BAB II

KONSEP DASAR TENTANG MATRIK

2.1. OPERASI BLOK

Operasi ini sering dipakai dalam teori dan kerja komputer untuk memisahkan suatu matrik di dalam sub-sub matrik.

Dapat dikerjakan dalam banyak cara, seperti dalam contoh di bawah ini !

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hdashline 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:c:c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hdashline 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right]$$

masing-masing sub matrik atau blok dapat ditandai oleh sub scripts, dan dapat diperlihatkan matrik asal dengan sub matrik atau blok-blok untuk elemen-elemennya.

Bentuk umum dari matrik yang dipisahkan adalah :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \text{------} & A_{A1l} \\ \vdots & & & \\ A_{k1} & A_{k2} & \text{------} & A_{Akl} \end{bmatrix}$$

Ini berarti bahwa banyaknya baris dalam setiap A_{ij} harus sama untuk setiap i dan banyaknya kolom harus sama untuk setiap j.

Ukuran dari A_{ij} adalah $m_i \times n_j$ untuk bilangan bulat m_i dan n_j. Dapat ditulis dalam bentuk :

No kolom   No dari baris

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \; \cdots\cdots & m_l \\ \hline A_{11} & A_{12} \; \cdots\cdots & A_{1l} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{kl} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{array}$$

Matrik bujur sangkar order n biasanya dipisahkan secara simetris. Untuk $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$, dengan $n_i \geq 1$, Pemisahan A adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \text{------} & A_{1r} \\ \vdots & & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \text{------} & A_{rr} \end{bmatrix}$$

Dimana ukuran $A_{ij} = n_i \times n_j$

Blok-blok dari diagonal A_{ij} adalah matrik-matrik bujur sangkar order n_i

Contoh :

$$\begin{array}{cc|c|ccc} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \end{array} \qquad \begin{array}{l} n = 6 \\ n_1 = 2 \\ n_2 = 1 \\ n_3 = 3 \end{array}$$

Adalah pemisahan secara simetris dari matrik 6 x 6

Matrik bujur sangkar bisanya dibangun atau merupakan campuran dari blok-blok bujur sangkar yang semuanya ukurannya sama.

Contoh :

$$
\left.\begin{array}{ccc|ccc}
x & x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x & x \\
\hline
x & x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x & x
\end{array}\right.
$$

Jika matrik bujur sangkar A order nk disusun dari sub matrik bujur sangkar n x n semuanya order k, itu adalah batas suatu matrik (n,k).

Sehingga matrik di atas adalah matrik (2,3).

Yang dipakai dalam contoh di atas adalah kondisi pada blok-blok, operasi-operasi dari perkalian skalar, transpose. konjugasi. penjumlahan. dan pergandaan.

Ini berarti :

$$
c\begin{pmatrix} A_{11} & \text{------} & A_{1l} \\ \vdots & & \\ A_{k1} & \text{-----} & A_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,A_{11} & \text{---} & c\,A_{1l} \\ \vdots & & \\ c\,A_{k1} & \text{---} & c\,A_{kl} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} A_{11} & \text{------} & A_{1l} \\ \vdots & & \\ A_{k1} & \text{------} & A_{kl} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} A_{11}^{T} & \text{---} & A_{k1}^{T} \\ \vdots & & \\ A_{1l}^{T} & \text{---} & A_{kl}^{T} \end{pmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1l} \\ \vdots & & \\ A_{k1} & \cdots & A_{kl} \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} A_{11}^{*} & \cdots & A_{k1}^{*} \\ \vdots & & \\ A_{1l}^{*} & \cdots & A_{kl}^{*} \end{bmatrix}$$

Disini T menunjukkan transpose, dan * konjeget transpose.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1l} \\ \vdots & & \\ A_{k1} & \cdots & A_{kl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1l} \\ \vdots & & \\ B_{k1} & \cdots & B_{kl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1l} + B_{1l} \\ \vdots & & \\ A_{k1} + B_{k1} & \cdots & A_{kl} + B_{kl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1l} \\ \vdots & & \\ A_{k1} & \cdots & A_{kl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \\ B_{l1} & \cdots & B_{ln} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \\ C_{k1} & \cdots & C_{kn} \end{bmatrix}$$

dimana $C_{ij} = \sum_{r=1}^{l} A_{ir} \; B_{rj}$

Dalam penjumlahan di atas, setiap A_{ij} ukurannya berkoresponden dengan B_{ij}.

Dalam pergandaan diatas ukuran dari A_{ij} oleh $\alpha_i \times \beta_j$ dan ukuran dari B_{ij} oleh $\gamma_i \times \delta_j$.

Kemudian jika $\beta_r = \gamma_r$ untuk $1 \leq r \leq e$, perkalian $A_{ir} \; B_{rj}$ dapat dibentuk dan dihasilkan matrik $\alpha_i \times \beta_j$, tidak tergantung dari r.

Penjumlahan dapat didapatkan seperti ditunjukkan diatas dan C_{ij} adalahj matrik-matrik $\alpha_i \times \beta_j$ dan bersama-sama disusun suatu pemisahan sebagai catatan bahwa aturan untuk membentuk blok C_{ij} dari perkalian matrik adalah sama disusun suatu pemisahan sebagai catatan bahwa aturan untuk membentuk blok C_{ij} dari perkalian matrik adalah sama seperti pada A_{ij} dan B_{ij} adalah jumlahnya tunggal.

Contoh :

Juka A dan B adalah matrik n x n dan jika :

$$C = \begin{bmatrix} A & B \\ B & -A \end{bmatrix} \quad \text{maka :}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} A^2 + B^2 , & AB - BA \\ BA - AB , & A^2 + B^2 \end{bmatrix}$$

2.2. PENJUMLAHAN SECARA LANGSUNG.

(DIRECT SUMS)

Untuk $i = 1, 2, \ldots, k,$ diambil (A_k adalah matrik bujur sangkar order n_i)

Blok diagonal dari matrik bujur sangkar adalah :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & A_k \end{bmatrix} = \text{diagnonal } (A_1 . A_2 , \ \ldots \ , A_k)$$

Dari order $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ dinamakan pedoman penjumlahan dari A_k dan ditunjukkan oleh :

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots . \oplus A_k = \bigoplus_{D=1}^{k} A_i$$

Identitas-identitas yang ditetapkan adalah :

1. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
2. $(A + B) \oplus (C + D) = (A \oplus B) + (C \oplus D)$
3. $(A \oplus B)^T = A^T \oplus B^T$
4. $(A \oplus B)(C \oplus D) = AC \oplus BD$
5. $(A \oplus B)^* = A^* \oplus B^*$
6. $(A \oplus B)^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$
7. $\det (A \oplus B) = (\det A)(\det B)$
8. $\operatorname{tr} (A \oplus B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$
9. Jika ρA menunjukkan karakteristik polynomial dari A, maka $\rho A \oplus B (\lambda) = (\rho A (\lambda))(\rho B (\lambda))$
10. Jika $\lambda (A \oplus B) = (\lambda A, \lambda B)$

    λA menunjukkan himpunan eigen value dari A

2.3. PERKALIAN MENURUT KRONECKER

Diberikan A dan B berturut-turut adalah m x n dan p x q; maka perkalian secara kronecker (kronecker product) adalah matrik mp x nq didefinisikan oleh :

1. $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha (A \otimes B)$; α skalar
2. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
4. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$
5. $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$
6. $\overline{A \otimes B} = \bar{A} \otimes \bar{B}$
7. $(A \otimes B) = A^T \otimes B^T$; $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$
8. $r (A \otimes B) = r (A)\, r (B)$

Diasumsikan bahwa A dan B adalah matrik bujur sangkar berorder m dan n, maka =

9. $\mathrm{tr}\,(A \otimes B) = (\mathrm{tr}\,(A))\,(\mathrm{tr}\,(B))$

10. Jika A dan B non singular, begitu juga $A \otimes B$, maka $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$

11. $\det\,(A \otimes B) = (\det A)^{n}\,(\det B)^{m}$

12. Jika permutasi matrik P tergantung pada m,n, maka: $B \otimes A = P^{*}\,(A \otimes B)\,P$

13. Diberikan $\emptyset\,(x,y)$ menunjukkan polynomial

$$\emptyset\,(x,y) = \sum_{j,k=0}^{p} a_{jk}\, x^{j}\, y^{k}$$

Diberikan $\emptyset(A;B)$ menunjukkan matrik mn x mn, maka:

$$\sum_{j,k=0}^{p} a_{j,k}\, A^{j} \otimes B^{k}$$

Kemudian, eigenvalue dari (A;B) adalah :

$\emptyset\,(\lambda_r,\mu_s)$, $r = 1,2, \ldots ,m.$

$s = 1,2, \ldots ,n.$

dimana λ_r dan μ_s berturut-turut adalah eigenvalve dari A dan B.

Dalam hal yang khusus, eigenvalue dari $A \otimes B$ adalah $\lambda_r\,\mu_s$, $r = 1,2, \ldots ,m$

$s = 1,2, \ldots ,n$

2.4. MATRIK PERMUTASI

Oleh permutasi σ, himpunan N = {1,2, ... ,n} berarti adalah pemetaan satu-satu dari N untuk dirinya sendiri. Permutasi identitas meliputi n! Yang tidak sama dengan permutasi dari N. Dapat ditunjukkan dalam suatu permutasi yang istimewa oleh :

$$\sigma(1) = i_1$$

$$(2.4.1)\quad \sigma(2) = i_2$$

$$\vdots$$

$$\sigma(n) = i_n$$

Yang dapat ditulis sebagai :

$$(2.4.1')\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

Invers permutasi ditunjukkan oleh σ^{-1} sehingga

$$\sigma^{-1}(i_k) = k$$

diberikan vektor n komponen yang mempunyai 1 dalam posisi kolom ke j dan o berada dalam :

$$(2.4.2)\quad E_j = (0,\ldots,0,1,\ldots,0)$$

Oleh matrik permutasi order n diartikan suatu matrik dengan bentuk :

$$(2.4.3)\quad P = P_\sigma \begin{bmatrix} E_{i1} \\ E_{i2} \\ E_{i3} \end{bmatrix}$$

yang mempunyai :

(2.4.4) $P = (a_{ij})$, dimana A_i, $\sigma(i) = 1$

$i = 1,2,\ldots,n$

$a_{i,j} = 0$

Dalam baris ke $\sigma^{-1}(j)$ dan 0 ditempat lain.

Sehingga masing-masing baris dan masing-masing kolom dari P, yang tepat mempunyai 1 di dalamnya.

Contoh :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga :

$$(2.4.5) \quad P_\sigma \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$$

Sedangkan jika $A = (a_{i,j})$ adalah matrik n x r, maka

(2.4.6) $P_\sigma A = (a_{\sigma(1),j})$, yang mana $P_\sigma A$ adalah A dengan baris-baris permutasinya oleh σ.Lebih dari itu :

(2.4.7) $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\, P_\sigma = (x_{\sigma^{-1}(1)},x_{\sigma^{-1}(2)},\ldots,x_{\sigma^{-1}(n)})$

sehingga jika $A = (a_{ij})$ adalah r x n, maka :

(2.4.8) $A\, P_\sigma = (a_{i,\sigma^{-1}(j)})$

$A\, P_\sigma$ adalah A dengan permutasi kolom-kolomnya oleh σ^{-1}, dengan catatan bahwa :

(2.4.9) $P_\sigma\, P_\tau = P_{\sigma\, \tau^{1}}$

dimana perkalian dari permutasi σ, τ dipergunakan dari kiri ke kanan.

Lebih dari pada itu :

(2.4.10) $(P_\sigma)^* = P_{\sigma^{-1}}$; dimana :

(2.4.11) $(P_\sigma)^* = P_\sigma = P_{\sigma^{-1}} P_\sigma = P_I = I$, dan

(2.4.12) $(P_\sigma)^* = P_{\sigma^{-1}} (P_\sigma)^{-1}$

Matrik-matrik permutasi adalah merupakan suatu kesatuan membentuk suatu subgrup dari suatu kesatuan grup.

Dari (2.4.6), (2.4.8) dan (2.4.12), maka jika A adalah n x n, maka :

(2.4.13) $P_\sigma A P^*_{\alpha\sigma} = (a_{\sigma(1),\ \sigma(j)})$,

Sehingga kesamaan transformasi $P_\sigma A\ P^*_\sigma$ disebabkan oleh suatu perhitungan yang tetap dari baris-baris dan kolom-kolom dari A oleh permutasi σ.

Diantara matrik-matrik permutasi, maka matrik :

$$(2.4.14).\ \pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & --- & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan aturan dasar teori dari sirkulan, korespondensi ini pada permutasi *forward shift*, maka:

$\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3, \ldots, \sigma(n-1) = n,\ \sigma(n) = 1$

sedangkan untuk periode $\sigma = (1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$ menghasilkan grup siklik order n, dengan :

$$(2.4.15).\ \pi^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & --- & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

berkorespondensi pada r^2 untuk $r^2(1) = 3$, $r^2(2) = 4$, ... $r^2(n) = 2$, demikian pula untuk π^k dan σ^k.

Matrik π^n berkorespondensi pada $\sigma^n = I$, sehingga

(2.4.16) $\quad \pi^n = I$:

Dengan catatan bahwa :

(2.4.17) $\quad \pi^T = \pi^* = \pi^{-1} = \pi^{n-1}$

Dalam hal yang istimewa, misalnya dari (2.4.13), adalah :

(2.4.18) $\quad \pi\ A\ \pi^T = (a_{i+1,j+1})$, dimana $A\ (a_{ij})$

Sebagai pemisalan yang kedua, diberikan = $L = (\lambda_1, \lambda_2, \ \ldots\ , \lambda_n)^T$. Kemudian untuk beberapa matrik permutasi $P_{\sigma^{1}}$, maka :

(2.4.19) $\quad P_\sigma(\text{diag } L)\ P_\sigma^* = \text{diag } (P_\sigma L)$

Matrik permutasi kedua yang penting adalah :

$$(2.4.20).\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Korespondensi dari permutasi =

$\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = n$, $\sigma(3) = n - 1$, ..., $\sigma(j) = n - j + 2$, ..., $\sigma(n) = 2$

Ditunjukkan sebagai suatu perkalian dari periode, σ = (1), (2,n), (3, n − 1), ..., (n − 2) ;

Dengan mengikuti $\sigma^2 = I$, maka :

(2.4.21) $\Gamma^2 = I$

Demikian juga :

(2.4.22) $\Gamma^* = \Gamma^T = \text{diag } (\Gamma L)$

Akhirnya dengan counter identitas k, kita mempunyai counter diagonal yang penting dan dilain tempat. 0 berada dalam :

$$(2.4.23)\quad k = k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dimana $k = k^{*}$, $k^{2} = I$, $k = k^{-1}$

Diberikan $p = p_{\sigma}$ menunjukkan suatu matrik permutasi n x n. Sekarang σ menjadi faktor dalam suatu perkalian dari periode yang terpisah.

Faktorisasi ini adalah tunggal pada permulaan faktor. Diperkirakan bahwa pada periode dalam perkalian memiliki panjang $P_1, P_2, \dots, P_m$.

$(P_1 + P_2 + \dots + P_m = n)$

Diberikan $\pi_{\rho k}$ yang menunjukkan matrik Π, sehingga (2.4.14) adalah order ρk

Kemudian dengan (2.4.13), maka terdapat suatu matrik permutasi R order n, sehingga :

$$(2.4.24)\quad RPR^{*} = RPR^{-1} = \pi_{P_1} \oplus \pi_{P_2} \oplus \dots \oplus \pi_{P_m}$$

Untuk polynomial karakteristik dari $\pi_{\rho k}$ adalah $(-1)^{pk}\ (\lambda^{pk} - 1)$, dengan mengikuti bahwa polynomial karakteristik dari RPR^{*}, maka P adalah :

$$\Pi_{k=1}^{m}\ (-1)^{pk}\ (\lambda^{pk} - 1)$$

Eigen valve dari matrik permutasi P adalah akar-akar dari kesatuan yang meliputi dalam keseluruhan akar-akar dari persamaan :

$$P_k = 1,\ k = 1,2,\ \ldots,\ m.$$

Contoh :

Diberikan σ permutasi dari 1,2,3,4,5,6,

dengan $\sigma(1) = 5,\quad \sigma(2) = 1,\quad \sigma(3) = 6$

$\sigma(4) = 4,\quad \sigma(5) = 2,\quad \sigma(6) = 3$

Kemudian σ dapat menjadi faktor dalam periode seperti :

σ (152) (4) (36)

oleh karena itu, $m = 3$ dan $P_1 = 3$, $P_2 = 1$, $P_3 = 2$

matrik P_σ adalah :

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrik R berkorespondensi pada $\tau(1) = 1$, $\tau(5) = 2$, $\tau(2) = 3$, $\tau(4) = 4$, $\tau(3) = 5$, $\tau(6) = 6$, sehingga :

$$RP_\sigma R^* = \left[\begin{array}{ccc|c|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Oleh karena itu eigenvalve dari P_σ adalah akar-akar dari :

$(\lambda^3 - 1)\ (\lambda - 1)\ (\lambda^2 - 1)$