BAB III

TEORI FUNGSI HARMONIK

3.1 Fungsi Harmonik

Definisi :

Suatu fungsi u(x,y) disebut fungsi harmonik pada suatu domain D jika u(x,y) mempunyai turunan parsial kedua yang kontinyu pada D dan memenuhi :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{pada } D$$

Selanjutnya jika D diasumsikan sebagai domain yang terbatas dimana ∂D adalah pembatas D , dan $D + \partial D$ adalah penutup D , maka didalam daerah ini berlaku teorema teorema sebagai berikut :

Teorema 1:

Jika u adalah fungsi yang harmonik pada domain terbatas D_1 ($D_1 \subset D + \partial D$) maka :

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial N} ds = 0$$

dimana $\frac{\partial}{\partial N}$ adalah notasi untuk turunan sepanjang normal dari ∂D, dan arah positif yang digunakan adalah arah yang menuju keluar dari D .

Bukti :

Dari identitas Green yang pertama diketahui bahwa jika u(x,y) dan v(x,y) adalah fungsi fungsi yang kontinyu pada $D + \partial D$, dan masing masing mempunyai turunan parsial kedua yang juga kontinyu

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

pada $D + \partial D$, maka berlaku :

$$\oint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial N} \, ds = \iint_{D} (u \nabla^2 v + u_x v_x + u_y v_y) \, dy \, dx \quad \ldots (3.1)$$

Selanjutnya , jika identitas Green yang pertama ini diaplikasikan pada domain terbatas D_1 , dengan mengambil $u = 1$ dan $v = u$ dimana u adalah fungsi yang harmonik pada D_1 ,maka didapatkan :

$$\oint_{\partial D_1} \frac{\partial u}{\partial N} \, ds = \iint_{D_1} \nabla^2 u \, dy \, dx$$

Dan karena $D_1 \subset D + \partial D$ maka berlaku :

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial N} \, ds = \oint_{\partial D_1} \frac{\partial u}{\partial N} \, ds = 0$$

<u>Teorema 2:</u>

Jika u mempunyai turunan parsial kedua yang kontinyu pada domain D yang terbatas dan jika :

$$\oint_{\partial D_o} \frac{\partial u}{\partial N} \, ds = 0$$

untuk setiap kurva tertutup sederhana ∂D_o , dimana ∂D_o membatasi domain D_o ($D_o \subset D$) , maka u adalah fungsi yang harmonik pada D

Bukti :

Karena $\oint_{\partial D_o} \frac{\partial u}{\partial N} \, ds = \iint_{D_o} \nabla^2 u \, dy \, dx$. Dan karena $\oint_{\partial D_o} \frac{\partial u}{\partial N} \, ds = 0$,

untuk setiap kurva ∂D_o yang membatasi D_o ($D_o \subset D$) maka :

$$\iint_{D_o} \nabla^2 u \, dy \, dx = 0$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

untuk setiap $D_o \subset D$, sehingga u adalah fungsi yang harmonik pada D.

<u>teorema 3:</u>

Jika u adalah fungsi yang harmonik pada suatu bidang lingkaran yang bertitik pusat $u(x_o, y_o)$ dan berjari jari R , dan jika u adalah fungsi yang kontinyu pada $D + \partial D$, maka :

$$u(x_o, y_o) = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} u(x_o + R \cos\theta \ , \ y_o + R \sin\theta \ ) \, d\theta$$

Bukti:

Jika $0 < r < R$, maka :

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial N} \, ds = 0$$

dimana ∂D adalah lingkaran $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$, dan dengan menggunakan koordinat polar, didapatkan :

$$\int_o^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(x_o + r \cos\theta \ , \ y_o + r \sin\theta) \, d\theta = 0$$

sehingga jika $0 < R' < R$, maka berlaku :

$$\int_o^{R'} dr \int_o^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(x_o + r \cos\theta \ , \ y_o + r \sin\theta \ ) \, d\theta = 0 \qquad ...(3.2)$$

Dan karena u adalah fungsi yang kontinyu pada $D + \partial D$,maka bentuk integral (3.2) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\int_o^{2\pi} d\theta \int_o^{R'} \frac{\partial}{\partial r} u(x_o + r \cos\theta \ , \ y_o + r \sin\theta \ ) \, d\theta = 0$$

atau :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\int_0^{2\pi} \left[u(x_o + \acute{R}\cos\theta \ , \ y_o + \acute{R}\sin\theta)\, d\theta \ - u(x_o, y_o) \right] d\theta = 0$$

sehingga :

$$u(x_o, y_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\,(x_o + \acute{R}\cos\theta, y_o + \acute{R}\sin\theta)\, d\theta \qquad \ldots (3.3)$$

untuk setiap $\acute{R} < R$. Karena $u(x_o + \acute{R}\cos\theta, y_o + \acute{R}\sin\theta)$ adalah fungsi yang kontinyu seragam pada $0 \le r \le R$,maka kita dapat mengambil suatu limit sebagaimana $\acute{R} \to R$ $(R \neq 0)$. Sehingga bentuk integral (3.3) dapat kita tulis :

$$u(x_o, y_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{\acute{R} \to R} u\,(x_o + \acute{R}\cos\theta \ , \ y_o + \acute{R}\sin\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\,(x_o + \acute{R}\cos\theta, y_o + \acute{R}\sin\theta)\, d\theta$$

<u>Teorema 4:</u>

Jika u adalah fungsi yang harmonik pada suatu domain D yang terbatas dan u merupakan fungsi yang dapat diturunkan secara terus menerus pada $D + \partial D$,maka u memenuhi sifat sedemikian sehingga jika $u = 0$ pada setiap titik dari ∂D maka secara identik $u = 0$ pada D .Dan jika $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ pada ∂D maka pada D ,u adalah konstan .

<u>Bukti:</u>

Jika pada identitas Green yang pertama diambil $v = u$, dimana u adalah suatu fungsi harmonik pada domain D , maka didapatkan :

$$\oint_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial N}\, ds = \iint_D (u_x^2 + u_y^2)\, dy\, dx \qquad \ldots\ldots (3.4)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dari persamaan (3.4) ini nampak bahwa jika u atau $\frac{\partial u}{\partial N}$ sama dengan nol ,maka integral pada ruas kiri sama dengan nol .Dan karena u_x dan u_y adalah fungsi fungsi yang kontinyu (karena u adalah fungsi harmonik pada D)dan berharga real , maka $u_x = 0$ dan $u_y = 0$ pada semua titik dari D .Sehingga jika u = 0 pada ∂D maka u = 0 pada D dan jika $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ pada ∂D maka pada D , u adalah konstan.

3.2 Penempatan Green

Jika pada identitas Green yang kedua diambil v = ln R dimana $R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$,dengan ξ ,η sebagai parameter .Maka jika ∂D adalah kurva tertutup sederhana yang membatasi D , didapatkan :

$$\oint \left[u(x,y) \frac{\partial}{\partial N} \ln R - \frac{\partial\, u(x,y)}{\partial N} \ln R \right] ds$$

$$= - \iint_D \ln R \, \nabla^2 u(x,y) \, dy \, dx$$

Dan jika variabel x dipertukarkan dengan variabel ξ dan variabel y dipertukarkan dengan variabel η ,dimana notasi $\underline{\Delta}$ dipergunakan untuk operator Laplace dengan (ξ,η) sebagai variabel maka didapatkan :

$$\oint_{\partial D} \left[u(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial N} \ln R - \frac{\partial\, u(\xi,\eta)}{\partial N} \ln R \right] ds$$

$$= -\iint_D \ln R \, \underline{\Delta}\, u(\xi,\eta) \, dy \, dx$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Hal ini benar jika u mempunyai turunan kedua yang kontinyu pada $D + \partial D$, dan titik (x,y) bukan anggota $D + \partial D$.

Jika (x,y) merupakan titik anggota D , maka untuk setiap ε yang cukup kecil ,daerah yang didefinisikan oleh $R \leq \varepsilon$ berada dalam D . Misalkan D_o adalah domain D dimana daerah $R \leq \varepsilon$ telah dihilangkan . Dan misalkan ∂D_o adalah kurva yang didefinisikan oleh $R = \varepsilon$, maka didapatkan :

$$\oint_{\partial D} \left[u \frac{\partial}{\partial N} \ln R - \frac{\partial}{\partial N} \ln R \right] ds + \oint_{\partial D_o} \left[u \frac{\partial}{\partial N} \ln R - \frac{\partial}{\partial N} \ln R \right] ds$$

$$= - \iint_{D_o} \ln R \, \Delta u(\xi, \eta) \, dy \, dx$$

Karena pada ∂D_o ; $\frac{\partial}{\partial N} = - \frac{\partial}{\partial R}$, maka integral dengan batas ∂D_o dapat ditulis :

$$\oint_{\partial D_o} \left[\frac{u}{R} + \frac{\partial u}{\partial R} \ln R \right] ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(x+\varepsilon \cos\theta, y+\varepsilon \sin\theta) + \varepsilon u_\varepsilon (x+\varepsilon \cos\theta , y+\varepsilon \sin\theta) \right] d\theta$$

dimana jika $\varepsilon \to 0$ maka $\oint_{\partial D_o} \left[\frac{u}{R} + \frac{\partial u}{\partial R} \ln R \right] ds \longrightarrow 2\pi \, u(x,y)$

Dan karena u adalah adalah fungsi yang dapat diturunkan secara terus menerus , maka :

$$u(x,y) = - \frac{1}{2\pi} \iint_D \ln R \, \Delta u \, d\xi \, d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} \left[u \frac{\partial}{\partial N} \ln R - \ln R \frac{\partial u}{\partial N} \right] ds$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Selanjutnya ,jika u diambil sebagai fungsi yang harmonik pada D , maka didapatkan :

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} \ln R \frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}} ds - \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} u \frac{\partial}{\partial \mathbf{N}} \ln R \, ds} \quad \ldots . \; (3.5)$$

Dari persamaan (3.5) ini nampak, bahwa jika u merupakan fungsi yang harmonik pada D ,maka u tergantung pada harga $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}}$ dan harga u pada ∂D.

Suatu penempatan yang menyatakan bahwa jika u merupakan fungsi yang harmonik pada D , maka u tergantung pada harga $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}}$ dan harga u pada ∂D diatas disebut sebagai penempatan Green .Yang mana dapat dipakai sebagai pedoman bahwa didalam mencari solusi yang bernilai tunggal dari persamaan differensial $\nabla^2 u = 0$,kita tidak dapat menyatakan u dan $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}}$ secara bebas pada ∂D .

3.3 Hubungan Fungsi Harmonik Dan Fungsi Analitik Pada Suatu Domain

Teorema 5:

Jika f(z) = u + iv adalah fungsi yang analitik pada D , maka u dan v merupakan fungsi yang harmonik pada D .

Bukti:

Jika f(z) = u + iv merupakan fungsi yang analitik pada D maka

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

f(z) memenuhi persamaan Cauchy - Rieman :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{..... (3.6)}$$

dan :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{..... (3.7)}$$

Jika persamaan (3.6) diatas kita turunkan terhadap x ,maka kita dapatkan :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \qquad \text{..... (3.8)}$$

Dan jika pada persamaan (3.7) kita turunkan terhadap y , maka kita dapatkan :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{..... (3.9)}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.9) ini kedalam persamaan (3.8) , maka kita dapatkan :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

atau :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

yang mana telah nampak bahwa u merupakan fungsi yang harmonik pada D . Dan dengan langkah yang sama , jika kita turunkan persamaan (3.6) terhadap y dan persamaan (3.7) terhadap x , maka kita

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dapatkan :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

sehingga v juga merupakan fungsi yang harmonik pada D .

Teorema 6:

jika u adalah suatu fungsi yang harmonik pada suatu domain D yang terbatas , maka u adalah fungsi yang analitik pada D .

Bukti:

Misalkan u_{mn} adalah harga dari $\dfrac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \, \partial y^n}$ pada (x_o, y_o) maka :

$$u(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{mn}}{m!\,n!} (x - x_o)^m (y - y_o)^n$$

adalah bentuk formal dari ekspansi secara deret Taylor dari u , yang mana dapat dibuktikan bahwa deret tersebut adalah deret yang konvergen secara seragam dan konvergen mutlak pada suatu persegi panjang :

$|x-x_o| + |y-y_o| < k$,dimana k adalah suatu konstanta.

Sehingga berlaku bahwa jika suatu fungsi merupakan fungsi yang harmonik pada suatu domain D yang terbatas maka fungsi tersebut merupakan fungsi yang analitik pada D .Dalam hal ini dapat dimisalkan bahwa ∂K adalah lingkaran yang bertitik pusat (x_o, y_o) dan berjari jari a sehingga :

$$\xi = x_o + a \cos \phi \ , \ \eta = y_o + a \sin \phi$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dan pada ∂K berlaku:

$$u = f(\phi) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g(\phi)$$

dimana $u = f(\phi)$ dan $g(\phi)$ merupakan fungsi yang dapat diturunkan secara terus menerus . Dan jika :

$$x = x_o + r \cos \theta \quad , \; y = y_o + r \sin \theta$$

maka didapatkan :

$$\boxed{R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos (\theta - \phi)}$$

Dimana jika dinyatakan sebagai fungsi komplek (fungsi yang memuat bilangan imaginer $\sqrt{-1}$) maka akan didapatkan bentuk :

$$R^2 = a^2 \left(1 - \frac{r}{a} e^{i(\theta - \phi)}\right) \left(1 - \frac{r}{a} e^{-i(\theta - \phi)}\right)$$

Jika dimisalkan bahwa $\frac{r}{a} e^{i(\theta-\phi)} = z_o$ dan $\frac{r}{a} e^{-i(\theta-\phi)} = \overline{z_o}$

maka :

$$R^2 = a^2 (1 - z_o)(1 - \overline{z_o})$$

Sehingga :

$$\ln R = \ln a + \frac{1}{2} \left[\ln (1 - z_o) + \ln (1 - \overline{z_o}) \right]$$

Dimana jika diaplikasikan deret Mac Laurin ,akan didapatkan bentuk :

$$\ln R = \ln a - \frac{1}{2} \left[(z_o + \overline{z_o}) + \frac{z_o^2 + \overline{z_o}^2}{2} + \frac{z_o^3 + \overline{z_o}^3}{3} + \ldots \right]$$

Yang mana deret ini dapat ditulis sebagai :

$$\ln R = \ln a - \left[\frac{r}{a} \cos(\theta-\phi) + \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2(\theta-\phi)}{2} + \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^3 \cos 3(\theta-\phi)}{3} + \ldots \right]$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Atau jika ditulis dalam suku umum yaitu :

$$\ln R = \ln a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n\, a^n} \cos n(\theta - \phi)$$

Sehingga :

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln R = \frac{1}{a} + \sum \frac{r^n}{a^{n+1}} \cos n(\theta - \phi)$$

Kedua deret ini menjadi konvergen seragam dan konvergen mutlak jika $0 \le r \le a' \le a$.

Dengan memsubstitusikan kedua deret ini pada (3.5) dan melakukan pengintegralan suku demi suku (untuk $r \le a'$) , maka didapatkan :

$$u(x,y) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \frac{r^n}{a^n} \qquad \ldots\ldots (3.10)$$

dimana $a_o = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_o^{2\pi} f(\phi)\, d\phi$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} f(\phi) \cos n\phi \, d\phi + \frac{a}{2\pi n} \int_o^{2\pi} g(\phi) \cos n\phi \, d\phi$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} f(\phi) \sin n\phi \, d\phi + \frac{a}{2\pi n} \int_o^{2\pi} g(\phi) \sin \phi \, d\phi$$

Dan karena :

$$r^n \cos n\theta = (x - x_o)^n - {}^nC_2 (x - x_o)^{n-2} (y - y_o)^2 + \ldots\ldots$$

$$r^n \sin n\theta = {}^nC_1 (x - x_o)^n - {}^nC_3 (x - x_o)^{n-3} (y - y_o)^3 + \ldots\ldots$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

maka suku umum dari (3.10) mempunyai harga mutlak :

$$| a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta | \frac{r^n}{a^n}$$

$$\leq \frac{M}{a^n} \sum_{n=1}^{\infty} {}^nC_p | x - x_o |^{n-p} . | y - y_o |^p$$

$$= \frac{M}{a^n} \left[| x - x_o | + | y - y_o | \right]^n$$

Sehingga kita dapat mensubstitusikan pada (3.10) untuk $r \cos n\theta$ dan $r \sin n\theta$ pada suku suku dalam x dan y , dan mendapatkan dua deret yang mana konvergen seragam dan konvergen mutlak terhadap x dan y pada persegi panjang

$$| x - x_o | + | y - y_o | \leq k$$

Jika $k < a$. Sehingga $u(x,y)$ adalah fungsi yang analitik pada D.

3.5 Integral Poisson

Misalkan $u(x,y)$ adalah fungsi yang harmonik pada suatu domain D. Jika K adalah sub-daerah dari D , dimana K berupa bidang lingkaran yang bertitik pusat (x_o , y_o) dan berjari jari a . maka jika (x,y) adalah titik pada K berlaku :

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_o + a \cos \phi, y_o + a \sin \phi) \, P(r, \theta - \phi) \, d\phi$$

dimana $x = x_o + r \cos \theta$; $y = y_o + a \sin \theta$ $\quad (r < a)$

dan $P(r,\theta) = \dfrac{a^2 - r^2}{a^2 - 2 ar \cos \theta + r^2}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dalam hal ini u diketahui sebagai fungsi yang harmonik pada suatu domain yang memuat K . Rumus diatas hanya menunjukkan adanya relasi yang menghubungkan antara harga fungsi u pada titik didalam bidang lingkaran K yang diketahui dengan harga fungsi u pada titik dari ∂K yang diketahui pula .

Selanjutnya akan dibahas tentang sifat sifat dari :

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi)\, P(r,\theta - \phi)\, d\phi \qquad \ldots\ldots\ (3.11)$$

dimana f adalah fungsi yang kontinyu

Dalam hal ini kita membutuhkan sifat sifat dari $P(r,\theta)$ yaitu;

i) Untuk setiap harga ϕ ,$P(r,\theta-\phi)$ adalah fungsi yang harmonik pada $r < a$

ii) $P(r,\theta) > 0$ pada $r < a$

iii) $\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\phi)\, d\phi = 2\pi$

Dan kita dapat mengubah titik asal koordinat , sedemikian sehingga x_o dan y_o menjadi nol .

Pada $r < a$ kita dapat menurunkan (3.11) terhadap x dan y secara terus menerus . Dan karena $r < a$, $P(r,\theta-\phi)$ adalah fungsi yang harmonik pada $r < a$, dan mempunyai turunan parsial dari semua tingkat yang mana masing masing turunan tersebut juga merupakan fungsi yang harmonik pada $r < a$.

Adapun sifat yang lain dari u(x,y) pada (3.11) yaitu : pada setiap titik dimana $r < a$ maka berlaku sifat:

$u(x,y) \to f(\alpha)$ sebagaimana jika $(x,y) \to (a \cos\alpha\ , a \sin\alpha)$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Hal ini dibuktikan sebagai berikut:

$$|u(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(\alpha)|$$

$$\leq |u(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(\theta)| + |f(\theta) - f(\alpha)|$$

Karena f adalah fungsi yang kontinyu maka suku kedua diatas dapat dibuat sekecil mungkin dengan mengambil θ cukup dekat dengan α . Sehingga hal ini telah cukup untuk memberikan gambaran bahwa jari jari r mendekati a . Dimana dengan melakukan rotasi , kita dapat mengambil α sama dengan nol .

Sehingga :

$$u(r,0) - f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(\phi) - f(0)\right] P(r,\phi)\, d\phi$$

dan didapat:

$$|u(r,0) - f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\phi) - f(0)|\, P(r,\phi)\, d\phi$$

Karena f adalah fungsi yang kontinyu ,maka f terbatas . Hal ini menunjukkan adanya konstanta M dimana berlaku $|f(\phi)| < M$, sehingga untuk setiap harga δ yang positif , berlaku :

$$\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |f(\phi) - f(0)|\, P(r,\phi)\, d\phi$$

$$\leq 2M\,(a^2 - r^2) \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{1}{a + r - 2ar\cos\phi}\, d\phi$$

$$< \frac{2M\,(a^2 - r^2)}{a^2 + r^2 - 2ar\cos\delta} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} d\phi$$

$$< \frac{4\pi M\,(a^2 - r^2)}{a^2 + r^2 - 2ar\cos\delta}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Sehingga untuk setiap harga ε yang diberikan , kita dapat memilih δ sedemikian $|f(\phi) - f(0)| < \varepsilon$ pada $-\delta \le \phi \le \delta$. Dalam hal ini dapat ditulis :

$$\int_{-\delta}^{\delta} | f(\phi) - f(0) | P(r,\phi)\, d\phi$$

$$< \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} P(r,\phi)\, d\phi$$

$$< \varepsilon \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} P(r,\phi)\, d\phi = 2\pi\, \varepsilon$$

Maka :

$$|u(r,0) - f(0)| < \in + \frac{2\,M\,(a^2 - r^2)}{a^2 + r^2 - 2\,ar\cos\delta}$$

Dan dengan mengambil δ sebagai tetapan , maka didapat :

$$\lim_{r \to a} \sup | u(r,0) - f(0) | \le \varepsilon$$

Karena ε yang diambil adalah sembarang , maka $u(r,0) \to f(0)$ sebagaimana $r \to a$,yang mana telah membuktikan sifat kedua dari $u(x,y)$ pada (3.11).

3.6 Pertidaksamaan Harnack

Teorema 7 :

Misalkan $u(x,y)$ adalah fungsi yang non negatif dan merupakan fungsi yang harmonik pada suatu domain D yang terbatas .Dan misalkan $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 \le a^2$ adalah bidang lingkaran yang termuat dalam D . Maka jika (x,y) adalah titik interior dari bidang

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

lingkaran tersebut dan berjarak r dari titik (x_o, y_o) , maka berlaku :

$$\boxed{\frac{a-r}{a+r}\, u(x_o, y_o) \le u(x,y) \le \frac{a+r}{a-r}\, u(x_o, y_o)}$$

Bukti:

Teorema diatas merupakan satu akibat dari integral Poisson :

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} u(x_o + a\cos\phi\ ,\ y_o + a\sin\phi)\ P(r, \theta - \phi)\ d\phi$$

dimana diketahui $u \ge 0$ dan $\frac{a-r}{a+r} \le P(r, \theta) < \frac{a+r}{a-r}$

Sehingga :

$$\frac{1}{2\pi} \int^{2\pi} u(x_o + a\cos\phi\ ,\ y_o + a\sin\phi\ )\ \frac{a-r}{a+r}\ d\phi$$

$$\le u(x,y)$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} u(x_o + a\cos\phi\ ,\ y_o + a\sin\phi\ )\ \frac{a+r}{a-r}\ d\phi$$

Dimana dari teorema 3 diketahui bahwa :

$$u(x_o, y_o) = \frac{1}{2\pi} \int^{2\pi} u(x_o + R\cos\theta\ ,\ y_o + R\sin\theta\ )\ d\theta$$

Sehingga :

$$\frac{a-r}{a+r}\, u(x_o, y_o) \le u(x,y) \le \frac{a+r}{a-r}\, u(x_o, y_o)$$

Teorema 8 :

Misalkan u(x,y) adalah fungsi yang non negatif dan harmonik pada setiap domain yang terbatas , maka u(x,y) adalah suatu konstanta .

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Bukti:

Jika diambil suatu fungsi yang harmonik pada setiap bidang lingkaran $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < a^2$, dan jika dibuat $a \to \infty$, maka dari teorema 7 didapatkan : $u(x,y) = u(x_o,y_o)$,yaitu suatu konstanta .

3.7 Fungsi Harmonik Dalam Annulus

Jika u adalah fungsi yang harmonik pada suatu domain yang memuat annulus $0 < a \le r \le b$, maka harga u pada suatu titik (x,y) dari annulus tersebut dapat dinyatakan :

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \left[\oint_{\partial D_1} + \oint_{\partial D_2} \right] \left[u \frac{\partial \ln R}{\partial n} - \ln R \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds$$

dimana $R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ dan ∂D_1 adalah $r = a$,serta ∂D_2 adalah $r = b$.

Pada ∂D_2 ; $\xi = b \cos \phi$, $\eta = b \sin \phi$ sehingga :

$$R^2 = r^2 - 2\, br \cos (\phi - \theta) + b^2$$

dimana (r,θ) adalah bentuk polar dari (x,y) . Dan seperti sub bab sebelumnya (sub bab 3.3), maka didapatkan :

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D_2} \left[u \frac{\partial \ln R}{\partial n} - \ln R \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds$$

$$= a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \right] \frac{r^n}{b^n}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Namun pada ∂D_2 : $\xi = a \cos \phi$ dan $\eta = a \sin \phi$ sehingga :

$$R^2 = a^2 - 2\, ar \cos(\phi - \theta) + r^2$$

dimana $r < a$, sehingga :

$$\ln R = \ln r - \sum^{\infty} \frac{a^n}{n\, r^n} \cos n(\theta - \phi)$$

dan

$$\frac{\partial \ln R}{\partial n} = -\frac{\partial \ln R}{\partial a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{r^n} \cos n(\theta - \phi)$$

Hal ini mengakibatkan :

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D_1} \left[u \frac{\partial \ln R}{\partial n} - \ln R \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds$$

$$= \acute{a}_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\acute{a}_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \right] \frac{a^n}{r^n}$$

dimana $\acute{a}_o = -\frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$.Namun karena tidak disyaratkan bahwa $u(x,y)$ adalah fungsi yang harmonik pada $r \le a$ maka a tidak harus sama dengan nol . Sehingga suatu fungsi $u(x,y)$ yang harmonik pada suatu domain yang memuat annulus $o < a \le r \le b$ dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$u(x,y) = a_o + \acute{a}_o \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \right] \frac{r^n}{b^n}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\acute{a}_n \cos n\theta + \acute{b}_n \sin n\theta \right] \frac{a^n}{r^n} \qquad \ldots (3.12)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Teorema 9 :

Jika u(x,y) adalah suatu fungsi yang berharga tunggal dan merupakan fungsi yang harmonik pada suatu persekitaran dari titik P_o , kecuali pada titik P_o sendiri , dan u(x,y) merupakan fungsi yang terbatas pada persekitaran tersebut , maka kita dapat mendifinisikan u pada titik P_o sedemikian sehingga u merupakan fungsi yang harmonik pada semua titik dari persekitaran itu .

Bukti:

Kita dapat memandang titik P_o sebagai titik asal koordinat , dan persekitaran dari P_o memuat daerah yang didefinisikan oleh $r \leq b$. Dan dengan merubah notasi pada (3.12) , kita dapatkan

$$u(x,y) = a_o + \acute{a}_o \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n} \left[\cos n\theta + b_n \sin n\theta \right] r^n$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a \cos n\theta + b \sin n\theta \right] r^{-n}$$

Deret ini merupakan deret yang konvergen seragam pada setiap himpunan tertutup yang termuat pada $0 < r < b$.

Dan misalkan $|u| \leq M$ pada $r \leq b$. Maka dengan mengintegralkan suku demi suku kita dapatkan :

$$2\pi \left(a_o + \acute{a}_o \ln r \right) = \int_o^{2\pi} u(r \cos \theta , r \sin \theta) \, d\theta$$

sehingga:

$$| a_o + \acute{a}_o \ln r | \leq M .$$

Supaya hal ini berlaku untuk setiap r yang cukup kecil , maka $\acute{a}_o = 0$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dan dengan jalan yang sama , jika $n > 0$, maka didapatkan :

$$| a_n r^n + a_n^1 r^{-n} |$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos n\theta \right|$$

$$\leq 2\pi M$$

Supaya hal ini berlaku juga untuk setiap r yang cukup kecil , maka $a_n = 0$, dan demikian juga $b_n = 0$ .Sehingga didapatkan :

$$u(x,y) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n .$$

untuk daerah $0 < r < b$, dan untuk $r = 0$ jika kita definisikan $u(0,0)$ sebagai a .

Karena deret yang mempunyai bentuk $\sum(|a| + |b|) c^n$ adalah merukan deret yang konvergen jika $c < b$, maka u adalah fungsi yang harmonik pada $r < b$. Dalam hal ini P_o disebut sebagai titik singular yang dapat dihilangkan .

Teorema 10 :

Jika $u(x,y)$ adalah suatu fungsi yang berharga tunggal dan merupakan fungsi yang harmonik pada persekitaran dari titik P_o , kecuali pada titik P_o sendiri , dan $u \to +\infty$ sebagaimana $(x,y) \to P_o$, maka $u = a_o \ln r + v$,dimana a_o berharga negatif dan v adalah fungsi yang harmonik pada suatu persekitaran dari titik P_o .

Bukti:

Karena $u \to +\infty$ maka untuk setiap harga M yang positif , kita dapat memilih r_o sedemikian sehingga $u > M$ pada $0 < r < r_o$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dan dengan menggunakan ekspansi deret Laurent , kita dapatkan :

$$2\pi\ (a_o + a'_o\ \ln r\ ) + \pi\ (\ a_n\ r^n + a'_n\ r^{-n}\ )$$

$$= \int_o^{2\pi} u\ (\ r\cos\theta, r\sin\theta\ )(\ 1 + \cos n\theta)\ d\theta\ .$$

$$\geq M \int_o^{2\pi} (\ 1 + \cos n\theta\ )\ d\theta = 2\pi\ M$$

Karena $1 + \cos n\theta \geq 0$, dengan jalan yang sama didapatkan :

$$2\pi\ (a_o + a'_o\ \ln r\ ) - \pi\ (\ a_n\ r^n + a'_n\ r^n\ ) \geq 2\pi\ M\ .$$

Kedua pertidaksamaan diatas berlaku pada $0 < r < r_o$, untuk setiap harga r yang cukup kecil .

Karena $\pm\ \pi\ a'_n\ r^{-n}$ merupakan suku yang penting dari ruas kiri maka supaya kedua pertidaksamaan diatas benar , haruslah $a'_n = 0$.

Dengan alasan yang serupa maka haruslah $b'_n = 0$.

Dan supaya $a'_o \ln r \to +\infty$ jika $r \to 0$ maka haruslah $a'_o < 0$ .Sehingga didapatkan :

$$u(x,y) = a_o + a'_o\ \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\ \cos n\theta + b_n\ \sin n\theta) r^n$$

yang mana telah dibuktikan diatas.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)