BAB II

MATERI DASAR

2.1 Fungsi Bervariabel Tunggal

Definisi 2 :

Diberikan himpunan A dan B , suatu aturan yang menghubungkan setiap elemen $x \in A$ dengan tepat satu elemen $y \in B$ disebut fungsi dengan notasi $y = f(x)$.

2.1.1 Nilai Mutlak

Definisi 3 :

Jika untuk setiap $a \in R$ maka nilai mutlak dari a dinotasikan dengan $|a|$ dan didefinisikan oleh

$$|a| = a \quad \text{jika } a \geq 0,$$
$$= -a \quad \text{jika } a < 0.$$

Theorema 1 :

Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku

1. $|ab| = |a|\,|b|$.
2. Jika $c \geq 0$ maka $|a| \leq c$ bila dan hanya bila $-c \leq a \leq c$.
3. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

Bukti 1 :

Jika $a>0$, $b>0$ maka $ab > 0$ sehingga $|ab| = ab = |a|\,|b|$.

Jika $a<0$, $b<0$ maka $ab >0$ sehingga $|ab| = (-a)(-b) = |a|\,|b|$.

Jika $a<0$, $b>0$ maka $ab<0$ sehingga

$|ab| = -(ab) = -a(b) = |a||b|$.

Bukti 2 :

Jika $|a| \leq c$ maka $a \leq c$, $-a \leq c$ sehingga $-c \leq a \leq c$ akibatnya jika $a \leq c$ dan $-a \leq c$ terpenuhi maka $|a| \leq c$.

Bukti 3 :

Dari Theorema 1 no.2 jika $c=|a|$ dan $c=|b|$ maka $-|a| \leq a \leq |a|$ dan $-|b| \leq \pm b \leq |b|$ sehingga $-|a|-|b| \leq a \pm b$ dan $a \pm b \leq |a| + |b|$

Atau $|a \pm b| \leq |a|+|b|$.

2.1.2 Teori Limit Fungsi

Definisi 4 :

Diberikan fungsi f(x) terdefinisi dan bernilai tunggal disekitar titik $x = x_o$, fungsi f(x) mempumyai limit L yang dinotasikan dengan $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$ jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dapat ditemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ dengan $0<|x - x_o|< \delta$.

Theorema 2 :

Jika limit fungsi f(x) ada maka nilainya tunggal.

Bukti :

Jika $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)= L_1$ dan $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)= L_2$ maka $L_1=L_2$.

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat ditemukan bilangan $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ sedemikian sehingga $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ dengan $0<|x - x_o|<\delta_1$, $|f(x) -L_2|<\varepsilon/2$ dengan $0<|x - x_o|<\delta_2$.

Jika δ = minimum (δ_1, δ_2) maka

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq$$

$$|L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

$|L_1 - L_2| < \varepsilon$ karena $\varepsilon > 0$ diambil sembarang

maka $L_1 = L_2$ dengan $0 < |x - x_o| < \delta$.

Theorema 3 :

Jika $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L_1$ dan $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = L_2$

maka $\lim\limits_{x \to x_o} \left[f(x) + g(x) \right] = L_1 + L_2$.

Bukti :

Jika diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang maka dapat ditemukan $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ dengan $0 < |x - x_o| < \delta_1$. Jika diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang maka dapat ditemukan $\delta_2 > 0$ sedemikian sehingga $|g(x) - L_2| < \varepsilon/2$, $0 < |x - x_o| < \delta_2$. menurut theorema 1 no.3 maka diperoleh

Jika diambil $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ maka $|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| \leq$

$$|f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| <$$

$$\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

dengan $0 < |x - x_o| < \delta$.

Theorema 4 :

Jika $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L_1$ dan $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = L_2$

maka $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)g(x) = L_1 L_2$.

Bukti :

Jika diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang maka dapat ditemukan $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - L_1| < \varepsilon_1$ dengan $0 < |x - x_o| < \delta_1$, $|g(x) - L_2| < \varepsilon_2$ dengan $0 < |x - x_o| < \delta_2$.

Jika diambil $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 < \varepsilon/3$, $\varepsilon_1 < \varepsilon/3|L_2|$ dan $\varepsilon_2 < \varepsilon/3|L_1|$ maka menurut theorema 1 no.3 maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
|f(x)\,g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - L_2f(x) - L_1g(x) + L_1L_2 \\
&\quad + L_2f(x) - L_1L_2 + L_1g(x) - L_1L_2\,| \\
&= |(f(x)-L_1)(g(x) - L_2) + L_2(f(x)-L_1) \\
&\quad + L_1(g(x) - L_2)\,| \\
&\le |(f(x)-L_1)|\,|(g(x)-L_2)| + |L_2|\,|(f(x)-L_1)| \\
&\quad + |L_1|\,|(g(x) - L_2)\,| \\
&\le \varepsilon_1\varepsilon_2 + |L_2|\ \varepsilon/3|L_2| + |L_1|\ \varepsilon/3|L_1| \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon
\end{aligned}
$$

dengan $0 < |x - x_o| < \delta$.

2.1.3 Kontinuitas Fungsi

Definisi 5 :

Fungsi $f(x)$ dikatakan kontinu di titik $x = c$ Jika untuk sembarang bilangan $\varepsilon > 0$ dapat ditemukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)-f(c)| < \varepsilon$ dengan $|x - c| < \delta$.

Dari definisi 5 jika f(x) kontinu di titik x=c maka

1. f(c) harus ada
2. $\lim_{x \to c} f(x) = L$ harus ada
3. f(c) = L

Contoh 2 :

Buktikan bahwa $f(x) = x^2$ kontinu di x = 2.

Bukti :

Harus diperlihatkan bahwa f(x) memenuhi tiga syarat

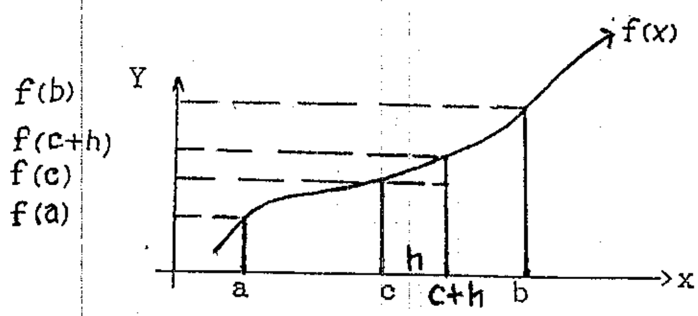
1. f(2) = 4
2. $\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$
3. $\lim_{x \to 2} x^2 = f(2)$ terbukti.

2.1.4 Turunan Fungsi

Definisi 6 :

Jika fungsi f(x) terdefinisi disetiap titik x=c pada (a,b) maka turunan dari f(x) di x = c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$ jika limit ada.



Grafik 1.

Definisi 7 :

Fungsi f(x) disebut differensiabel di $x = c$ jika fungsi tersebut mempunyai turunan di titik tersebut.

Theorema 5 :

Jika f(x) differensiabel di titik $x = c$ maka f(x) harus kontinu di titik tersebut.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Diambil $f(x) = f(c) + \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}(x-c)$ dengan $x \neq c$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x-c)$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \to c} (x-c)$$

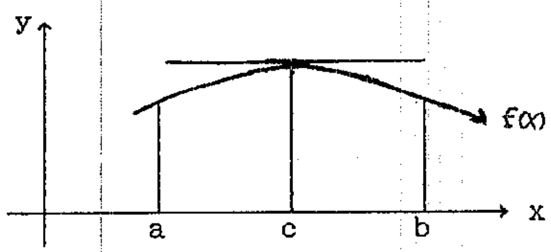
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) + f'(c).0 = f(c) \text{ tebukti.}$$

Theorema 6 :

Jika fungsi f(x) terdefinisi pada interval [a,b] dan mempunyai nilai maksimum atau minimum di titik $x = c$, $c \in (a,b)$ dan jika fungsi f(x) differensiabel di titik $x = c$ maka $f'(c) = 0$.

Bukti :

Jika f(x) maksimum di titik $x = c$ berarti $f(c) \geq f(c+h)$ atau $f(c+h) - f(c) \leq 0$.



Grafik 2.

Untuk h > 0 maka $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$

atau $f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$ .... persamaan (1)

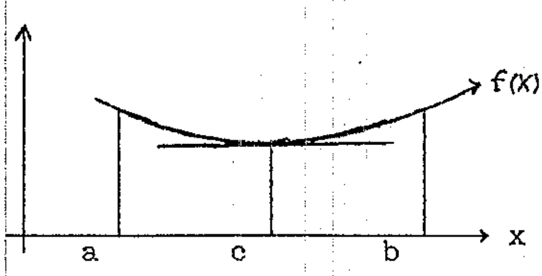
Untuk h < 0 maka $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$

atau $f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$ .... persamaan (2)

Dari Persamaan (1) dan persamaan (2) maka $0 \leq f'(c) \leq 0$.

karena $f'(c)$ ada maka $f'(c) = 0$.

Jika f(x) minimum di titik x = c berarti $f(c) \leq f(c+h)$ atau $f(c+h) - f(c) \geq 0$.



Grafik 3.

untuk h > 0 maka $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$

atau $f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$ .....persamaan (3)

Untuk h < 0 maka $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$

atau $f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$ .....persamaan (4)

Dari persamaan (3) dan persamaan (4) maka $0 \leq f'(c) \leq 0$.
karena $f'(c)$ ada maka $f'(c) = 0$ terbukti.

Theorema 7 : (teori Rolle)

Fungsi $f(x)$ differensiabel pada (a,b) dan kontinu pada $[a,b]$. Jika $f(a) = f(b) = 0$ maka paling sedikit ada sebuah titik $c \in (a,b)$ sedemikian sehingga $f'(c) = 0$ untuk setiap titik $c \in (a,b)$.

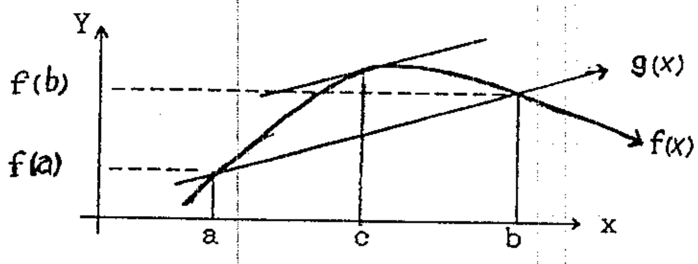
Bukti :

Jika $f(x)=0$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka $f'(x)=0$.
Jika $f(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka $f(x) > 0$ atau $f(x) < 0$. Jika $f(x) > 0$ maka $f(x) > f(a)$ atau $f(x) > f(b)$. Jika $f(x) < 0$ maka $f(x) < f(a)$ atau $f(x) < f(b)$. Sehingga menurut theorema 6 $f(x)$ mempunyai nilai maksimum atau minimum di titik $c \in [a,b]$ dengan $f(a) = f(b) = 0$. Karena $f(x)$ differensiabel di titik $c \in (a,b)$ maka $f'(c) = 0$.

Theorema 8 :(teori nilai tengah)

Jika $f(x)$ adalah differensiabel pada (a,b) dan kontinu pada $[a,b]$ maka ada titik $x = c$, $c \in (a,b)$ sedemikian sehingga $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Bukti :



Grafik 4.

Ambil $s(x) = f(x) - g(x)$ .... persamaan (5)

dengan $g(x)$ adalah garis yang melalui titik $(a,f(a))$ dan $(b,f(b))$.

Jadi $\dfrac{g(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .... persamaan (6)

$$\frac{x - a}{b-a} = \frac{g(x) - f(a)}{f(b)-f(a)}$$

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$g(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ sehingga

$s(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ dengan

$s(x)$ kontinu pada $[a,b]$, $s(a) = s(b) = 0$ dan diferensiabel di titik $c \in (a,b)$ maka menurut theorema 7 $s'(c) = 0$.

$$s'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$s'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

jadi $0 = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ terbukti.

Theorema 9 : (nilai tengah cauchy)

Jika f(x) dan g(x) differensiabel pada (a,b) dan kontinu pada [a,b] maka ada sebuah bilangan $c \in (a,b)$ sedemikian sehingga $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Bukti :

Dari persamaan (6) diperoleh

$$\frac{(f(x) - f(a))/(x-a)}{(g(x) - g(a))/(x-a)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Diambil $G(x) = [f(x) - f(a)][g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)]$.

Karena G(x) kontinu pada [a,b] , G(a) = G(b) =0 dan diferensiabel di titik $c \in (a,b)$ maka menurut theorema 7 $G'(c) = 0$. Jika G(x) diturunkan ke x maka diperoleh

$$G'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)]g'(x)$$

$$G'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)]g'(c)$$

$$0 = f'(c)[g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)]g'(c)$$

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = [f(b) - f(a)]g'(c)$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$ terbukti.

Theorema 10 :

Jika f(x) dan g(x) differensiabel maka $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.

Bukti :

Diambil $\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$.

Menurut theorema 5 diperoleh

$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$f(x+h)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] + g(x)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$\lim_{h \to 0} f(x+h)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] + g(x)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] =$$

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) \lim_{h \to 0}\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] +$$

$$\lim_{h \to 0} g(x) \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h}$$

$f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = (fg)'(x)$ terbukti.

Theorema 11 : (aturan L'HOPITAL)

Jika $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada , $g'(x) \neq 0$ untuk setiap x cukup besar , $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ dan $\lim_{x \to \infty} f'(x)/g'(x)$ ada

maka $\lim_{x \to \infty} f(x)/g(x) = \lim_{x \to \infty} f'(x)/g'(x) = L$.

Bukti :

Diberikan sembarang $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon/2.$$

Menurut theorema 9 untuk setiap $x \in [a,b]$ berlaku

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - L\right| < \varepsilon/2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{pers. (6a).}$$

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}\right| < |L| + |\varepsilon/2|.$$

Diambil x cukup besar $x > a$, $f(x) > f(a)$, $g(x) > 0$

dan $\dfrac{f(x)}{f(x) - f(a)} \dfrac{g(x) - g(a)}{g(x)} < 1 + \dfrac{\varepsilon}{2|L| + \varepsilon}$.

Karena $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{f(x) - f(a)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{g(x) - g(a)}{g(x)} = 1$

maka $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}\right| =$

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \frac{f(x)}{f(x) - f(a)} \frac{g(x) - g(a)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}\right| =$$

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}\right| \left|\frac{f(x)}{f(x) - f(a)} \frac{g(x) - g(a)}{g(x)} - 1\right| <$$

$$\left(|L| + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\varepsilon}{2|L| + \varepsilon} = \varepsilon / 2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ \text{pers.(6b)}$$

Dari pers.(6a) dan pers.(6b) diperoeh

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} + \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - L\right| \leq$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}\right| + \left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon.$$

Jadi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f'(x)/g'(x) = L.$

2.1.5 Integral Fungsi

Di dalam matematika dikenal banyak operasi yang berpasangan diantaranya : penambahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian dan pemangkatan dengan penarikan akar. Begitu juga operasi turunan dengan anti turunan.

Definisi 8 :

Sebuah fungsi $F(x)$ disebut suatu anti turunan dari $f(x)$ pada $[a,b]$ jika $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in (a,b)$.

Theorema 12 :

Jika $F'(x) = G'(x)$ maka terdapat konstanta C sedemikian sehingga $F(x) = G(x) + C$ untuk setiap $x \in (a,b)$.

Bukti :

Diambil $H(x) = F(x) - G(x) = C$

$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$

Jika titik x_1 , $x \in (a,b)$ dan $x_1 \neq x$

Karena $H(x)$ diferensiabel pada (a,b) maka $H(x)$ kontinu pada $[x_1,x]$ maka menurut theorema 8 diperoleh

$H(x) - H(x_1) = H'(c)(x - x_1)$.

Karena $H'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$ maka $H'(c) = 0$

sehingga $H(x) - H(x_1) = 0.(x-x_1) = 0$.

atau $H(x) = H(x_1) = C$ untuk setiap $x \in (a,b)$.

Jadi $H(x) = F(x) - G(x)$

$H(x_1) = F(x) - G(x)$

$C = F(x) - G(x)$ atau $F(x) = G(x) + C$ terbukti.

Definisi 9 :

Jika f(a) ada maka $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Theorema 13 :

Fungsi f(x) Kontinu pada [a,b] jika G(x) adalah antiderivatif dari f(x) pada [a,b] maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Bukti :

Jika F(x) anti turunan dari f(x) pada [a,b] maka $F'(x) = G'(x)$ dan menurut theorema 12 diperoleh

$F(x) = G(x) + C$ untuk setiap $x \in (a,b)$.

Jika $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ .... persamaan (7)

menurut definisi 9 maka $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

Karena diketahui $F(x) = G(x) + C$ .... persamaan (8)

maka $F(a) = G(a) + C$

$0 = G(a) + C$ atau $C = - G(a)$

Sehingga dari persamaan (7) dan persamaan (8) diperoleh

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a)$

$F(b) = \int_a^b f(t) = G(b) - G(a)$ terbukti.

2.1.5.1 Integral Parsial

Jika pengintegralan fungsi dengan metode substitusi tidak memberikan hasil maka dengan metode pengintegralan parsial dapat memberikan hasil. Metode ini diperoleh dari theorema 10 yaitu :

$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

jika kedua ruas diintegralkan diperoleh

$\int (fg)'(x) = \int f'(x)g(x) + \int f(x)g'(x)$

$(fg)(x) = \int f'(x)g(x)\, dx + \int f(x)g'(x)\, dx$

$(fg)(x) - \int f'(x)g(x)\, dx = \int f(x)g'(x)\, dx$

$f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx = \int f(x)g'(x)\, dx$

2.1.5.2 Integral Tak Hingga

Definisi 10 :

Jika $\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$ dan

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

dan jika limit pada ruas kanan ada dan bernilai terhingga maka dikatakan integral tak wajar ruas kiri adalah konvergen dan mempunyai nilai terhingga dan jika tidak integral disebut divergen.

2.2 DERET FUNGSI TAK HINGGA

Definisi 11 :

Jika deret fungsi f(x) berbentuk

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

maka deret fungsi f(x) disebut deret tak hingga.

Definisi 12 :

Barisan fungsi $\{f_n(x)\}$ dikatakan konvergen ke f(x) pada interval (a,b) jika untuk setiap $\varepsilon>0$ dan untuk setiap $x\in(a,b)$ terdapat bilangan bulat positip $N(\varepsilon,x)$ sedemikian hingga untuk setiap $n\geq N(\varepsilon,x)$ berlaku $|f_n(x) - f(x)|<\varepsilon$.

Definisi 13 :

Barisan fungsi $\{ f_n(x) \}$ konvergen seragam ke f(x) pada interval (a,b) jika untuk setiap $\varepsilon>0$ ada bilangan bulat positip $N(\varepsilon)$ sedemikian hingga $|f_n(x)- f(x)|< \varepsilon$ untuk setiap $x \in (a,b)$ dengan $n \geq N(\varepsilon)$.

Theorema 14 :

Barisan fungsi $\{ f_n(x) \}$ konvergen seragam pada interval (a,b) bila dan hanya bila untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat bilangan bulat positip $N(\varepsilon)$ sedemikian hingga $|f_n(x)-f_m(x)| <\varepsilon$ untuk setiap $n, m\geq N(\varepsilon)$ dan setiap $x\in(a,b)$.

Bukti :

Jika barisan $\{f_n(x)\}$ konvergen seragam pada interval (a,b) maka jika diberikan sembarang $\varepsilon>0$ terdapat bilangan bulat positip $N(\varepsilon)$ sedemikian hingga $|f_n(x) - f(x)|<\varepsilon/2$, $|f_m(x) - f(x)|<\varepsilon/2$ untuk setiap $n\geq N(\varepsilon)$, $x \in(a,b)$ dan

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)+f(x)-f_m(x)| \leq$$
$$|f_n(x) - f(x)|+|f(x)-f_m(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Jika barisan $\{f_n(x)\}$ memenuhi kriteria cauchy maka jika diberikan $\varepsilon>0$ terdapat bilangan bulat positip $N(\varepsilon)$ sedemikian hingga untuk setiap $n,m\geq N(\varepsilon)$, $x\in(a,b)$ berlaku $|f_n(x) - f_m(x)|<\varepsilon$. Jika diambil setiap titik $x_o\in(a,b)$ maka ada barisan bilangan $\{f_n(x_o)\}$yang memenuhi kriteria cauchy sedemikian hingga untuk setiap $n,m\geq N(\varepsilon)$ berlaku $|f_n(x_o)-f_m(x_o)|<\varepsilon$. Karena himpunan semua bilangan riil R merupakan himpunan lengkap maka ada $f(x_o)\in R$ sedemikian hingga $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_o)=f(x_o)$.Jika diberikan $\varepsilon>0$ maka terdapat bilangan bulat positip $N(\varepsilon)$ sedemikian hingga untuk setiap $x\in(a,b)$ dan $n\geq N(\varepsilon)$ berlaku $|f_n(x)-f(x)| <\varepsilon$. Jadi barisan $\{f_n(x)\}$ konvergen seragam ke f(x) pada interval (a,b).

Definisi 14 :

Jika barisan jumlah parsial $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ konvergen seragam ke f(x) bila dan hanya bila deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergen seragam ke f(x) pada interval (a,b).

Theorema 15 : (uji M WEIERSTRASS)

Diberikan barisan fungsi $u_n(x)$ terdefinisi pada interval (a,b) dan andaikan terdapat barisan bilangan M_n non negatip sedemikian hingg $|U_n(x)| \leq M_n$, $n = 1, 2, \ldots$ untuk setiap $x \in (a,b)$.

Jika deret bilangan $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergen maka deret fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergen seragam pada interval (a,b).

Bukti :

Diambil $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, $f_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x)$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \ , \ T_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} M_k$$

diperoleh $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| = |u_n(x)|$

$$\leq T_n - T_{n-1}$$

$$\leq M_n \ , n = 1 , 2 , \ldots$$

untuk setiap $x \in (a,b)$.

Menurut definisi 12 jika M_n konvergen diperoleh

$$\lim_{n \to \infty} M_n = \lim_{n \to \infty} T_n - T_{n-1} = T - T = 0$$

Sehingga $\lim_{n \to \infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)| = 0$

dan menurut theorema 14 barisan $f_n(x)$ konvergen seragam paada (a,b). Jadi menurut definisi 14 diperoleh deret $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergen seragam pada interval (a,b).

2.3 PERSAMAAN DIFFERENSIAL LINIER ORDE SATU

Definisi 15 :

Persamaan differensial orde satu adalah suatu persamaan yang mengandung turunan pertama dari suatu fungsi yang tidak diketahui.

Definisi 16 :

Persamaan $y' = F(x,y)$ disebut linier jika $F(x,y)$ adalah fungsi linier dari y dan dapat ditulis kedalam bentuk $y' + P(x)\,y = Q(x)$.

Theorema 16 :

Jika $W(x)$ adalah fungsi yang mempunyai turunan didalam $a \le x \le b$ dan memenuhi pertidaksamaan $W'(x) \le k\,W(x)$ maka $W(x) \le W(a)\,e^{k(x-a)}$ untuk $a \le x \le b$ dan k adalah konstanta.

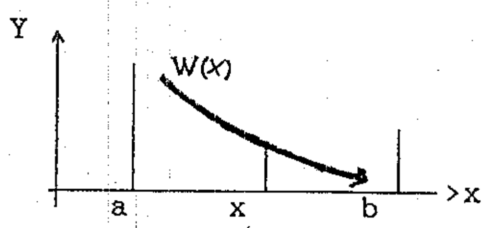
Bukti :

$$W'(x) \le k\,W(x)\ ,\ a \le x \le b$$

$$W'(x)\,e^{-kx} \le k\,W(x)\,e^{-kx}\ ,\ a \le x \le b$$

karena $e^{-kx} > 0$ maka $e^{-kx}\,(W'(x) - k\,W(x)) \le 0$ atau

$$\frac{d\,W(x)\,e^{-kx}}{dx} \le 0$$



Grafik 5.

akibatnya fungsi $W(x)\ e^{-kx}$ monoton turun di dalam $a \le x \le b$ sehingga diperoleh $W(x)\ e^{-kx} \le W(a)\ e^{-ka}$ atau $W(x) \le W(a)\ e^{k(x-a)}$, $a \le x \le b$.

Definisi 17 :

$y = f(x)$ disebut penyelesaian dari $y' = F(x,y)$ yang melalui titik $(x_o, y_o) \in D$ bila dan hanya bila

1. $y = f(x)$ kontinu di dalam domain D.
2. $y = f(x)$ mempunyai turunan kontinu di dalam $a \le x \le b$
3. $f'(x) = F(x,f(x))$
4. $f(x_o) = y_o$

Theorema 17 :

Diberikan persamaan $y' = F(x,y)$ yang memenuhi syarat awal $y(x_o) = y_o$, $(x_o,y_o) \in D$. Jika $F(x,y)$ dan $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ kontinu di dalam daerah

$$R = \left\{ (x,y) \;\middle|\; |x-x_o| \le a \ , \ |y-y_o| \le b \right\} , \ a>0 \ , \ b>0$$

yang melingkungi titik (x_o, y_o) maka ada bilangan $h>0$, $h \le a$ sedemikian hingga persamaan differensial di atas mempunyai penyelesaian tunggal di dalam interval $|x - x_o| \le h$.

Bukti :

Karena F dan $\frac{\partial F}{\partial y}$ kontinu maka ada bilangan $M > 0$, $L > 0$ sedemikian hingga $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \le L$, $|F(x,y)| \le M$ untuk setiap titik di dalam R. Menurut theorema 8 (teori nilai tengah) diperoleh

$$|F(x,y_2) - F(x,y_1)| = \left| \frac{\partial F(x,y_3)}{\partial y} (y_2 - y_1) \right|$$

$$|F(x,y_2) - F(x,y_1)| \leq L\ |(y_2 - y_1)| \quad \text{............ pers.}(8^*)$$

Didefinisikan $y_n(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} F(s,y_{n-1}(s))ds$, $n = 1, 2, \ldots$

dan $h = \min(a, b/M)$. Dengan melihat persyaratan $|F(x,y)| \leq M$ memenuhi penyelesaian $y(x)$, $y(x_o)$ tidak memotong garis miring M dan -M melalui titik (x_o,y_o).

$$y_n(x) - y_o = \int_{x_o}^{x} F(s,y_{n-1}(s))ds$$

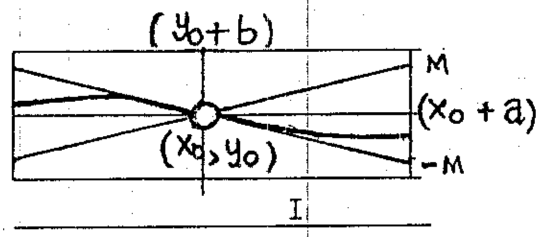
$$\left|y_n(x) - y_o\right| = \left| \int_{x_o}^{x} F(s,y_{n-1}(s))ds \right|$$

$$\left|y_n(x) - y_o\right| \leq \left| \int_{x_o}^{x} \left| F(s,y_{n-1}(s)) \right| ds \right|$$

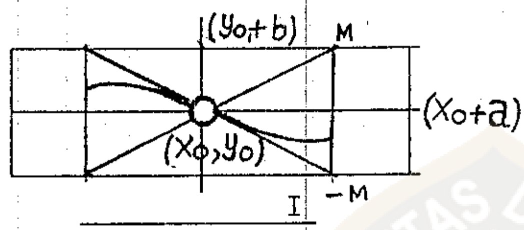
$$\left|y_n(x) - y_o\right| \leq M \left| \int_{x_o}^{x} ds \right|$$

$$|y_n(x) - y_o| \leq M|x - x_o| \leq b.$$

Panjang interval $|x - x_o| \leq h$ tergantung letak garis M dan -M pada daerah persegi panjang R. Jika garis M dan -M terletak pada sisi tegak dari persegi panjang R maka $h = a$.



Jika garis M dan -M tereletak pada sisi atas dan bawah dari persegi panjang R maka h = b/M.



akan dibuktikan $y_n(x)$ ada, kontinu dan tunggal didalam $|x - x_o| \le h$ memenuhi $|y_n(x) - y_o| \le b$.

a) $y_n(x)$ ada dan kontinu

Dibuktikan dengan induksi matematika :

Untuk n =0 benar maka $y_o(x) = y_o$ kontinu di dalam $|x-x_o| \le h$ sebab fungsi konstanta kontinu di sembarang titik memenuhi $|y_o(x) - y_o| \le b$.

Andaikan untuk n = k benar berarti $y_k(x)$ kontinu di dalam $|x-x_o| \le h$ memenuhi $|y_k(x) - y_o| \le b$

maka untuk n = k + 1 akan diperoleh

$$y_{k+1}(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} F(s,y_k(s))ds$$

$F(x,y)$ dan $y_k(x)$ kontinu maka $F(x,y_k(x))$ kontinu di dalam $|x-x_o| \le h$ memenuhi

$$\left|y_{k+1}(x) - y_o\right| = \left|\int_{x_o}^{x} F(s,y_k(s))ds\right|$$

$$\left|y_{k+1}(x) - y_o\right| \le \left|\int_{x_o}^{x} |F(s,y_k(s))|ds\right|$$

$$\le M \left|\int_{x_o}^{x} ds\right|$$

$$\le M \left|x - x_o\right| = M\ (b/M) = b$$

$$\left|y_{k+1}(x) - y_o\right| \le b.$$

b) $y_n(x)$ merupakan penyelesaian

Dengan membuktikan berlakunya

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| \le M \frac{L^{n-1}\ h^n}{n\ !}$$

Dengan induksi matemtika :

untuk n = 1 benar maka

$$\left|y_1(x) - y_o(x)\right| = \left|\int_{x_o}^{x} F(s,y_o(s))ds\right|$$

$$\le \left|\int_{x_o}^{x} |F(s,y_o(s))|ds\right|$$

$$\le M \left|\int_{x_o}^{x} ds\right|$$

$$\le M\ |x - x_o| = M\ h.$$

Jika untuk n = k benar maka

$$\left|y_k(x) - y_{k-1}(x)\right| \le M \frac{L^{k-1} h^k}{k\ !}.$$

Sehingga untuk n = k+1 diperoleh

$$\left| y_{k+1}(x) - y_k(x) \right| = \left| \int_{x_o}^{x} (F(s,y_k(s))ds - \int_{x_o}^{x} (F(s,y_{k-1}(s)))\, ds \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_o}^{x} \left| (F(s,y_k(s)) - F(s,y_{k-1}(s))) \right| ds \right|$$

$$\leq L \left| \int_{x_o}^{x} \left| y_k(s) - y_{k-1}(s) \right| ds \right|$$

$$\leq \frac{L\ M\ L^{k-1}}{k\ !} \left| \int_{x_o}^{x} \left| s - x_o \right|^k ds \right|$$

$$\leq \frac{M\ L^k\ h^{k+1}}{(k+1)\ !}$$ benar.

Didefinisikan :

$$y_n(x) = y_o + \sum_{k=1}^{n} (y_k(x) - y_{k-1}(x)) \quad \text{..... persamaan (9)}$$

$$y_n(x) - y_o = \sum_{k=1}^{n} (y_k(x) - y_{k-1}(x)).$$

Dari $y' = F(x,y)$ maka jika kedua ruas diintegralkan

diperoleh $\int_{x_o}^{x} y'(s)\, ds = \int_{x_o}^{x} F(x,y(s))\, ds$

$$y(x) - y(x_o) = \sum_{k=1}^{\infty} (y_k(x) - y_{k-1}(x))$$

$$y(x) = y(x_o) + \sum_{k=1}^{\infty} (y_k(x) - y_{k-1}(x)) \text{.....persamaan (10)}$$

Jika persamaan (9) dikurangkan dengan persamaan (10)

diperoleh $|y_n(x) - y(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |(y_k(x) - y_{k-1}(x))|$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{M\, L^{k-1}\, h^k}{k\,!}$$

$$\le \frac{M}{L} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(L\ h)^k}{k!} \le \frac{M}{L} \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(L\ h)^k}{k\ !}$$

$$\le \frac{M}{L} \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} e^{Lh}$$

$$\lim_{n \to \infty} |y_n(x) - y(x)| \le \lim_{n \to \infty} \frac{M}{L} \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} e^{Lh}$$

$$\lim_{n \to \infty} |y_n(x) - y(x)| = 0.$$

Jadi menurut theorema 15 (uji M Weierstrass)

$y_n(x)$ konvergen seragam di dalam $|x - x_o| \le h$

misalkan $\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y(x)$ .... pers.(11)

memenuhi $y(x_o) = y_o$ .... pers.(12)

dan $|y(x) - y_o| \le b$.

Karena $y_n(x)$ konvergen seragam ke y(x) maka

$F(x,y_n(x))$ juga konvergen seragam ke F(x,y(x))

akibatnya $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{x_o}^{x} F(s,y_n(s))\, ds = \int_{x_o}^{x} F(s,y(s))ds.$

Menurut pers.(8^*) berlaku

$$\left| \int_{x_o}^{x} F(s,y_n(s))\, ds - \int_{x_o}^{x} F(s,y(s))ds \right| \leq$$

$$L \left| \int_{x_o}^{x} | y_n(s) - y(s)|\, ds \right| \leq L \frac{M}{L} \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} e^{Lh}\, h$$

$$= M\, h \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} e^{Lh}$$

Sehingga $\lim\limits_{n \to \infty} M\, h \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} e^{Lh} = 0.$

Dengan F(x,y(x)) kontinu .... pers.(13)

sehingga $y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} F(s,y(s))\, ds$

$y'(x) = F(x,y(x))$ .... pers.(14)

Dari definisi 17 dan pers.(11), pers.(12), pers.(13) dan pers.(14) maka y(x) merupakan penyelesaian.

c) $y_n(x)$ merupakan penyelesaian tunggal

Jika $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ merupakan penyelesaian maka akan dibuktikan bahwa $y_1(x) = y_2(x)$.

$$y_1(x) - y_2(x) = \int_{x_o}^{x} (F(s,y_1(s)) - F(s,y_2(s)))\, ds$$

$$\left| y_1(x) - y_2(x) \right| = \left| \int_{x_o}^{x} (F(s,y_1(s)) - F(s,y_2(s)))\, ds \right|$$

$$\leq L \int_{x_o}^{x} |y_1(s) - y_2(s)|ds$$

Diambil $W(x) = \int_{x_o}^{x} |y_1(s) - y_2(s)|ds$

$W(x_o) = 0$ dan $W(x) \geq 0$ ....pers.(15)

$$W'(x) = |y_1(x) - y_2(x)| \leq L \int_{x}^{x} |y_1(s) - y_2(s)|\, ds$$

$$\leq L\, W(x)$$

menurut theorema 16 diperoleh

$W(x) \leq W(x_o)\ e^{L(x-x_o)}$

$W(x) \leq 0$ .... pers.(16)

Dari pers.(15) dan pers.(16) diperoleh $W(x) = 0$.

Jadi $|y_1(x) - y_2(x)| = 0$ atau $y_1(x) = y_2(x)$.

2.3.1 Persamaan Differensial Linier Orde Satu Homogen

Bentuk umum : $y' + P(x)y = 0$

dengan syarat awal $y(x_o) = y_o$.

Definisi 18 :

Jika persamaan differensial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ bukan merupakan persamaan differensial eksak tetapi persamaan differensial $\mu(x,y)\Big[M(x,y)dx + N(x,y)dy \Big] = 0$ merupakan persamaan differensial eksak maka $\dfrac{\partial \mu M}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu N}{\partial x}$

dan $\mu(x,y)$ disebut faktor integral dari $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

Akan dicari faktor integral dari

$\mu(x,y)\Big[M(x,y)dx + N(x,y)dy \Big] = 0$

Dari definisi 18 diperoleh

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}$$

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x} \quad \text{.......... pers.(17)}$$

Jika $\mu(x,y) = \mu(x)$ maka $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$. Dari pers.(17) diperoleh

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{N\,\partial \mu}{\partial x}$$

$$\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]\partial x = \frac{N\,\partial \mu}{\mu(x)}$$

Jika ruas kanan dan ruas kiri diintegralkan akan diperoleh

$$\int \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]\partial x = \int \frac{N\,\partial \mu}{\mu(x)}$$

$$\int \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] \partial x = N \ln \mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] \partial x \; / \; N} \qquad \text{...........pers.(18)}$$

Jika diberikan persamaan differensial

$$y' + P(x)\, y = 0 \qquad \text{................ pers.(19)}$$

maka faktor integralnya adalah :

$$Y' + P(x)\, Y = 0$$

$$dy + P(x)\, y\, dx = 0$$

Jadi $M = P(x)\, y$ dan $N = 1$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Menurut pers.(8) maka diperoleh faktor integral

$$\mu(x) = e^{\int \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] \partial x \; / \; N}$$

$$= e^{\int P(x)dx}$$

Akan dicari solusi dari pers.(19) dengan mengalikan faktor integral $\mu(x)$ diperoleh

$$e^{\int P(x)dx}\, y' + e^{\int P(x)dx}\, P(x)\, y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[y\, e^{\int P(x)dx} \right] = 0$$

Jika kedua ruas diintegralkan diperoleh

$$\int \frac{d}{dx}\left[y\ e^{\int P(x)\ dx} \right] = C$$

$$y\ e^{\int P(x)\ dx} = C$$

$$y(x) = C\ e^{-\int p(x)\ dx} \quad \ldots\ldots.\ \text{pers.}(19^{*})$$

memenuhi $y(x_o) = y_o$.

2.3.2 Persamaan Differensial Linier Orde Satu Non Homogen

Bentuk umum : $y' + P(x)\ y = Q(x)$ .... pers.(20)

dengan syarat awal $y(x_o) = y_o$.

Akan dicari solusi pers.(20) dengan menggunakan faktor integral.

$y' + P(x)\ y = Q(x)$

$dy + (P(x)y - Q(x))dx = 0$

Jadi $M = P(x)y - Q(x)$, $N = 1$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ sehingga

$$e^{\int P(x)dx}\ y' + e^{\int P(x)dx}\ P(x)\ y = Q(x)\ e^{\int P(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[y\ e^{\int P(x)dx} \right] = Q(x)\ e^{\int P(x)dx}$$

Jika kedua ruas diintegralkan diperoleh

$$\int \frac{d}{dx}\left[y\, e^{\int P(x)dx} \right] = \int Q(x) e^{\int P(x)dx}\, dx + C$$

$$y\, e^{\int P(x)dx} = \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}\, dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}\, dx \; +$$

$$C\; e^{-\int P(x)dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{pers.}(20^{*})$$

Contoh 3 :

Tentukan solusi dari $y' + 2y = e^{x}$ memenuhi $y(0) = 1$.

Jawab :

$$\mu(x) = e^{\int_0^x p(x)\, dx}$$

$$= e^{\int_0^x 2\, dx} = e^{2x}$$

$$\text{Jadi solusi } y(x) = e^{-2x} \int_0^x e^{t}\, e^{2t}\, dt + C\, e^{-2x}$$

$$= e^{-2x} \left[\frac{1}{3} e^{3t} \right]_0^x + C\, e^{-2x}$$

$$= e^{-2x} \left[\frac{1}{3} e^{3x} - 1/3 \right] + C\, e^{-2x}$$

$$= (1/3)\, e^{x} - (1/3)\, e^{-2x} + C\, e^{-2x}$$

$$y(0) = (1/3) - (1/3) + C$$

$$C = 1$$

Jadi $y(x) = (1/3)\, e^{x} - (1/3)\, e^{-2x} + e^{-2x}$ memenuhi $y(0) = 1$.