BAB II

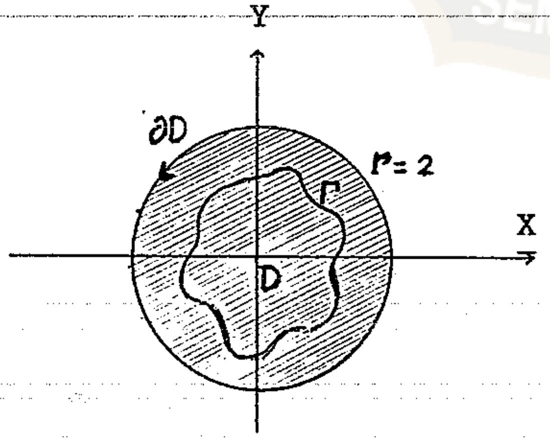
MATERI PENUNJANG

2.1 Daerah Yang Terhubung Secara Simply Dan Multiply

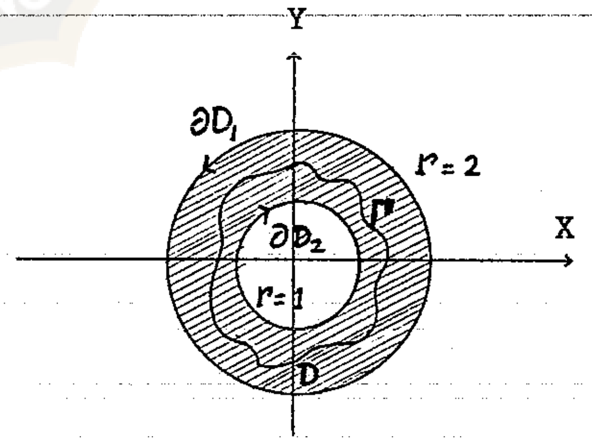
Suatu daerah terhubung D disebut terhubung secara simply , jika setiap kurva tertutup sederhana yang terdapat dalam D dapat menyusut menuju satu titik tanpa meninggalkan D .Dan suatu daerah terhubung yang tidak terhubung secara simply , disebut terhubung secara multiply .

Contoh 1 :

Misalkan D adalah daerah terhubung , dimana pada bagian luar dari D dibatasi oleh lingkaran yang bertitik pusat pada titik asal ko-ordinat dan mempunyai jari jari 2. Maka daerah ini adalah daerah yang terhubung secara simply , karena jika dimisalkan terdapat kurva tertutup sederhana Γ yang terdapat dalam D, maka kurva ini dapat menyusut menuju satu titik tanpa meninggalkan D (gambar.1).



gambar.1



gambar.2

Contoh 2 :

Misalkan D adalah daerah terhubung ,dimana D merupakan daerah diantara dua lingkaran konsentris yang berjari jari 2 dan 1 dengan titik asal koordinat sebagai titik pusat . Maka daerah ini adalah daerah yang terhubung secara multiply , karena jika dimisalkan terdapat kurva tertutup sederhana Γ yang terdapat dalam D , maka kurva ini tidak mungkin dapat menyusut menuju satu titik tanpa meninggalkan D (gambar.2)

2.2 Teorema Green Dalam Bidang

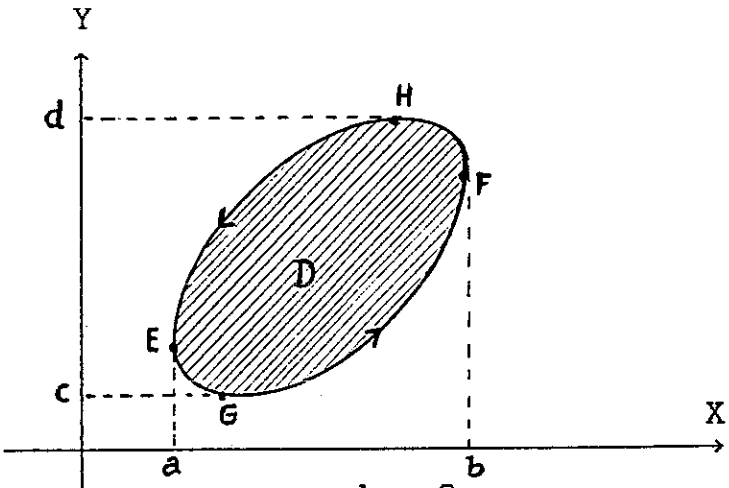
Jika P(x,y) dan Q(x,y) adalah fungsi fungsi yang kontinyu dan mempunyai turunan parsial pertama yang kontinyu pada suatu daerah D dan pada pembatasnya ∂D , maka teorema Green menyatakan bahwa :

$$\boxed{\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy\,dx}$$

teorema ini valid untuk D yang terhubung secara simply dan D yang terhubung secara multiply .

Bukti :

1. Jika D adalah daerah yang terhubung secara simply , dan misalkan ∂D mempunyai sifat sedemikian setiap garis lurus yang sejajar sumbu koordinat dan memotong ∂D , maka hanya terdapat 2 titik potong pada ∂D (gambar.3).



gambar.3

Misalkan kurva EGF dan EHF mempunyai persamaan $y = f_1(x)$ dan $y = f_2(x)$. Seperti nampak pada gambar 3 ,maka didapatkan :

$$\iint_D \left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial D} \right] dy\, dx = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right] dy\, dx$$

$$= \int_a^b \Big[P(x,f_2[x]) - P(x,f_1[x]) \Big] dx$$

$$= - \int_b^a P(x,f_2[x])\, dx - \int_b^a P(x,f_1[x])\, dx$$

$$= - \oint_{\partial D} P.dx \qquad ....(2.1)$$

Dengan jalan yang sama , jika dimisalkan kurva GEH dan GFH mempunyai persamaan $x = g_1(y)$ dan $x = g_2(y)$, maka akan didapat :

$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \right] dy\, dx = \int_c^d \Big[Q(g_2[y],y) - Q(g_1[y]) \Big] dy$$

$$= \int_c^d Q(g_2[y],y)\ dy + \int_d^c Q(g_1[y],y)\ dy$$

$$= \oint_{\partial D} Q\ dy \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.2)$$

Dengan mengurangkan persamaaan (2.1) pada persamaan (2.2) , didapatkan :

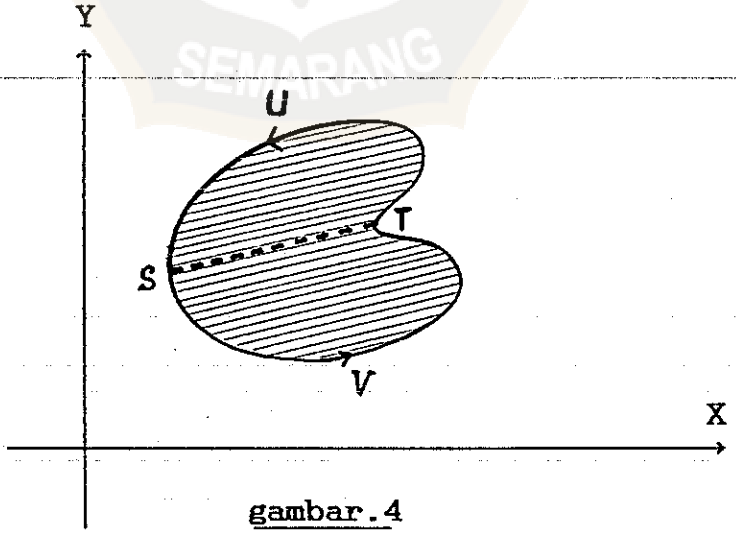
$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\ dy\ dx - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\ dy\ dx = \oint_{\partial D} \partial Q\ dy - \left[- \oint_{\partial D} P\ dx \right]$$

Persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk :

$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dy\ dx = \oint_{\partial D} P\ dx + Q\ dy$$

dimana teorema Green telah dibuktikan kebenarannya .

2. Jika dimisalkan D adalah daerah yang terhubung secara simply, dan ∂D mempunyai sifat sedemikian setiap garis lurus yang sejajar sumbu koordinat dan memotong ∂D ,maka terdapat lebih dari dua titik potong pada ∂D , yang secara sederhana dilukiskan pada gambar 4.



gambar.4

Pada gambar diatas nampak garis putus putus ST yang diperkenalkan sebagai garis pemotong yang membagi D menjadi dua daerah D_1 dan D_2, sedemikian ∂D_1 dan ∂D_2 mempunyai sifat bahwa setiap garis lurus yang sejajar sumbu koordinat dan memotong ∂D_1 atau ∂D_2, maka hanya, terdapat 2 titik potong. Sehingga didapatkan :

$$\int_{STUS} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy\,dx \qquad \ldots.(2.3)$$

dan :

$$\int_{SVTS} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy\,dx \qquad \ldots\ldots (2.4)$$

Dengan menjumlahkan ruas kiri pada persamaan (2.3) dan (2.4) dan jika integrandnya dikeluarkan didapat:

$$\int_{STUS} + \int_{VTS} = \int_{ST} + \int_{TUS} + \int_{SVT} + \int_{TS}$$

$$= \int_{TUS} + \int_{ST} - \int_{ST} + \int_{SVT}$$

$$= \int_{TUSVT} = \oint_{\partial D}$$

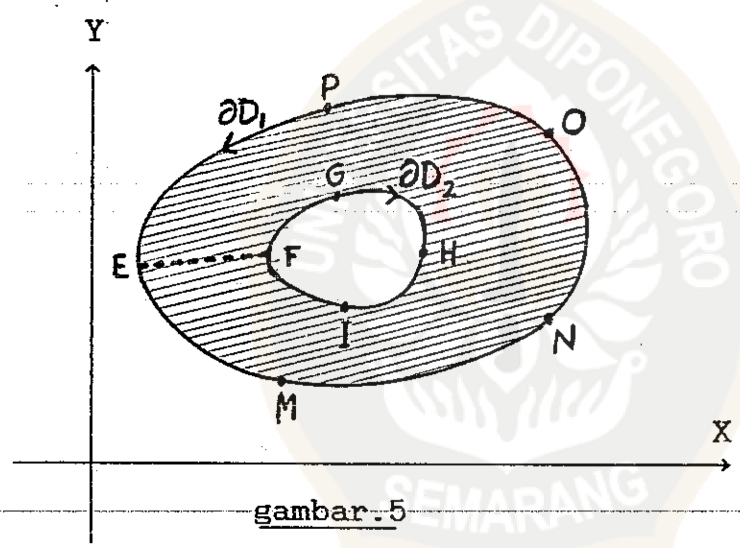
Dan dengan menjumlahkan ruas kanan pada persamaan (2.3) dan (2.4) dan jika integrandnya dikeluarkan didapat:

$$\iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \iint_{D}$$

Dan dengan menggabungkan penjumlahan masing masing ruas ,akan diperoleh :

$$\oint_{\partial D} P\ dx + Q\ dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy\ dx$$

3. Jika D adalah daerah yang terhubung secara multiply , teorema dibuktikan dengan menunjukkan bahwa D dapat dibentuk menjadi suatu daerah yang terhubung secara simply , yaitu dengan memperkenalkan suatu garis pemotong .



gambar.5

Pada gambar 5 diatas daerah D dibatasi oleh kurva ∂D_1 pada bagian luarnya dan dibatasi oleh kurva ∂D_2 pada bagian dalamnya .Sedangkan Garis putus putus EF merupakan garis pemotong .Titik titik E, M,N,O,dan P adalah titik titik yang terdapat pada ∂D_1 dan titik titik F,G,H,dan I adalah titik titik pada ∂D_2 .

Nampak bahwa daerah yang dibatasi oleh EFGHIMNOPE adalah daerah yang terhubung secara simply ,sehingga :

$$\int_{EFGHIMNOPE} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy\,dx$$

Dimana integral pada ruas kiri jika integrandnya dikeluarkan adalah sama dengan :

$$\int_{EF} + \int_{FGHIF} + \int_{FE} + \int_{EMNOPE} = \int_{FGHIF} + \int_{EMNOPE}$$

$$= \oint_{\partial D_1} + \oint_{\partial D_2}$$

Dan karena ∂D adalah gabungan dari ∂D_1 dan ∂D_2 ,maka $\oint_{\partial D_1} + \oint_{\partial D_2} = \oint_{\partial D}$ sehingga didapatkan :

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dy\,dx$$

Sehingga teorema Green telah dibuktikan kebenarannya untuk daerah yang terhubung secara simply maupun daerah yang terhubung secara multiply .

Contoh 3:

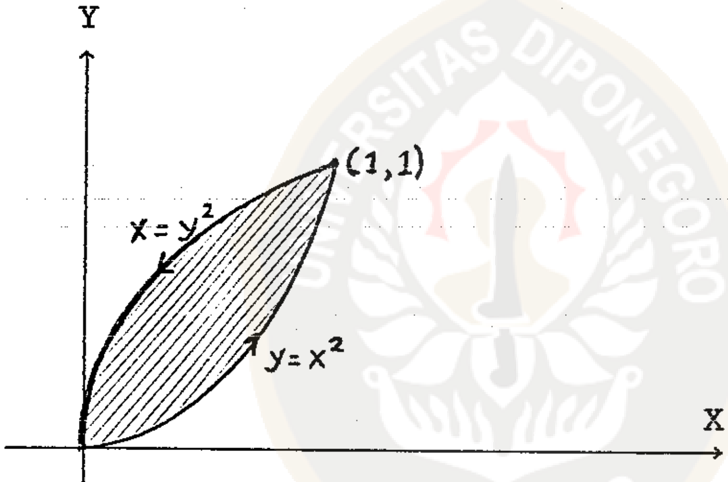
Tunjukkanlah kebenaran teorema Green untuk $P = 2xy - x^2$ dan $Q = x + y^2$. dimana D adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $x = y^2$

Jawab :

Pembatas D yaitu ∂D merupakan gabungan kurva ∂D_1 dan ∂D_2, dimana persamaan kurva ∂D_1 yaitu $y = x^2$ dan persamaan kurva ∂D_2 yaitu $x = y^2$. Sehingga :

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \oint_{\partial D_1} P\,dx + Q\,dy + \oint_{\partial D_2} P\,dx + Q\,dy$$

dimana pemakaian arah positif pada ∂D yaitu kebalikan arah jarum jam , seperti nampak pada gambar 6 .



gambar.6

Titik potong kurva ∂D_1 dan kurva ∂D_2 yaitu titik (0,0) dan (1,1)

Pada kurva ∂D_1 ; $y = x^2$, $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 2x$

$$\oint_{\partial D_1} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 \left[(2xy - x^2) + (x + y^2)\,\frac{\partial y}{\partial x} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[2x.(x^2) - x^2 + (x + (x^2)^2).2x \right] dx$$

$$= \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5)\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{7}{6}$$

Pada kurva ∂D_2 ; $x = y^2$, $\dfrac{\partial x}{\partial y} = 2y$

$$\oint_{\partial D_2} P\,dx + Q\,dy = \int_1^0 \left[\left(2xy - x^2 \right) \frac{dx}{dy} + \left(x + y^2 \right) \right] dy$$

$$= \int_1^0 \left[\left(2y^2 . y - (y^2)^2 .2y + (y^2 + y^2) \right] dy$$

$$= \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2)\, dy$$

$$= \left[\frac{4}{5} y^5 - \frac{1}{3} y^6 + \frac{2}{3} y^3 \right]_0^1 = - \frac{17}{15}$$

Sehingga diperoleh:

$$\oint_{\partial D_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}$$

Dan karena :

$$\iint_D P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 \left\{ \int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} (1 - 2x)\, dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left[y - 2xy \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^{1/2} - 2\, x^{3/2} - x^2 + \frac{2}{3}\, x^3 \right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}\, x^{3/2} - \frac{4}{5}\, x^{5/4} - \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{1}{2}\, x^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{30}$$

Sehingga telah dibuktikan bahwa:

$$\oint_{\partial D} P.dx + Q.dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy\, dx$$

2 3 Identitas Green

Jika dimisalkan D adalah daerah yang terhubung secara simply dan dibatasi oleh kurva tertutup sederhana ∂D,Dan misalkan u(x,y) dan v(x,y) adalah fungsi fungsi yang mempunyai turunan parsial pertama yang kontinyu pada D dan pada ∂D . Maka jika diambil $P = -u\, v_y$ dan $Q = u\, v_x$ pada teorema Green , didapatkan :

$$\oint_{\partial D} (-u\, v_x)\, dx + (u\, v_x)\, dy$$

$$= \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\, u\, v_x - \frac{\partial}{\partial y} (-u\, v_y) \right\} dy\, dx \qquad \ldots(2.5)$$

Jika v_{xx} dan v_{yy} ada ,serta diberikan satu kesepakatan bahwa vektor normal yang berarah positif adalah vektor normal dengan arah keluar , sedemikian $\vec{n} = \frac{dy}{ds}\, \vec{i} + \frac{dx}{ds}\, \vec{j}$ .Dan jika diaplikasikan identitas ∇ , dimana $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\, \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\, \vec{j}$ dan $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, maka persamaan (2.5) diatas dapat ditulis dalam bentuk :

$$\oint_{\partial D} u \nabla v \cdot \vec{n} \; ds = \iint_D (u \nabla^2 v + u_x v_x + u_y v_y) \; dy \, dx$$

atau ditulis dalam bentuk :

$$\boxed{\oint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial N} ds = \iint_D (u \nabla^2 v + u_x v_x + u_y v_y) \; dy \, dx} \quad \ldots .(2.6)$$

Persamaan (6) ini disebut <u>identitas Green yang pertama</u>

Kemudian jika diambil $P = - v u_y$ dan $Q = v u_x$ pada teorema Green ,dengan jalan yang sama , akan didapatkan :

$$\oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial N} ds = \iint_D (v \nabla^2 u + u_x v_x + u_y v_y) \; dy \, dx \quad ..(2.7)$$

Dengan mengurangkan persamaan (2.7) pada persamaan (2.6) didapat

$$\boxed{\oint_{\partial D} \left[u \frac{\partial v}{\partial N} - v \frac{\partial u}{\partial N} \right] ds = \iint_D (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \; dy \, dx} \quad \ldots (2.8)$$

Persamaan (2.8) ini disebut <u>identitas Green yang kedua</u>

Dan karena pada daerah yang terhubung secara multiply , teorema Green valid , maka identitas Green yang pertama dan identitas Green yang kedua berlaku pula untuk daerah yang terhubung secara multiply .

2.4 Transformasi Fourier Dan Invers Transformasi Fourier

<u>Definisi 3 :</u>

Jika f(x) adalah fungsi dari x , dimana $-\infty < x < \infty$, maka transformasi Fourier dari f(x) yang dinyatakan dengan symbol $\mathcal{F}$ [f(x)] adalah :

$$\boxed{\mathcal{F}\,[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\ f(x)\ dx = F\,(\omega)}$$

dimana $i = \sqrt{-1}$,dan ω adalah variabel dari bilangan real yang disebut sebagai variabel transformasi .

Contoh 4 :

Jika dimisalkan $f(x) = e^{-x^2}$ maka transformasi fourier dari f(x) yaitu :

$$\mathcal{F}\,[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\ e^{-x^2}\ dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 - i\omega x)}\ dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x - \frac{i\omega}{2})^2} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}\ dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\ e^{-\frac{\omega^2}{4}} = F(\omega)$$

Definisi 4:

Jika $F(\omega)$ adalah transformasi Fourier dari f(x) , yang mana dapat dinyatakan $\mathcal{F}$ [f(x)] = $F(\omega)$,maka f(x) disebut invers transformasi Fourier dari $F(\omega)$ dan dapat ditulis :

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} . F(\omega)\, d\omega = f(x)$$

Contoh 5 :

Dari contoh 4 diatas nampak bahwa transformasi Fourier dari $f(x) = e^{-x^2}$ yaitu $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$,dan sehubungan dengan hal ini maka invers transformasi Fourier dari $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$ yaitu $f(x) = e^{-x^2}$.

Teorema Konvolusi

Jika $F(\omega)$ adalah transformasi Fourier dari $g(x)$. Dan misalkan terdapat fungsi H demikian sehingga $H(\omega) = F(\omega) .G(\omega)$, maka invers transformasi Fourier dari $H(\omega)$ yaitu $h(x)$ adalah :

$$\boxed{h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_o)\, f(x - x_o)\, dx_o}$$

dimana x_o adalah parameter.

Bukti:

Karena $h(x)$ adalah invers transformasi Fourier dari $H(\omega)$ maka dapat ditulis:

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} H(\omega)\, d\omega.$$

Dan karena $H(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega)$, sehingga :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} F(\omega) \cdot G(\omega)\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} F(\omega) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x_o} g(x_o)\, dx_o \right] d\omega$$

Hal ini benar karena $G(\omega)$ adalah transformasi Fourier dari $g(x)$ Dan pemakaian parameter x_o digunakan untuk membedakan variabel x yang terdapat pada transformasi Fourier dari $g(x)$ dan faktor dari $e^{-i\omega x}$.

Selanjutnya jika dilakukan pemindahan pemindahan pada integrand, maka akan diperoleh :

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_o) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{i\omega x_o} F(\omega)\, d\omega \right] dx_o$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_o) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x - x_o)} F(\omega)\, d\omega \right] dx_o$$

Integral dalam kurung adalah bentuk invers transformasi Fourier dari $F(\omega)$, sehingga didapatkan :

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_o)\, f(x - x_o)\, dx_o$$

yang mana teorema konvolusi telah dibuktikan kebenarannya .

2.5 Transformasi Fourier Untuk Fungsi Dalam Dimensi Dua

Jika $f(x,y)$ adalah fungsi dari x dan y , dimana $-\infty < x < \infty$

dan $-\infty < y < \infty$. Dan jika $f(x,y)$ mempunyai sifat sedemikian $f(x,y) \to 0$ dengan cepat jika x dan $y \to \pm \infty$,Transformasi Fourier terhadap x dengan y dianggap konstan (dengan variabel transformasi ω_1) adalah :

$$F(\omega_1,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 x} f(x,y)\, dx \qquad \text{........(2.9)}$$

dimana invers transformasi Fourier dari (2.9) yaitu :

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1,y)\, e^{-i\omega_1 x}\, d\omega_1$$

$F(\omega_1,y)$ adalah fungsi dari y , dan jika diaplikasikan transformasi Fourier terhadap y (dengan variabel transformasi ω_2),kita dapatkan :

$$F(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1,y)\, e^{i\omega_2 y}\, dy$$

dan :

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1,\omega_2)\, e^{-i\omega_2 y}\, d\omega_2$$

Dengan menggabungkan keterangan keterangan diatas ,kita dapatkan pasangan transformasi Fourier dalam dimensi dua sebagai berikut :

$$F(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{i\omega_1 x}\, e^{i\omega_2 y}\, dy\, dx$$

dan

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1,\omega_2)\, e^{-i\omega_1 x}\, e^{-i\omega_2 y}\, d\omega_1\, d\omega_2$$

Penulisan yang lebih sederhana , akan didapatkan jika digunakan notasi vektor :

$$\vec{r} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j}$$

dan

$$\vec{\omega} = \omega_1\ \vec{i} + \omega_2\ \vec{j}$$

dimana $\vec{r}$ adalah vektor posisi dan ω adalah vektor variabel transformasi . Dengan menggunakan notasi vektor ini pasangan transformasi Fourier untuk fungsi dalam dua dimensi ditulis :

$$F(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r})\, e^{i\vec{\omega}\,\vec{r}}\, dx\, dy$$

dan

$$f(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\vec{\omega}\,\vec{r}}\, d\omega_1\, d\omega_2$$

dimana $f(\vec{r}) = f(x,y)$;dan $F(\omega)$ adalah transformasi Fourier berganda dari $f(\vec{r})$.

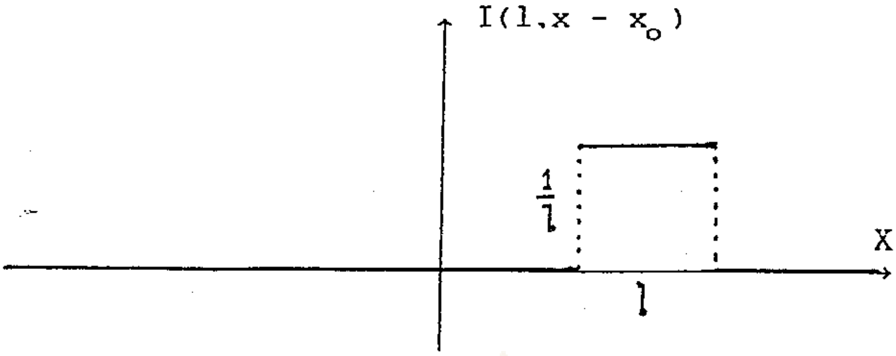
2.6 Fungsi Impuls Satuan Berhingga Dan Fungsi Dirac Delta

Definisi 5:

Fungsi impuls satuan berhingga yang diberikan dengan symbol $I(l,x - x_o)$ adalah fungsi dengan sifat :

$$I(l,x - x_o) = \begin{cases} \dfrac{1}{l} & \text{untuk} \quad x < x < x_o+h \\ 0 & \text{untuk} \quad x < x_o \quad \text{dan untuk} \quad x > x_o+h \end{cases}$$

dimana x_o adalah parameter dan $l > 0$, yang grafiknya disajikan pada gambar 7



gambar.7

Transformasi Fourier dari $I(l,x - x_o)$ yaitu :

$$\mathcal{F}\left[I(l,x - x_o) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \; I(l,x - x_o)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{x_o}^{x_o+l} \frac{1}{l} \,.\, e^{i\omega x} \,.\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{x_o} 0.e^{i\omega x} .dx$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{x_o+l}^{\infty} 0.e^{i\omega x} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i\omega x}}{i\omega} \right]_{x_o}^{x_o+l}$$

$$= \frac{1}{2\pi l} \; \frac{e^{i\omega (x_o+l)} - e^{i\omega x_o}}{i\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \; e^{i\omega x_o} \left[\frac{e^{i\omega l} - 1}{i\omega l} \right]$$

Jika $l \to 0$ didapatkan :

$$\lim_{l \to 0} \frac{e^{i\omega l} - 1}{i\omega l} = \lim_{l \to 0} \frac{\frac{d}{dh}\left[e^{i\omega l} - 1 \right]}{\frac{d}{dl}(i\omega l)}$$

$$= \lim_{l \to 0} \frac{i\omega\, e^{i\omega l}}{i\omega} = 1$$

Berdasarkan kenyataan ini , diperkenalkan idea *limiting function* yang dinyatakan dengan $\delta(x - x_o)$,yang dilukiskan sebagai akibat dari $I(l,x - x_o)$ jika $l \to 0$ .Limiting function ini disebut impuls satuan atau lebih dikenal sebagai fungsi Dirac Delta .Adapun sifat sifat yang dimiliki oleh fungsi Dirac Delta yaitu :

1. Jika $\delta(x - x_o)$ dianggap sebagai fungsi yang kontinyu dan menuju nol dengan cepat jika $x \to \pm\infty$ maka transformasi Fourier dari $\delta(x - x_o)$ yaitu :

$$\mathcal{F}[\delta(x - x_o)] = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega x_o}$$

Bukti:

$$\mathcal{F}[\delta(x - x_o)] = \lim_{l \to 0} \mathcal{F}[I(l,x - x_o)]$$

$$= \lim_{l \to 0} \frac{1}{2\pi} e^{i\omega x_o} \left[\frac{e^{i\omega l} - 1}{i\omega l} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{i\omega x_o}$$

2. Jika F(x) adalah fungsi yang didefinisikan untuk $-\infty < x < \infty$,

dan F(x) fungsi yang kontinyu pada setiap interval $x_o < x < x_o + k$, dimana $k \geq 0$,maka :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_o)\, F(x)\, dx = F(x_o)$$

<u>Bukti:</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_o)\, F(x\ )\, dx = \lim_{l \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} I(l, x - x_o)\, F(x)\, dx$$

$$= \lim_{l \to 0} \frac{1}{l} \int_{x_o}^{x_o + l} F(x)\, dx$$

$$= \lim_{l \to 0} F(x_o + \theta\, l) = F(x_o)$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_o)\, dx = 1$

<u>Bukti:</u>

Dari sifat 2 diatas , dengan mengambil F(x) = 1 , didapatkan :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_o)\ .\ 1\ dx = 1$$

2.7 Fungsi Dirac Delta Dalam Dimensi Dua

Jika $\delta(x - x_o)$ dan $\delta(y - y_o)$ masing masing merupakan fungsi Dirac Delta dimensi satu pada pada sumbu X dan pada sumbu Y, maka fungsi Dirac Delta dua dimensi pada bidang XY didefinisikan sebagai hasil kali dari $\delta(x-x_o)$ dengan $\delta(y-y_o)$.Dan jika $\delta(\vec{r} - \vec{r}_o)$ adalah notasi vektor dari fungsi Dirac Delta pada dimensi dua , maka dapat ditulis :

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_o) = \delta(x-x_o)\ \delta(y-y_o)$$

Beberapa sifat dari fungsi Dirac Delta dimensi dua ini diantaranya yaitu :

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ \delta(x-x_o)\ \delta(y-y_o)\ dx\ dy = f(x_o, y_o)$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_o)\ \delta(y-y_o)\ dy\ dx = 1$$

Adapun transformasi Fourier dari fungsi Dirac Delta dalam dua dimensi dinyatakan sebagai berikut :

$$\mathcal{F}\left[\delta(\vec{r} - \vec{r}_o)\right] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_o)\ e^{i\,\vec{\omega}\,\vec{r}}\ .dx\ dy$$

$$= \frac{e^{i\,\vec{\omega}\,\vec{r}_o}}{(2\pi)^2}$$

Dimana dari invers transformasi Fourier didapatkan :

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_o) = \int_{-\infty}^{\infty} . \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\,\vec{\omega}\,\vec{r}_o}}{(2\pi)^2}\ .e^{-i\,\vec{\omega}\,\vec{r}}\ .d\omega_1\ d\omega_2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} . \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\vec{\omega}\,(\vec{r} - \vec{r}_o)}\ .\ d\omega_1\ d\omega_2$$

dimana $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ dan $\vec{r}_o = x_o\,\vec{i} + y_o\vec{j}$.

2.8 Pemetaan Yang Konformal

Pandang dua buah fungsi :

$$u = u(x,y) \qquad \text{..............(2.10)}$$

dan

$$v = v(x,y) \qquad \text{..............(2.11)}$$

Jika dimisalkan (u,v) adalah titik sembarang pada bidang UV dan (x,y) adalah titik sembarang pada bidang XY ,maka dari (2.10) dan (2.11) nampak adanya hubungan antara titik titik pada bidang UV dan bidang XY .Suatu relasi yang menghubungkan antara titik titik pada bidang UV dengan titik titik pada bidang XY tersebut dinamakan transformasi.

Contoh 6:

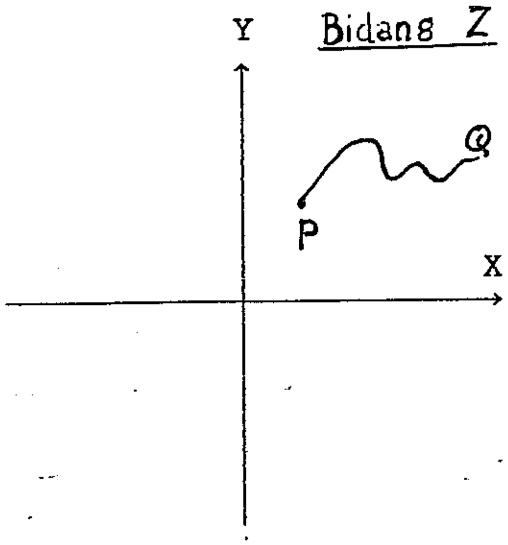
Pandang

$$u = x^2 + y^2$$

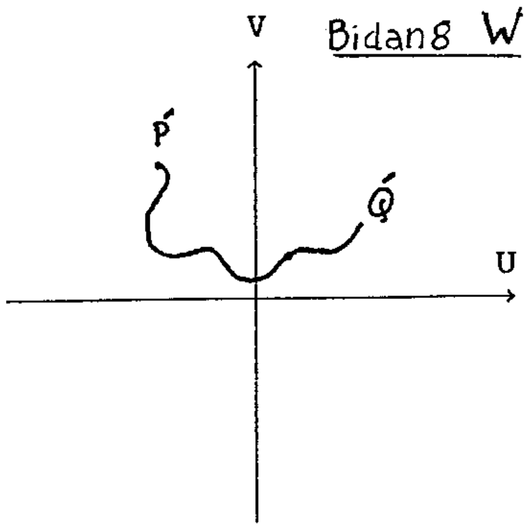
dan :

$$v = 2xy$$

Jika dimisalkan (u,v) adalah titik sembarang pada bidang UV dan (x,y) adalah titik sembarang pada bidang XY , maka nampak adanya hubungan antara titik titik pada bidang XY dan bidang UV (gambar 8 dan gambar 9).



gambar.8



gambar.9

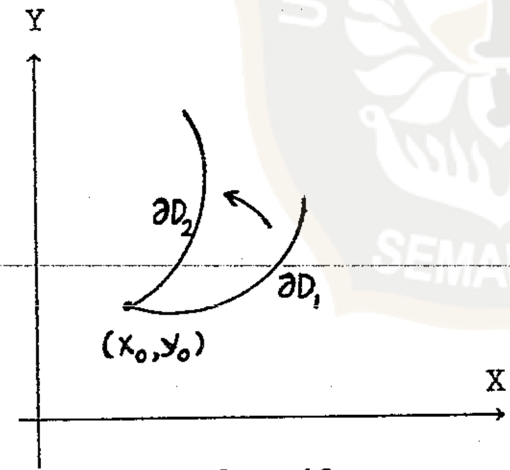
Dalam gambar diatas nampak bahwa titik (1,2) dari bidang XY berhubungan dengan titik (-3,4) dari bidang UV.

Dan jika kita lihat selanjutnya , maka terhadap transformasi ini untuk setiap titik bidang XY berhubungan dengan titik bidang UV , dan demikian pula sebaliknya .Dalam hal ini dikatakan bahwa antara titik titik dari bidang XY dengan titik titik dari bidang UV terdapat suatu relasi yang berkorespondensi satu satu atau pemetaan .

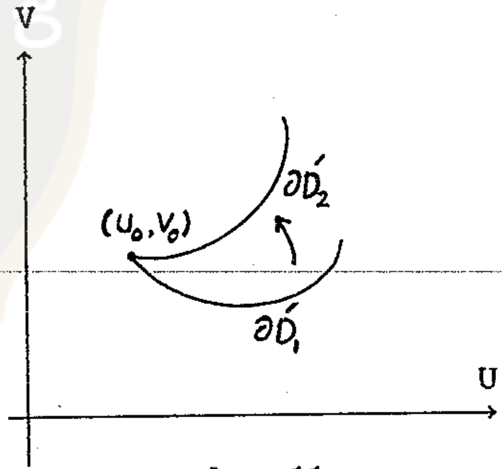
Selanjutnya didalam pembahasan ini , jika terdapat suatu transformasi selalu dimaksudkan sebagai transformasi yang mempunyai sifat korespondensi satu satu atau suatu pemetaan .Dan jika terhadap suatu transformasi suatu titik ditransformasikan ke titik yang lain , maka antara titik yang berhubungan , suatu titik disebut sebagai bayangan atau sekawan dari titik yang lain.

Definisi 7 :

Misalkan oleh suatu pemetaan , titik (x_o, y_o) dari bidang XY dipetakan pada titik (u_o, v_o) dari bidang UV. Sedangkan kurva ∂D_1 dan ∂D_2 yang berpotongan pada (x_o, y_o) dipetakan pada kurva $\partial \acute{D}_1$ dan $\partial \acute{D}_2$ yang berpotongan pada (u_o, v_o) seperti nampak pada gambar 10 dan 11 .Maka jika pemetaan tersebut mempunyai sifat sedemikian sehingga , sudut pada (x_o, y_o) antara ∂D_1 dan ∂D_2(sesuai dengan tanda panah pada gambar 10, dimana mata panah menunjukkan arah pengukuran sudut) adalah sama dengan sudut pada (u_o, v_o) antara $\partial \acute{D}_1$ dan $\partial \acute{D}_2$(sesuai dengan tanda panah pada gambar 10) dalam besar dan arahnya , maka pemetaan tersebut dinamakan konformal pada (x_o, y_o) .



ganbar.10



gambar.11

Suatu pembahasan yang menarik , jika pembahasan tentang pemetaan yang konformal ini berhubungan dengan transformasi pada bidang komplek.

Jika $w = u + iv$ (dimana u dan v real) adalah suatu fungsi bernilai tunggal dari $z = x + iy$ (dimana x dan y real) maka dapat ditulis :

$$u + iv = f(x + iy) \qquad \text{.........} \; (2.12)$$

Dan dengan menyamakan bagian yang real dan bagian yang imaginer nampak bahwa (2.12) adalah ekuivalen dengan :

$$u = u(x,y)$$

dan

$$v = v(x,y)$$

yaitu suatu persamaan transformasi . Sehingga jika $P(x,y)$ adalah suatu titik pada bidang komplek Z maka terdapat titik bayangannya pada bidang komplek W ,yaitu $\acute{P}\,(u,v)$

Contoh 7:

Jika $w = z^2$ maka $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, dan persamaan transformasinya yaitu $u = x^2 - y^2$ dan $v = 2xy$. Dimana titik (1,2) pada bidang Z dipetakan pada titik (-3,4) pada bidang W

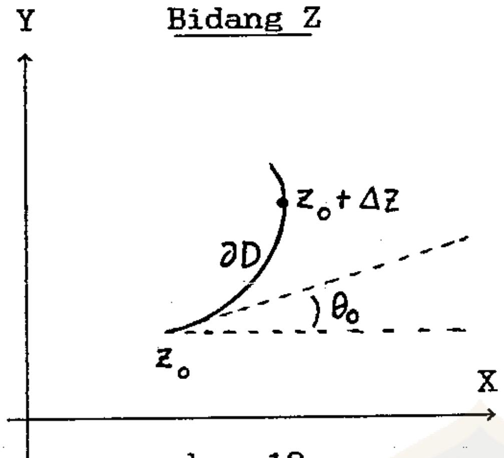
Teorema:

Jika $f(z)$ adalah fungsi yang analitik pada suatu daerah R dan $f'(z) \neq 0$ maka pemetaan $w = f(z)$ adalah pemetaan yang konformal pada semua titik dari R .

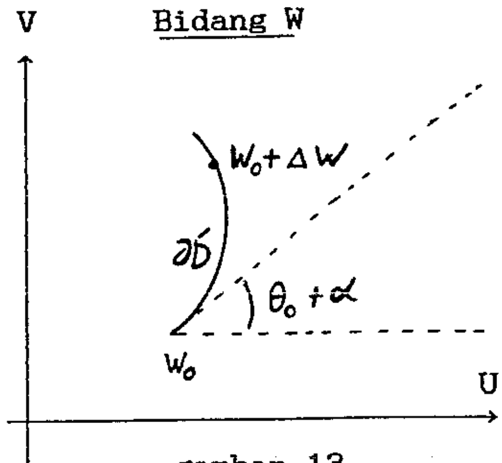
Bukti:

Untuk membuktikan teorema diatas digunakan ilustrasi gambar yang diperlihatkan pada gambar 12 dan gambar 13 .

Dalam gambar 12 dan 13 nampak bahwa titik z_o dari bidang Z dipetakan pada titik w_o dari bidang W , dan kurva ∂D dari bidang Z dipetakan pada kurva $\partial D'$ dari bidang W .



gambar.12



gambar.13

Jika titik z_o bergerak menuju $z_o + \Delta z$ sepanjang kurva ∂D , maka titik w_o bergerak menuju $w_o + \Delta w$ sepanjang kurva $\partial D'$. Dan jika digunakan parameter t untuk menggambarkan kurva ∂D dan $\partial D'$, maka lintasan yang sehubungan dengan lintasan $z = z(t)$ adalah lintasan $w = w(t)$.

Dari geometrisnya $\dfrac{dz}{dt}$ dan $\dfrac{dw}{dt}$ masing masing adalah vektor yang menyinggung kurva ∂D dan $\partial D'$ .atau secara partikular :

$$\left.\frac{dw}{dt}\right]_{w=w_o} = f'(z_o) \left.\frac{dz}{dt}\right]_{z=z_o} \qquad \text{.........} \; (2.13)$$

Karena f(z) analitik pada R maka $\left.\dfrac{dw}{dt}\right]_{w=w_o}$, $f'(z_o)$, dan $\left.\dfrac{dz}{dt}\right]_{z=z_o}$ mempunyai harga tertentu .Dan jika dimisalkan masing masing mempunyai harga $\rho_o e^{i\phi_o}$,$R e^{i\alpha}$ dan $r_o e^{i\theta_o}$ maka dari persamaan

(2.13) didapatkan :

$$\rho_o e^{i\phi_o} = R\, r_o\, e^{i(\theta_o + \alpha)}$$

dimana berlaku :

$$\phi_o = \theta_o + \alpha = \theta_o + \arg f'(z_o)$$

Dan karena $f'(z_o) \neq 0$,maka dikatakan bahwa kurva ∂D pada bidang Z dirotasikan dengan sudut putar arg $f'(z_o)$,yang hasilnya yaitu kurva $\partial D'$ pada bidang W

Karena kurva ∂D adalah kurva sembarang pada bidang R , maka untuk semua kurva yang terdapat pada bidang R berlaku juga sifat diatas ,sehingga dengan sendirinya pemetaan w = f(z) dimana f(z) analitik dan $f'(z) \neq 0$ adalah pemetaan yang konformal pada semua titik bidang R.

Fenomena Rieman Pada Pemetaan

Misalkan C adalah sebuah kurva tertutup sederhana yang membatasi suatu daerah R dari bidang Z . Dan misalkan C' adalah lingkaran berjari-jari satu yang berpusat pada titik asal koordinat , dimana C' membatasi suatu daerah R' dari bidang W , maka fenomena Rieman menyatakan bahwa terdapat satu fungsi w = f(z) yang analitik pada R , dimana fungsi tersebut memetakan setiap titik dari R pada titik yang berhubungan dari R' dan memetakan setiap titik dari C pada titik yang berhubungan dari C' , dimana hubungan yang terjadi adalah suatu relasi yang berkorespondensi satu satu.