BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Deret asymptotik adalah suatu deret yang sangat praktis untuk menghitung nilai dari fungsi f(x) untuk nilai x yang cukup besar. Dapat dilihat bahwa dengan menggunakan deret maclaurin dari fungsi f(x) jika ada dan konvergen untuk nilai x yang cukup besar tidak cocok untuk maksud tersebut karena banyaknya suku yang diperlukan untuk mendapatkan suatu angka significan tertentu bertambah dengan cepat untuk nilai x yang bertambah. Demikian juga dengan deret taylor yang berpusat di $x = x_o$ dan panjang $|x - x_o|$. Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa untuk nilai x yang cukup besar maka hanya sedikit suku deret asymptotik yang diperlukan untuk memperoleh ketelitian yang dikehendaki. Dengan kata lain ketelitian adalah terbatas dan ketelitian akan berkurang untuk nilai x yang menurun.

Definisi 1 :

Deret yang berbentuk $S(x) = c_o + c_1/x + c_2/x^2 + \ldots + c_n/x^n + \ldots$ dengan c_o, c_1, c_2, ... konstanta disebut sebuah deret asymptotik dari fungsi f(x) didefinisikan untuk $x > 0$, $x \longrightarrow \infty$ bila dan hanya bila untuk setiap n = 0,1,2,...berlaku

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \Big[f(x) - S_n(x) \Big] x^n = 0 \quad \text{dengan}$$

$S_n(x) = c_0 + c_1/x + c_2/x^2 + \ldots + c_n/x^n$ adalah jumlah parsial dari $S(x)$ dan ditulis $f(x) \sim S(x)$.

Contoh 1 :

Diberikan sebuah deret asymptotik $f(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + \ldots$

Tentukan nilai mutlak suku sisa $R_n(x)$ jika

a) $x = 5$ dan $n = 4$

b) $x = 8$ dan $n = 3$

Jawab :

a) untuk $n = 4$ maka nilai

$$f(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + R_n(x)$$

$$f(5) \sim \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} - \frac{6}{5^4} + R_4(5)$$

$$\sim 0{,}1664 + R_4(5)$$

Dengan nilai suku sisa $\quad |R_n(x)| \le \left|(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\right|$

$$\left| R_n(x) \right| \le \left| \frac{n!}{x^{n+1}} \right|$$

$$\left| R_4(5) \right| \le \left| \frac{4!}{5^5} \right| = 0{,}00768$$

b) untuk $n = 3$ maka nilai $f(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \ldots$

$$+ \quad (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + R_n(x)$$

$$f(8) \sim \frac{1}{8} - \frac{1}{8^2} + \frac{2}{8^3} + R_3(8)$$

$$\sim 0{,}11325 \; + R_3(8)$$

Dengan suku sisa $| R_n(x)| \leq |(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}|$

$$\left| R_n(x) \right| \leq \left| \frac{n!}{x^{n+1}} \right|$$

$$\left| R_3(8) \right| \leq \left| \frac{3!}{8^4} \right| = 0{,}00146$$

Jika dibandingkan antara jawaban a) dengan jawaban b) maka jawaban b) merupakan pendekatan yang lebih teliti karena nilai mutlak suku sisa jawaban b) lebih kecil.

Jika $f(x)$ memenuhi theorema 19 dan merupakan solusi dari persamaan differensial linier orde satu $y' + P(x)y = Q(x)$ dengan $P(x)$, $Q(x)$ analitik di $x=\infty$ maka deret asymptotik dari fungsi $f(x)$ berbentuk $f(x) \sim c_0 + c_1/x + c_2/x^2 + \ldots + c_n/x^n + \ldots$ dengan c_0, c_1, c_2, ... konstanta.

1.2 Perumusan Masalah

Dari pengertian di atas diperoleh suatu permasalahan yaitu bagaimana cara menentukan deret asymptotik dari penyelesaian persamaan differensial linier orde satu.

Fungsi-fungsi dan variabel yang diberikan bernilai riil dan tunggal.

1.3 Metode Pembahasan

Untuk menentukan deret asymptotik dari penyelesaian persamaan differensial linier orde satu akan digunakan metode - metode sebagai berikut :

1. Metode substitusi secara langsung.
2. Metode poincare.
3. Metode integral parsial secara beturutan.