{x:\overline{n}|}$ adalah lambang yang dipakai untuk menyatakan premi tunggal netto dari Asuransi Endowment, maka jelas :

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \qquad (1.30)$$

Bila dinyatakan dengan lambang komutasi didapatkan

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \qquad (1.31)$$

Perlu diingat bahwa (2.10) adalah nilai sekarang atau premi tunggal netto untuk pembelian pois sebesar \$1.Maka apabila polis tersebut seharga \$s maka nilai sekarang tersebut menjadi

$$\text{Premi Tunggal Netto} = A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_x}{D_x}$$

Dalam prakteknya asuransi Endowment biasa disebut Asuransi Dwi Guna.

2.3. ANNUITAS JIWA

Annuitas adalah suatu rangkaian pembayaran. Pada kenyataannya banyak pembayaran tidak dikerjakan sekaligus secara tunai. Misalkan dalam pembelian rumah, pembayaran dicicil selama beberapa tahun. Cara pembayaran seperti ini disebut annuitas. Demikian juga dalam asuransi. pembelian suatu polis asuransi tidak banyak dibeli dengan premi tunggal atau tunai sekaligus.

Sedangkan Annuitas Jiwa adalah suatu annuitas yang dikaitkan dengan hidup mati seseorang. Misalkan suatu pemberian uang pensiun akan diberhentikan apabila bekas karyawan tersebut meninggal dunia.

2.3.1. Berbagai Macam Annuitas Hidup (Annuitas Jiwa)

Ada berbagai macam anuitas hidup yang masing-masing dibedakan atas waktu pembayarannya. Ada yang dilakukan pada permulaan atau juga akhir tahun, dan ada yang pembayarannya ditunda selama jangka waktu tertentu.

a. Annuitas Selama Hidup

Adalah suatu rangkaian pembayaran yang berlangsung selama seseorang masih hidup. Anuitas ini terdiri dari dua macam, yaitu Anuitas akhir selama hidup dan Anuitas awal selama hidup. Anuitas akhir selama hidup adalah suatu rangkaian pembayaran sebesar 1 yang dilakukan tiap akhir tahun, sedangkan Anuitas awal selama hidup adalah serangkaian pembayaran sebesar 1 yang dilakukan pada awal tiap tahun. Nilai tunai anuitas akhir selama hidup ditulis dengan simbol a_x , dan $\ddot{a}_x$ untuk nilai tunai anuitas awal selama hidup. Huruf x pada bagian bawah simbol menyatakan usia sekarang orang yang padanya anuitas itu dikaitkan. Dilihat dari waktu pembayaran jelas bahwa anuitas awal dan akhir hanya berselisih 1, yaitu pada awal tahun pertama.

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x \tag{1.32}$$

b. Annuitas Sementara

Pada anuitas ini pembayaran tidak dilakukan .

sepanjang umur (x) tetapi paling lama misalkan selama n tahun, dengan syarat orang itu masih hidup. Nilai tunai suatu annuitas akhir selama n tahun mempunyai simbol $a_{x:\overline{n}|}$, sedangkan untuk annuitas awal ditulis $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Jika (x) meninggal sebelum mencapai n kali pembayaran maka pembayaran tidak diteruskan. Jika besarnya tiap pembayaran adalah 1, Jelas terlihat

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n}|} \qquad (1.33)$$

1	1	1	...	1	<-------annuitas awal	
	1	1	...	1	1 annuitas akhir	
x	x+1	x+2		x+n-1	x+n	

c. Anuitas Ditunda

Adalah Anuitas yang ditunda pembayarannya selama beberapa tahun misalkan m tahun, sedangkan pembayarannya dapat berlangsung selama hidup atau hanya dalam jangka waktu tertentu (sementara). Annuitas ini mempunyai simbol nilai tunai $_{m|}a_x$, yaitu nilai tunai suatu anuitas akhir bagi seseorang berusia x, ditunda selama m tahun dan akan menerima pembayaran pertama pada usia x+m, setelah itu akan menerima pembayaran selama seumur hidup. Untuk anuitas awalnya diberikan simbol, $_{m|}\ddot{a}_x$.

Apabila Anuitas Ditunda tersebut tidak diberikan selama hidup, akan tetapi hanya sementara misalkan n tahun, maka nilai tunainya mempunyai simbol $_{m|n}a_x$, untuk anuitas akhir dan $_{m|n}\ddot{a}_x$ untuk anuitas awalnya. Analog dengan yang terdahulu, terlihat bahwa

$$_{m+1|}\ddot{a}_x = {}_{m|}a_x \text{ dan}$$

$$_{m+1|n}\ddot{a}_x = {}_{m|n}a_x \qquad (1.34)$$

2.3.2. Anuitas Selama Hidup

Sekarang pandang l_x , yaitu sekelompok orang yang tepat berusia x (disebut kohort). Dimisalkan setiap orang dari l_x itu sekarang membayar sejumlah A rupiah kedalam suatu dana sedimikian rupa sehingga setiap orang yang mencapai umur x+1 menerima 1 rupiah dari dana yang terkumpul itu, dan setiap orang yang mencapai usia x+2 akan memperoleh lagi 1 rupiah dari dana tersebut, begitu seterusnya sampai setiap orang dari l_x meninggal semuanya. Yang menjadi pertanyaan sekarang adalah berapakah besarnya A itu, yang tidak lain adalah nilai tunggal atau premi tunggal. A dipakai sebagai simbol untuk a , Apabila sebanyak l_x orang menyetor uang sebanyak Rp A tiap orangnya, maka jumlah dana yang terkumpul adalah $A.l_x$. Pada permulaan tahun berikutnya ada sejumlah l_{x+1} orang yang masih hidup dari l_x sekarang, dan tiap orang dari mereka mendapat Rp 1. Jadi besarnya uang yang harus dikeluarkan dari dana yang terkumpul tadi adalah l_{x+1} .1 rupiah. Dua tahun kemudian ada sejumlah l_{x+2} orang yang masih bertahan hidup dan uang yang harus dibayarkan pada mereka dari dan sebanyak l_{x+2} rupiah dan seterusnya, maka

$$A.l_x = v.l_{x+1} + v^2.l_{x+2} + v^3.l_{x+3} + \quad + v^{w-x}.l_w$$

$$A = \frac{v.l_{x+1} + v^2.l_{x+2} + v^3.l_{x+3} + \ldots + v^{w-x}.l_w}{l_x}$$

berusia x selama jangka waktu n tahun. Apabila orang tersebut mencapai umur x+n maka ia akan menerima sebesar 1 diakhir tahun ke x+n. Nilai tunai dari 1 sekarang adalah $1.v^n$. Peluang dibayarkannya adalah $_np_x$, yang tak lain adalah peluang (x) untuk mencapai umur x+n, sehingga

$$
\begin{aligned}
{}_nE_x &= v^n \cdot {}_np_x \\
&= v^n \, l_{x+n} / l_x \\
&= v^{x+n} \, l_{x+n} / v^x \, l_x \\
&= D_{x+n} / D_x \qquad (1.37)
\end{aligned}
$$

Kalau kita perhatikan, $_nE_x$ adalah suatu anuitas awal yang ditunda selama n tahun dan pembayarannya cuma sekali sebesar 1. Demikian juga kalau kita pandang pada anuitas sementara $a_{\overline{x:n}|}$ ternyata dapat dipandang sebagai gabungan dari serangkaian endowment murni

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{x:n}|} &= {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots + {}_nE_x \\
&= \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots + \frac{D_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n}}{D_x} \\
&= (N_{x+1} - N_{x+n+1}) / D_x \qquad (1.38)
\end{aligned}
$$

Dari (1.33) dan (1.38) didapatkan

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{x:n}|} = 1 + a_{\overline{x:n-1}|} &= 1 + \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{D_x + N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad (1.39)
\end{aligned}
$$

Untuk mencari nilai tunai Anuitas Ditunda, kita bisa memakai rumus $_{n|}a = a_x - a_{\overline{x:n}|}$ Rumus diatas dapat diterangkan dengan gambar

$_{n|}a_x \rightarrow$ 1 1

$a_{\overline{x:n|}} \rightarrow$ 1 1 ... 1

x+n x+n+1 x+n+2

$a_x \rightarrow$ 1 1 ... 1 1 1

x x+1 x+n x+n+1 x+n+2

Setelah terbukti, kita teruskan mencari nilai tunai suatu Anuitas Ditunda yaitu

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}a_x &= a_x - a_{\overline{x:n|}} \\
&= \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (1.40)
\end{aligned}
$$

Analog dengan cara diatas didapatkan

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}\ddot{a}_x &= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{\overline{x:n|}} \\
&= \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+n}}{D_x} \qquad (1.41)
\end{aligned}
$$

Untuk ${}_{m|n}a_x$, kita dapat memandang Anuitas Akhir Ditunda Sementara ini sebagai himpunan Endowment murni, yakni

$$
\begin{aligned}
{}_{m|n}a_x &= {}_{m+1}E_x + {}_{m+2}E_x + \ldots + {}_{m+n}E_x \\
&= \frac{D_{x+m+1}}{D_x} + \frac{D_{x+m+2}}{D_x} + \ldots + \frac{D_{x+m+n}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x} \qquad (1.42)
\end{aligned}
$$

Dari (1.34) dan (1.42) didapatkan

$$ {}_{m|n}\ddot{a}_x = {}_{m-1|n}\ddot{a}_x $$

$$= \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$