BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. HIMPUNAN

Definisi 1.

Himpunan adalah suatu daftar, kumpulan atau klas dari obyek - obyek yang terdefinisi dengan jelas. Obyek - obyek ini disebut elemen atau anggota dari himpunan. Biasanya himpunan dinyatakan dengan huruf besar dan anggota himpunan dituliskan dengan huruf kecil.

Contoh 1.

Misal A suatu himpunan yang terdiri dari a,b,c,d maka A dapat dituliskan sebagai :

$$A = \{ a,b,c,d \}.$$

Diberikan notasi yang umum dari himpunan :

a. $x \in X$ menyatakan x anggota dari himpunan X

b. $A \subseteq X$ menyatakan A subset X.

c. $|X|$ menyatakan kardinalitas dari X yaitu banyaknya anggota X

d. Interseksi antara dua himpunan A dan B ditulis $A \cap B$.

e. Union antara himpunan A dan B ditulis $A \cup B$ dimana A dan B subset X. Jika A dan B subset yang saling asing, operasi union ditulis dengan tanda "+", yaitu :

$C = A + B$ menyatakan $C = A \cup B$ dimana $A \cap B = \emptyset$ dan $\emptyset$ menyatakan himpunan kosong.

Contoh 2.

Diberikan himpunan $X = \{a,b,c,d,e\}$; $A = \{a,b,c\}$; $B = \{b,c,d\}$; $C = \{d,e\}$, maka :

-. $a \in X$.

-. $|X| = 5$.

-. $A \subseteq X$.

-. $A \cup B = \{a,b,c,d,\}$.

-. $A + C = \{a,b,c,d,e\}$.

Definisi 2.

a. Suatu kumpulan subset (himpunan bagian) dari himpunan X, $\{X_i\}i\in I$, disebut cover X jika union subset - subset itu sama dengan X.

b. Suatu kumpulan subset dari himpunan X, $\{X_i\}i\in I$, disebut partisi dari X jika subset - subset itu saling asing dan union dari subset - subset tersebut sama dengan X.

Contoh 3.

Misal $X = \{a,b,c,d,e\}$, maka :

a. Kumpulan $\{\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{d,e\}\}$ disebut Cover X.

b. Kumpulan $\{\{a,b\},\{c,d\},\{e\}\}$ disebut partisi dari X.

Definisi 3.

Himpunan kuasa (power set) dari himpunan X, ditulis $\mathcal{P}(X)$, adalah kumpulan dari seluruh subset himpunan X.

Contoh 4.

Diberikan himpunan X = {a,b,c} maka

$\mathcal{P}(X) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\emptyset \}$.

2.2 FUNGSI DAN RELASI

Definisi 4.

Misal X dan Y himpunan. Suatu fungsi (atau pemetaan) f dari X ke Y ditulis dengan

$$f : X \longrightarrow Y$$

adalah suatu aturan yang mana setiap x anggota X menentukan dengan tunggal y, satu anggota Y. y disebut bayangan (image) dari x terhadap f dan ditulis dengan

$y = f(x)$.

Definisi 5.

a. Fungsi f disebut fungsi injektif atau satu - satu jika untuk setiap dua anggota yang berlainan dalam X, mempunyai bayangan yang berlainan dalam Y, yaitu,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in X),$$

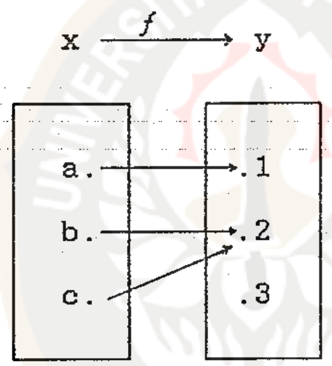
atau,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad (x_1, x_2 \in X).$$

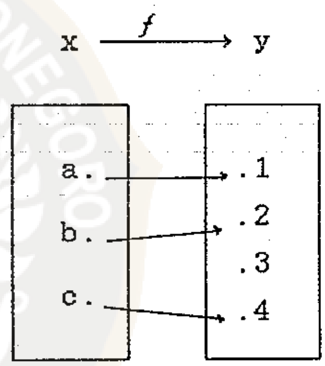
b. Fungsi f disebut surjektif atau onto jika setiap y anggota Y adalah bayangan dari x anggota X, yaitu, $(\forall\ y \in Y)\ (\exists x \in X)$ sedemikian hingga $y = f(x)$.

c. Fungsi f disebut bijektif jika f injektif dan surjektif.

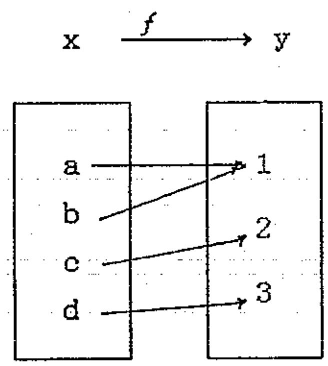
Contoh 5.



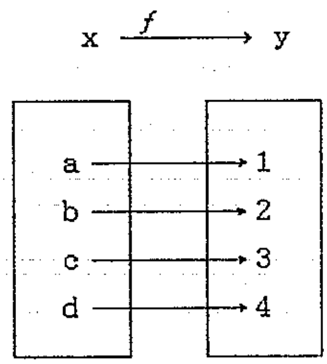
f.suatu fungsi



fungsi injektif



fungsi surjektif



fungsi bijektif

Definisi 6.

Suatu relasi binair pada X adalah fungsi

$$R : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

dari X ke himpunan kuasa X.

Bayangan dari x terhadap R adalah subset $R(x) \subseteq X$ dan disebut himpunan relasi dari x, untuk setiap $x \in X$. Relasi R merupakan kumpulan pasangan berurut $\mathcal{R} \subseteq X \times X$, dimana

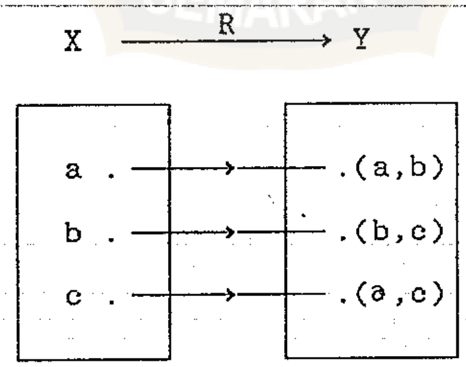
$$(x,y) \in \mathcal{R} \text{ jika hanya jika } y \in R(x).$$

Dikatakan y berelasi dengan x. Dan ini tidak harus berarti x berelasi dengan y.

Contoh 6.

Diberikan himpunan $X = \{a,b,c\}$.

Dan relasi R pada X dinyatakan dengan :



maka :

-. (a,b) merupakan bayangan a dan disebut himpunan relasi dari a.

-. $(a,b) \in \mathcal{R}$, dan dikatakan b berelasi dengan a.

Definisi 7.

Suatu relasi binair pada X dapat memenuhi salah satu atau lebih sifat dibawah ini :

-. Sifat Simetrik

$y \in R(x) \Rightarrow x \in R(y) \qquad (x,y \in X),$

-. Sifat Antisimetrik

$y \in R(x) \Rightarrow x \notin R(y) \qquad (x,y \in X),$

-. Refleksif.

$x \in R(x) \qquad (x \in X),$

-. Irrefleksif.

$x \notin R(x) \qquad (x \in X),$

-. Transitif.

$z \in R(y),\ y \in R(x) \Rightarrow z \in R(x) \qquad (x,y,z \in X).$

Suatu relasi disebut ekuivalen jika relasi tersebut memenuhi refleksif, simetrik dan transitif.

Contoh 7.

Relasi "kesejajaran" antara garis - garis lurus merupakan relasi ekuivalensi, karena memenuhi :

a. Sifat refleksif , yaitu g //g.

b. Sifat simetrik , yaitu jika g//h maka h//g.

c. Sifat transitif , yaitu jika g//h dan h//l maka g//l.

Definisi 8.

Suatu relasi binair disebut strict partial order jika relasi tersebut memenuhi sifat irrefleksif dan transitif.

Contoh 8.

Diberikan himpunan X = {a,b,c} dan Y = {(a,b),(a,c),(b,c)} himpunan garis. Maka R : X$\longrightarrow$Y,merupakan relasi strict partial order karena memenuhi sifat :

-. Irrefleksif yaitu $(a,a) \notin R(x)$.

-. Transitif yaitu $(a,b) \in R(x)$ dan $(b,c) \in R(x) \Rightarrow$
   $(a,c) \in R(x)$.

2.3 GRAPH.

Definisi 9.

Suatu graph G terdiri dari himpunan berhingga V dan relasi binair irrefleksif pada V. V disebut himpunan titik (vertek). Dan relasi binair merupakan kumpulan pasangan berurut E atau fungsi dari V ke himpunan kuasanya,

$$\text{Adj.} : V \longrightarrow \mathcal{P}(V).$$

Adj(v) disebut himpunan adjacency (adjacency set) dari titik v dan pasangan berurut $(v,w) \in E$ disebut garis (edge). Jadi,

$$(v,w) \in E \text{ jika hanya jika } w \in adj(v).$$

Dalam hal ini dikatakan w adjacent ke v dan v ,w disebut titik ujung (endpoint) dari garis (v,w). Pengertian irrefleksif disini adalah :

$$(v,v) \notin E \qquad (v \in V),$$

atau ekuivalennya :

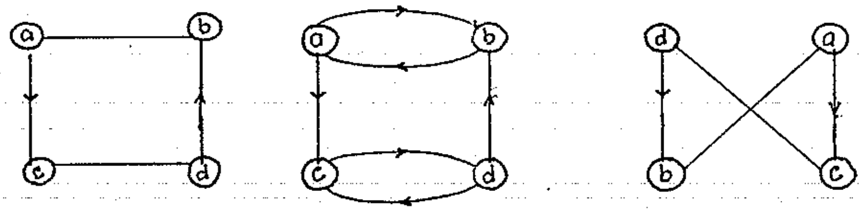
$$v \notin adj(v) \qquad (v \in V).$$

Pada pembicaraan ini garis dinyatakan dengan $xy \in E$ atau $(x,y) \in E$.

Selain definisi di atas, graph juga dinyatakan dengan gambar. Salah satunya adalah gambar suatu lingkaran (circle) untuk menyatakan titik dan garis dengan anak panah yang menghubungkan titik x dan titik y menyatakan xy suatu garis. Jika xy dan yx keduanya merupakan garis dinyatakan dengan garis tanpa anak panah.

Contoh 9.

Pandang gambar,



Gb. 1

(a) (b) (c)

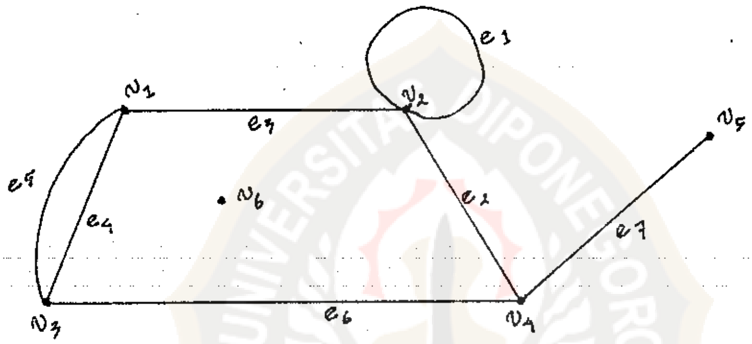
Gb. 1. memperlihatkan tiga kemungkinan gambar dari graph yang sama.

Definisi 10.

Suatu garis yang mempunyai titik awal dan titik akhir sama disebut loop.

Contoh 10.

Pandang gambar,



gb. 2

Garis e_1 pada gb.2 merupakan suatu loop.

Definisi 11.

Garis paralel adalah garis - garis yang menghubungkan sepasang titik yang sama.

Contoh 11.

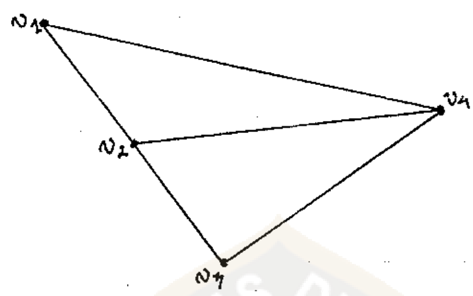
Garis e_4 dan garis e_5 pada gambar 2 merupakan garis paralel.

Definisi 12.

Suatu graph yang tidak mempunyai loop maupun garis paralel disebut graph sederhana (simple graph).

Contoh 12.

Gambar 3 merupakan suatu graph sederhana.



gambar 3

Definisi 13.

Jika sebuah titik v_i adalah titik ujung dari suatu garis e_j, maka v_i dan e_j dikatakan saling insident.

Contoh 13.

Pandang gambar 2 garis e_2, e_6 dan e_7 adalah insident dengan titik v_4.

Definisi 14.

Dua garis non paralel disebut adjacent (bertetangga)jika insident pada titik yang sama, jika tidak demikian disebut non adjacent. Dan dua titik disebut adjacent jika merupakan titik ujung dari garis yang sama.

Contoh 14.

Pandang gambar 2 garis e_6 dan e_7 adalah adjacent dan garis e_3 dan e_6 nonadjacent. Titik v_4 dan v_5 adjacent, dan v_1 dan v_4 tidak adjacent.

Definisi 15.

Misal G = (V,E) suatu graph dengan himpunan titik V dan himpunan garis E.

Graph $G^{-1} = (V,E^{-1})$ dikatakan kebalikan dari G, dimana

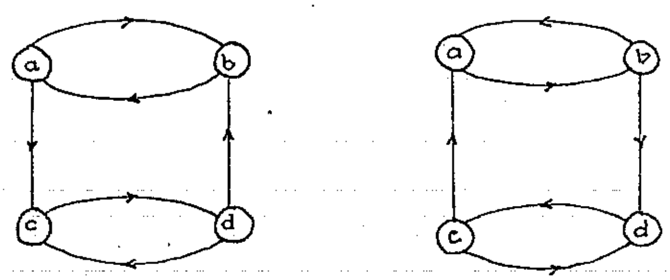
$$E^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in E\},$$

yaitu,

$$xy \in E^{-1} \Longleftrightarrow yx \in E \quad (x,y\ V).$$

Contoh 15.

Pandang gambar di bawah ini maka graph pada gambar 4(b) merupakan kebalikan dari graph pada gambar 4(a).



(a) (b)

Gb. 4.

Definisi 16.

Penutup simetrik dari G, didefinisikan sebagai graph $\hat{G} = (V,\hat{E})$, dimana

$$\hat{E} = E \cup E^{-1}.$$

Definisi 17.

Suatu graph G = (V,E) disebut tak berarah (undirected) jika relasi adjacencynya simetrik, yaitu, jika

$$E = E^{-1},$$

atau ekuivalennya,

$$E = \hat{E}.$$

Suatu garis tak berarah (undirected edge) dinyatakan dengan $\widehat{ab} = \{ab\} \cup \{ba\}$. Jadi graph tak berarah adalah graph dengan garis - garis yang menghubungkan titik - titiknya merupakan garis - garis tak berarah (garis tanpa anak panah).

Contoh 16.

Graph pada gambar 2 dan gambar 3 merupakan graph tak berarah.

Definisi 18.

Suatu graph G = (V,E) disebut graph berarah (directed graph atau digraph)jika garis yang menghubungkan x (titik awal) dan y (titik akhir) merupakan garis berarah (garis dengan anak panah).

Contoh 17.

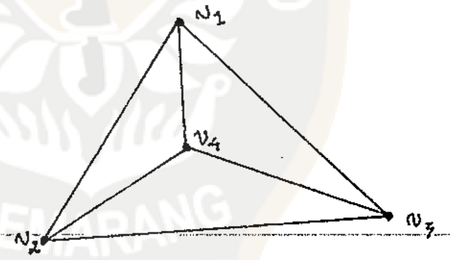
Graph pada gambar 4 merupakan graph berarah.

Definisi 19.

Suatu graph disebut lengkap jika setiap pasang titik pada graph tersebut adjacent(langsung dihubungkan oleh satu garis). Graph lengkap dengan n titik dinyatakan dengan Kn.

Contoh 18.

Graph pada gambar 5 merupakan graph lengkap dengan 4 titik, ditulis dengan K_4.



Gambar 5

Definisi 20.

Misal G = (V,E) suatu graph tak berarah. Komplemen dari G didefinisikan sebagai graph $\bar{G} = (V,\bar{E})$, di mana

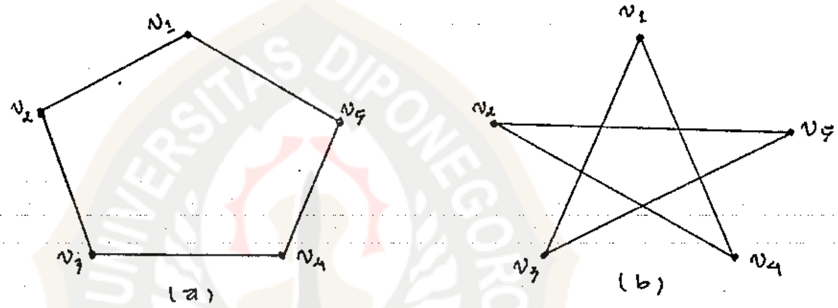
$$\bar{E} = \{(x,y) \in V \times V \mid x \neq y \text{ dan } (x,y) \notin E\},$$

jadi garis - garis dari G bukan garis dari $\bar{G}$ dan sebaliknya. Komplemen dari G, $\bar{G} = (V,\bar{E})$ dapat juga didefinisikan sebagai graph dengan himpunan $\overline{E}$ yang memenuhi,

$$E \cap \bar{E} = \emptyset \text{ dan } E + \bar{E} \text{ lengkap.}$$

Contoh 19.

Pandang gambar dibawah ini



gambar 6

Graph pada gambar 6(b) merupakan komplemen dari graph pada gambar 6(a) dan sebaliknya.

Definisi 21.

Jumlah garis - garis insident pada suatu titik v_i, dengan loop dihitung dua kali, disebut derajat (degree) dari titik v_i, ditulis dengan $d(v_i)$.

Contoh 20.

Pandang gambar 2, $d(v_1) = d(v_3) = d(v_4) = 3$; $d(v_2) = 4$; $d(v_5) = 1$; $d(v_6) = 0$.

Definisi 22.

Suatu titik yang tidak mempunyai garis insident disebut titik terasing (isolated vertex). Atau dengan kata lain, titik terasing adalah titik dengan derajat nol.

Contoh 21.

Pandang gambar 2, titik v_6 merupakan titik terasing.

Definisi 23.

Suatu titik dengan derajat satu disebut pendant vertex atau end vertex (titik akhir).

Contoh 22.

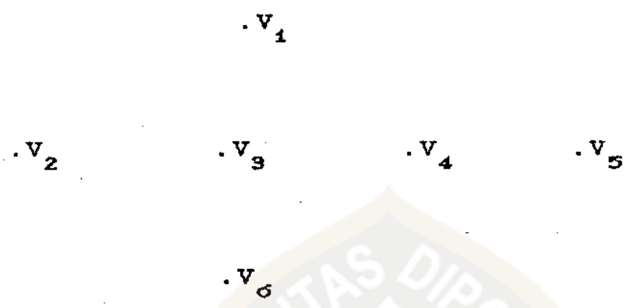
Pandang gambar 2 , titik v_5 merupakan pendant vertex.

Definisi 24.

Suatu graph tanpa suatu garis disebut null graph (graph nol). Dengan kata lain, setiap titik dalam null graph adalah titik terasing.

Contoh 23.

Pandang gambar 7



gambar 7

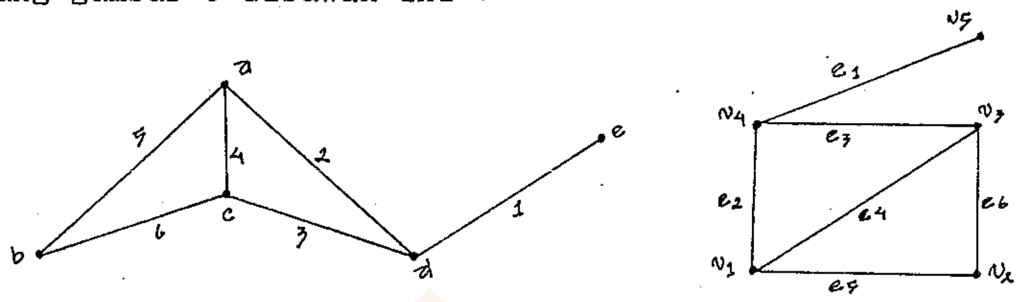
Gambar 7 merupakan null graph dari enam titik

Definisi 25.

Dua graph G dan G′ dikatakan saling isomorfik, dituliskan $G \simeq G'$, jika terdapat korespondensi satu - satu diantara titik -titik G dan G′ dan diantara garis -garis G dan G′ sedemikian hingga relasi insidensi dipenuhi. Dengan kata lain, misalkan garis e insident pada titik v_1 dan v_2 dalam G, maka garis e′ dalam G′ harus insident pada titik -titik v_1' dan v_2' yang masing - masing bersesuaian dengan titik v_1 dan v_2.

Contoh 24.

Pandang gambar 8 dibawah ini :



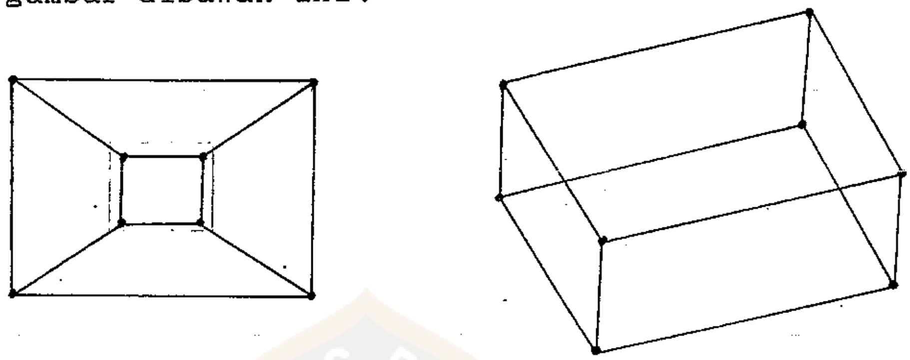
gambar 8

Dua graph pada gambar 8 adalah isomorfik. Korespondensi diantara dua graph diatas adalah sebagai berikut : Titik a,b,c,d dan e masing - masing bersesuaian ke v_1, v_2, v_3, v_4 dan v_5. Garis 1,2,3,4,5 dan 6 masing - masing bersesuaian ke e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, dan e_6.

Kecuali pemberian nama dari titik -titik dan garis garis graph yang berbeda, graph isomorfik merupakan graph yang sama yang digambar berbeda, karena graph dapat digambar dalam beberapa cara yang berbeda.

Contoh 25.

Pandang gambar dibawah ini :



gambar 9

Kedua graph di atas merupakan graph isomorfik.

Dari definisi isomorfisma didapat, dua graph isomorfik harus mempunyai :

1. Jumlah titik - titik sama.
2. Jumlah garis - garis sama.
3. Terdapat kesamaan jumlah titik dengan degree yang sama.

Tetapi keadaan ini tidak cukup. Hal ini akan lebih diperjelas lewat contoh dibawah ini.

Contoh 26.

Diberikan graph seperti gambar dibawah ini

gambar 10

Dua graph pada gambar 10 memenuhi ketiga keadaan diatas tetapi keduanya tidak isomorfik. Untuk memperlihatkan bahwa graph pada gambar 10(a) dan (b) tidak isomorfik dapat diperlihatkan sebagai berikut :

Jika graph pada gambar 10(a) isomorfik pada (b), maka titik x harus bersesuaian dengan y, karena tidak terdapat titik lain (selain titik y) yang berderajat tiga. Selanjutnya pada (b) hanya terdapat satu titik akhir w yang adjacent ke y dan pada (a) terdapat dua titik akhir (pendant vertex), u dan v yang adjacent ke x.

Definisi 26.

Suatu Subgraph dari graph G = (V,E) didefinisikan sebagai graph H = (V′,E′) yang memenuhi $V' \subseteq V$ dan $E' \subseteq E$.

Dua jenis subgraph yang banyak digunakan pada pembahasan selanjutnya yaitu subgraph yang direntang oleh subset dari garis - garis dan subgraph yang dibentuk oleh subset dari titik - titik.

Definisi 27.

Suatu subset $S \subseteq E$ dari garis - garis merentang subgraph $H=(V_s,S)$ dengan $V_s = \{v \in V \mid v$ titik ujung dari suatu garis dari $S\}$. H disebut subgraph yang direntang oleh S.

Definisi 28.

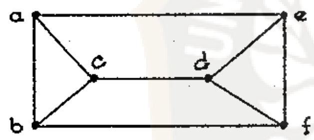
Diberikan suatu subset $A \leq V$ dari titik - titik. Subgraph yang dibentuk oleh A didefinisikan sebagai graph $G_A=(A,E_A)$, dengan

$$E_A = \{xy \in E \mid x \in A \text{ dan } y \in A\}.$$

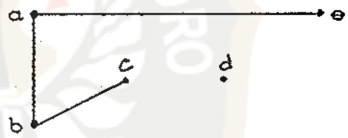
Untuk setiap $v \in A$ didapat $Adj_A(v) = Adj(v) \cap A$.

Contoh 27.

Pandang gambar dibawah ini :

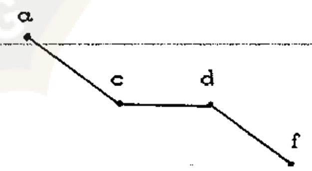


suatu graph G



suatu subgraph dari G

subset yg direntang oleh S={df,fd,ef,fe}



subgraph yang di bentuk G{a,e,d,f}

gambar 11.

Definisi 29.

Suatu rantai (chain) didefinisikan sebagai suatu barisan berhingga dari titik - titik dan garis - garis bergantian yang berawal dan berakhir dengan titik, sedemikian hingga setiap garis insident dengan titik pendahulu dan berikutnya. Rantai disebut juga walk atau edge train.

Dalam suatu rantai tidak terdapat garis yang muncul dua kali tetapi suatu titik boleh muncul lebih dari satu kali (berulang).

Definisi 30.

Titik -titik di mana suatu rantai berawal dan berakhir disebut titik akhir (terminal vertex).

Definisi 31.

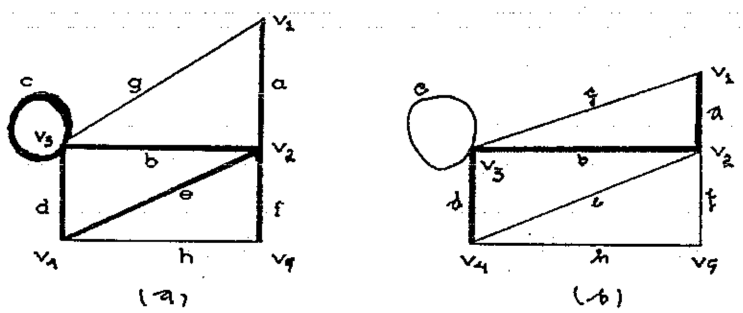
Suatu rantai yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut rantai tertutup (closed chain).

Definisi 32.

Dan suatu rantai dengan titik - titik akhirnya berbeda disebut suatu rantai terbuka (open chain).

Contoh 28.

Pandang graph dibawah ini :



Gambar 12.

*. Pada gambar 12(a), barisan $v_1av_2bv_3cv_3dv_4ev_2fv_5$ merupakan suatu rantai (walk), yang dinyatakan dengan garis tebal.

*. Titik v_1 dan v_5 merupakan titik -titik akhir dari rantai pada gambar 12(a).

*. Rantai pada gambar 12(a) merupakan rantai terbuka.

Definisi 33.

Suatu rantai terbuka dimana tidak terdapat titik yang muncul lebih dari satu kali disebut lintasan (path) atau lintasan sederhana (simple path) atau lintasan dasar (elementary path). Jumlah garis dalam suatu lintasan disebut panjang lintasan (lengh of path).

Contoh 29.

Dalam gambar 12(b), $v_1av_2bv_3dv_4$ merupakan suatu lintasan dengan panjang tiga.

Definisi 34.

Suatu rantai tertutup dimana tidak terdapat titik (kecuali titik awal dan titik akhir) yang muncul lebih dari satu kali disebut suatu circuit. Suatu circuit juga disebut suatu cycle, elementary cycle, circular path dan poligon.

Contoh 30.

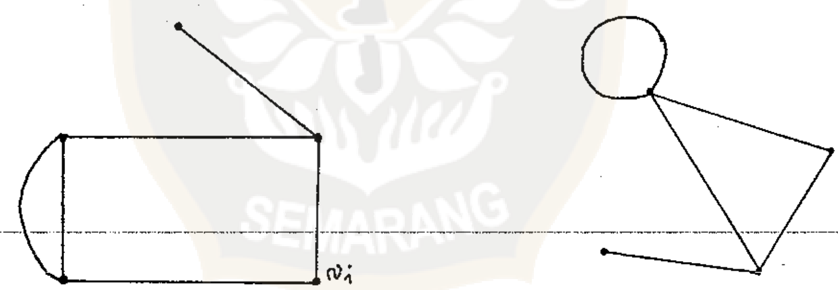
Pandang gambar 12(a), $v_2bv_3dv_4ev_2$ merupakan suatu circuit.

Definisi 35.

Suatu graph G disebut terhubung (connected) jika paling sedikit terdapat satu lintasan diantara setiap pasang titik dalam G, jika tidak demikian G disebut disconnected(tidak terhubung).

Contoh 31.

Diberikan graph seperti gambar dibawah ini:



Gambar 13

Graph pada gb 13 merupakan graph tak terhubung sedang graph pada gb.12(a) graph terhubung. Jadi suatu graph tak terhubung terdiri dari dua atau lebih graph terhubung.

Definisi 36.

Setiap subgraph terhubung (connected subgraph) dari graph tak terhubung disebut komponen.

Contoh 32.

Pandang gambar 13, maka graph pada gambar tersebut terdiri dari dua komponen.

Cara lain untuk menentukan suatu komponen adalah sebagai berikut : diberikan suatu titik v_i dalam suatu graph tak berarah G. Dengan definisi komponen, tidak seluruh titik - titik dari G dihubungkan oleh suatu lintasan ke v_i. Titik v_i dan seluruh titik - titik dari G yamg mempunyai lintasan ke v_i, bersama dengan seluruh garis - garis yang insident pada titik - titik tersebut, membentuk suatu komponen.

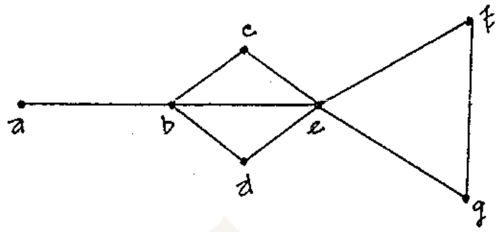
Jelaslah, suatu komponen merupakan graph dari komponen itu sendiri.

Definisi 37.

Suatu himpunan titik - titik dalam suatu graph disebut himpunan independent (independent set) atau himpunan stabil (stable set) jika tidak terdapat dua titik dalam himpunan tersebut yang adjacent.

Contoh 33.

Pandang gambar berikut :



gambar . 14

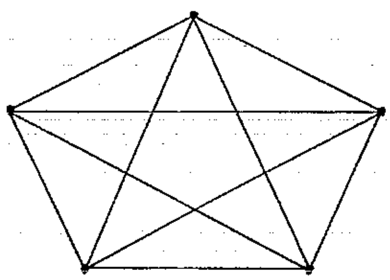
Maka himpunan titik X = {a,,c,d} merupakan himpunan stabil.

Definisi 38.

Rank r dari suatu graph dengan n titik dan c komponen didefinisikan sebagai r = n-c.

Contoh 34.

Pandang gambar di bawah ini :



gambar 15

Maka rank dari graph pada gambar 15 adalah :

$$
\begin{aligned}
r &= n-c \\
&= 5-1 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Definisi 39.

Nullitas (nullity) m dari suatu graph dengan b garis, n titik dan c komponen didefinisikan sebagai $m = b - n + c$ $(=b-r)$. Nullity disebut juga rank Circuit, rank cycle, Connectivitas (connectivity).

Contoh 35.

Pandang gambar 15, maka nullity dari graph pada ganbar tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
m &= b-n+c \\
&= 10-5+1 \\
&= 6.
\end{aligned}
$$