BAB II

MATERI DASAR

2.1. Masalah Nilai Batas

2.1.1. Formulasi Matematik dan Penyelelesaian Masalah-masalah Fisik .

Dalam menyelesaiakan masalah-masalah ilmu dan teknologi biasanya diambil langkah-langkah berikut,

a. Formulasi matematis

Untuk mendapatkan formulasi tersebut biasanya dipakai model matematis yang berfungsi sebagai pendekatan dari benda (objek) sesungguhnya yang sedang diselidiki.

Contoh 1

dalam menjelaskan gerakan dari sebuah planet terhadap matahari digunakan hukum Newton sehingga sampai pada persamaan differensial yang melibatkan jarak dari planet tersebut terhadap matahari pada setiap saaat.

b. Penyelesaian Matematis.

Setelah masalahnya berhasil dirumuskan dalam bentuk persamaan matematis, selanjutnya harus diselesaikan untuk besaran-besarn yang tidak diketahui baik secara langsung maupun tidak dari masalah fisiknya.Satu pertimbangan penting adalah apakah fisiknya.Satu pertimbangan penting adalah apakah penyelesaian yang dimaksud ada (exist), dan kalau ada apakah penyelsaian itu unik (unique)

Didalam usaha mencari penyelesaian ini mungkin timbul kebutuhan akan analisa matematis yang baru, yang membawa pada masalah matematis baru.

Contoh 3

Didalam usaha untuk memecahkan masalah tentang aliran panas yang diformulasikan didalam bentuk persamaan differensial, telah sampai pada masalah matematis tentang ekspansi dari suatu fungsi menjadi deret yang mengandung sinus dan cosinus.

c. Arti Fisik.

Setelah penyelesaian didapat, sangat bermanfaat sekali untuk mengartikan secara fisik. Pengertian demikian mungkin sangat berguna didalam menyelesaiakan masalah-masalah lain yang serupa, yang dapat membawa ke pengetahuan matematis yang baru atau sifat-sifat fisik baru.

2.1.2. Persamaan Differensial Parsial.

Persamaan differensial parsial adalah sebuah persamaan yang mengandung fungsi tidak diketahui dari dua atau lebih variabel dan turunan parsialnya terhadap variabel-variabel tersebut.

Orde dari sebuah persamaan differensial adalah orde dari turunan yang tertinggi.

Contoh 4.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=2x-y$ adalah sebuah persamaan differensial orde

dua. Pada persamaan ini u adalah variabel tak bebas (dependent variabel) sedangkan x dan y adalah variabel bebas (independent variabel)

Penyelesaian dari suatu persamaan differensial adalah sebarang fungsi yang memenuhi persamaan tersebut secara identik.

Penyelesaian umum adalah suatu penyelesaian yang terdiri dari sejumlah fungsi bebas sebarang yang jumlahnya sesuai dengan orde dari persamaannya.

Penyleesaian khusus adalah suatu penyelesaian ang bisa didapatkan dari penyelesaian umumnya dengan pilihan khusus dari fungsi-fungsi sebarang.

Contoh 5.

$U = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + F(x) + G(x)$adalah dari persamaan differensial pada contoh 3. Penyelesaian ini disebut penyelesaian umum karena terdiri dari dua fungsi bebas sebarang yaitu F(x) dan G(x). Secara khusus jika F(x) = 2sin x , $G(y)=3y^4-5$, akan ditemukan penyelesaian khususnya sebagai berikut,

$$U = x^2y - \quad xy^2 + 2 \sin x + 3y^4 - 5 .$$

Penyelesaian singular adalah suatu penyelesaian yang tak bisa didapatkan dari penyelesaian umum dengan pilihan khusus dari funsi sebarangnya .

Contoh 6.

Apabila, $U = x \dfrac{dy}{dx} - (\dfrac{dy}{dx})^2$, dengan u sebagai fungsi x dan y , akan terlihat dari subtitusi bahwa $U = xF(y) - (F(y))^2$ dan $U = x^2/4$ adalah penyelesaiannya. Yang pertama diatas adalah penyelesaian umum yang mengandung satu fungsi sebarang F(y). Sedang yang kedua adalah penyelesaian singular, karana penyelesaian ini tak bisa didapatkan dari penyelesaian umumnya dengan memilih sebarang fungsi F(y).

Masalah nilai batas yang melibatkan persamaan differensial parsial akan mencari semua penyelesaian dari persamaan tersebut yang memenuhi kondisi- kondisi tertentu yang disebut kondisi batas.

Teori-teori yang berhubungan dengan eksistensi dan keunikan penyelesaian tersebut disebut sebagai teori eksistensi dan keunikan.

2.1.3. Persamaan Differensial Biasa

Persamaan differensial biasa adalah persamaan yang mengandung satu variabel tak bebas atau lebih, satu variabel bebas dan satu turunan atau lebih dari variabel tak bebas terhadap variabel bebasnya.

Contoh 7.

Persamaan $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

merupakan sebuah persamaan differensial biasa y(t) dan x(t) merupakan variabel tak bebas dan t merupakan variabel bebasnya.

Persamaan differensial $\dfrac{d^ny}{dt^n} + \dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \; ... \; + \dfrac{dy}{dt} = 0$

maka penyelesaiannya misal $y = e^{\lambda t}$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^ny}{dt^n} = \lambda^n e^{\lambda t}$$

sehingga membentuk persamaan

$$\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 e^{\lambda t} + \; .... \; + \lambda^n e^{\lambda t} = 0$$

$$(\lambda + \lambda^2 + \; .... \; + \lambda^n) \, e^{\lambda t} = 0$$

sehingga membentuk persamaan polinom

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \; .... \; + a_1\lambda + a_o$$

polinom ini disebut polinom karakteristik dan persamaan $f(\lambda)=0$ disebut persamaan karakteristik. Akar-akar persamaan karakteristik itu disebut akar-akar karakteristik.

Theorema 2.1.3.1.

Jika semua akar-akar persamaan akar karakteristik berlainan, katakan $\lambda = \lambda_i$, $i=1,2,3,\ldots\ldots,n$. Maka n buah fungsi-fungsi $y_i = e^{\lambda i x}$, $i=1,2,3,\ldots\ldots,n$ membentuk sebuah himpunan pnyelesaian.

BUKTI

Bukti berikut ini untuk n=2

$$W(y_1,y_2,x)= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$$

$$= (\lambda_1-\lambda_2)e^{(\lambda_1+\lambda_2)} \neq 0$$

Bukti untuk hal yang umum akan mengikuti cara dan alasan yang sama dengan diatas.

Contoh 8.

Cari penyelesaian umum persamaan differensial $y'''-6y''+11y'-6y=0$.

Penyelesaian.

$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$

$(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)=0$

$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$ $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$ himpunan fundamental penyelesaiannya $y_1= e^x$, $y_2= e^{2x}$, $y_3=$

e^{3x} .

Solusi umumnya adalah $Y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$

Definisi 2.1.3.1.

Jika akar-akar karakteristiknya berbentuk $a+bi$ dan $a-bi$ (akar-akar kompleks) sehingga penyelesaiannya berbentuk $y = C\ e^{(a+bi)x}+C\ e^{(a-bi)x}$

$$y = e^{ax}(C_1e^{bix}+C_2e^{-bix})$$

$$y = e^{ax}(A \cos bx+B \sin bx)$$

dimana $\sin bx = \frac{e^{bix}-e^{-bix}}{2i}$ $\cos bx = \frac{e^{bix}+e^{bix}}{2i}$

Contoh 9.

Tentukan pnyelesaian dari persamaan differensial

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{d\ y}{dx}+5y=0$$

Penyelesaian.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+5y=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+5=0$$

$$\lambda_{12}=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}$$

$$=2\pm i$$

Sehingga penyelesaiannya adalah $y=e^{2x}(A \cos x+B \sin x)$

Dengan setiap persamaan differensial tak homogen, ada satu pautan persamaan differensial homogen yang ditentukan oleh $\sum_{i=1}^{\sim} a_i(x)\ y^{(i)}=0$

Jika n fungsi-fungsi y_1, y_2, ... , y_n membentuk sistem fundamental homogen maka fungsi y_n ditentukan oleh $y_h = c_1y_1+ c_2y_2+ \ldots + c_ny_n$ dimana c_i konstanta sebaran disebut penyelesaian homogen.

Contoh 10.

Cari penyelesaian homogen dari persamaan differensial $y'' - 3y' + 2y = \cos x$

Penyelesaian

Persamaan differensial homogen berpautan adalah :

$y'' - 3y' + 2y = 0$

Persamaan karakteristiknya

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ himpunan fundamental penyelesaiannya adalah $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ maka penyelesaian umumnya $y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$

Definisi 2.1.3.2.

Suatu persamaan differensial Euler adalah suatu persamaan differensial berbentuk

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x^1 y^{(1)} + a_o y = 0$$

dimana $a_n, \; a_{n-1}, \dots, a_1, a_o$

merupakan konstanta- konstanta dan $a_n = 0$,

$$\text{dengan peubah bebas } x = \begin{cases} e^t & \text{jika } x>0 \\ e^t & \text{jika } x<0 \end{cases}$$

Contoh 11.

Buktikan dengan menggunakan peubah bebas, bahwa persamaan differensial Euler orde dua

$$a_2 x^2 y'' + a_1 xy' + a_o y = 0$$

dengan a_o, a_1 dan a_2 konstanta-konstanta

diubah menjadi persamaan differensial

$$a_2 \ddot{y} + (a_1 - a_2)\dot{y} + a_o y = 0$$

dimana titik menyatakan turunan menurut t.

Bukti

misalkanx>0,makax=e^t

$$\frac{dx}{dt} = e^t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = e^{-t}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \; \frac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t} = \dot{y}\,\frac{1}{x} \quad \text{dimana } xy' = \dot{y}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \; \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(\dot{y}e^{-t})e^{-t}$$

$$= (\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t})e^{-t} = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t} = (\ddot{y} - \dot{y})\,\frac{1}{x^2} \quad \text{dimana } x^2 = \ddot{y} - \dot{y}$$

$$a_2 x^2 y'' + a_1 xy' + a_o y = a_2(\ddot{y} - \dot{y}) + a_1 \dot{y} + a_o y$$

$$= a_2 \ddot{y} - a_2 \dot{y} + a_1 \dot{y} + a_o y$$

$$=a_2\ddot{y}+(a_1-a_2)\dot{y}+a_0y$$

misalkan $x<0$, maka $x=-e^t$

$\frac{dx}{dt}=-e^t$, $\frac{dx}{dt}=-e^{-t}$

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\ \frac{dt}{dx}=-\dot{y}e^{-t}$

$y''=\frac{dy'}{dt}\ \frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(-\dot{y}e^{-t})-e^{-t}$

$=(\ddot{y}e^{-t}-\dot{y}e^{-t})e^{-t}$

$=(\ddot{y}-\dot{y})e^{-2t}$

$a_2x^2y''+a_1xy'+a_0y$

$=a_2(-e^t)^2(\ddot{y}-\dot{y})e^{-2t}+a_1(-e^t)(-\dot{y}e^{-t})+a_0y$

$=a_2\ddot{y}+(a_1-a_2)\dot{y}+a_0y$

Theorema 2.1.3.2.

Jika persamaan differensial linier tak homogen berbentuk $(P_0D^n+P_1D^{n-1}+\dots\dots+P_n)y=e^{ax}$, $P_0\neq0$ atau $f(D)=e^{ax}$ dimana $D=\frac{d}{dx}$ adalah operator $f(D)$ adalah persamaan karakteristik ,maka penyelesaian-nya partikulirnya adalah $y=\frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{1}{f(a)}e^{ax}$ dimana $f(a)\neq0$

Bukti

$\frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{}{f(a)}e^{ax}$, $f(a)\neq0$

$y=e^{ax}$; $Dy=ae^{ax}$; $D^2y=a^2e^{ax}$

$\vdots$

$$D^n y = a^n e^{ax}$$

maka $(P_0 D^n + P_1 D^{n-1} + \ldots\ldots + P_n) e^{ax} = \sum_{i=1}^{n} P_n D^n e^{ax}$

$f(D) e^{ax} = f(a) e^{ax}$

sehingga $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$ terbukti

Contoh 11

Cari penyelesaian partikulirnya dari persamaan differensial $(D^2 - 4D + 4)y = e^{3x}$

Penyelesaian

$(D^2 - 4D + 4)y = e^{3x}$

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 4} e^{3x}$$

$$= \frac{1}{(D-2)(D-2)} e^{3x}$$

$$= \frac{1}{(3-2)(3-2)} e^{3x}$$

$$= e^{3x}$$

2.2. Deret Fourier

Definisi 2.2.1.

Sebuah fungsi f(x) disebut mempunyai periode T atau menjadi periodik dengan periode T kalau untuk semua harga x, $f(x+T) = f(x)$, dengan T sebagai konstan positif. Harga terkecil dari $T > 0$ disebut sebagai periode terkecil atau hanya periode dari f(x).

Contoh 12.

Fungsi sin x mempunyai periode 2π, 4π, 6π, ..., karena sin $(x+2\pi)$, sin $(x+4\pi)$, sin $(x+6\pi)$, ... semuanya sama dengan sin x. Meskipun demikian 2π adalah periode yang terkecil atau periode dari sin x.

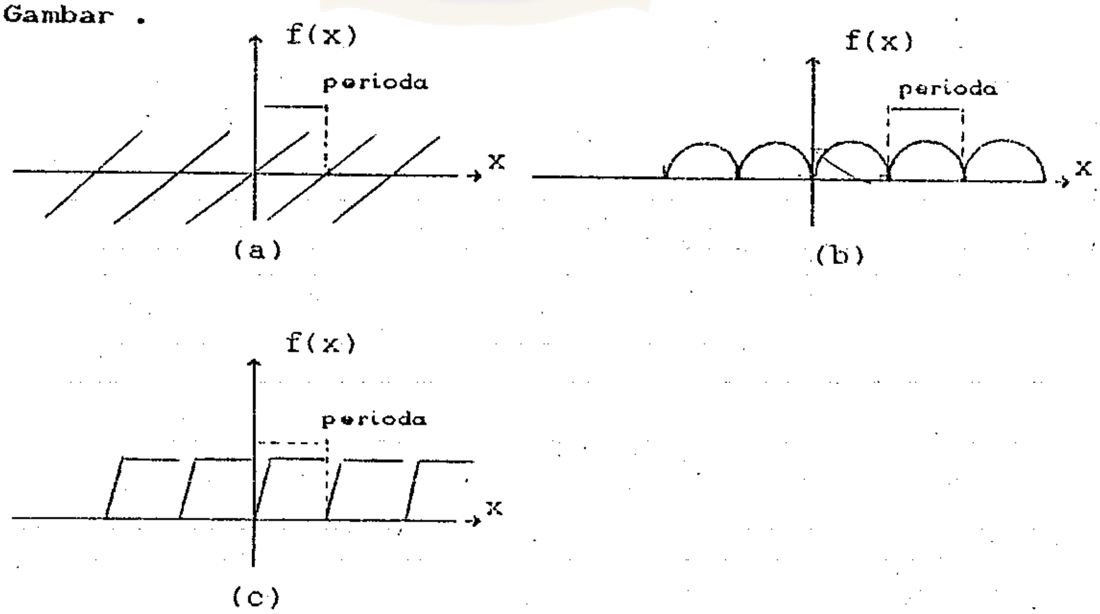
Definisi 2.2.2.

Suatu funsi f(x) yang kontinu setiap segmennya adalah suatu fungsi yang mempunyai jumlah terhingga dari ketidak kontinuannya yang juga terhingga.

Contoh 13.

Tentang fungsi inidapat dilihat pada gambar . Fungsi pada gambar a dan c kontinu setiap segmennya, sedangkan gambar b adalah fungsi kontinu.

Gambar .



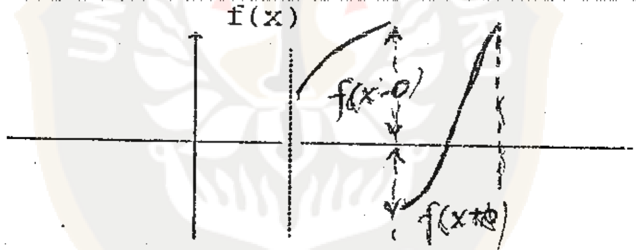
Definisi 2.2.3.

Limit f(x) dari sebelah kanan dari fungsi f(x) sering ditulis sebagai $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x+\varepsilon) = f(x+0)$ dengan $\varepsilon > 0$. Sedangkan limit f(x) dari sebelah kiri dari f(x) ditulis sebagai $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x-\varepsilon)=f(x-0)$, dengan $\varepsilon>0$.

Contoh 14.

Pada gambar , karena $\varepsilon \to 0$ dan $\varepsilon > 0$, ditulis sebagai $\varepsilon \to 0^+$, sehingga $\lim\limits_{\varepsilon \to -0} f(x+\varepsilon)=f(x+0)$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x-\varepsilon)=f(x-0)$.

Gambar



Theorema 2.2.1.

Jika f(x) kondisi-kondisi berikut,

1. f(x) didefinisikan dalam interval $c<x<c+l$
2. f(x) dan f´(x) kontinu secara bagian-bagian dalam $c<x<c+l$
3. $f(x+l)=f(x)$, yakni f(x) periodik dengan perioda l

maka di tiap-tiap kontinuitas diperoleh

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{l} \right)$$

dimana, $a_n = \frac{2}{l}\int_c^{c+l} f(x) \cos\frac{2n\pi x}{l}\, dx$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_c^{c+l} f(x)\ \sin\frac{2n\pi x}{l}\ dx$$

Bukti.

Misal deret $A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{l})$ konvergen uniform dalam $(c,c+l)$, dimana $n = 1,2,3,\ldots.$ sehingga

$$\int_c^{c+l} f(x)\cos\frac{2m\pi x}{l}\,dx = A\int_c^{c+l}\cos\frac{2m\pi x}{l}\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_c^{c+l}\cos\frac{2m\pi x}{l}\ \cos\frac{2n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_c^{c+l}\cos\frac{2m\pi x}{l}\ \sin\frac{2n\pi x}{l}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,a_m l$$

$$a_m = \frac{2}{l}\int_c^{c+l} f(x)\cos\frac{2m\pi x}{l}\,dx,\quad m=1,2,3,\ldots$$

$$\int_c^{c+l} f(x)\sin\frac{2m\pi x}{l}\,dx = A\int_c^{c+l}\sin\frac{2m\pi x}{l}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_c^{c+l}\sin\frac{2m\pi x}{l}\right.$$

$$\left.\cos\frac{2n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_c^{c+l}\sin\frac{2m\pi x}{l}\ \sin\frac{2n\pi x}{l}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,b_m l$$

$b_m = \frac{2}{l}\int_c^{c+l} f(x)\sin\frac{2m\pi x}{l}\,dx$, kemudian

$$\int_c^{c+l} f(x)dx = \int_c^{c+l}\left(A + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{l})\right)dx$$

$$= \int_c^{c+l} A\,dx + \int_c^{c+l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)dx$$

$$= Al$$

sehingga $A = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+l} f(x)\,dx$

$a_m = \frac{2}{l}\int_{c}^{c+l} f(x)\cos\frac{2m\pi x}{l}\,dx$,bila m=0 maka

$a_0 = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+l} f(x)\,dx$,sehingga $A = a_0$

jadi $f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)$$

dimana, $a_n = \frac{2}{l}\int_{c}^{c+l} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{l}\,dx$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{c}^{c+l} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{l}\,dx$$

Contoh 15.

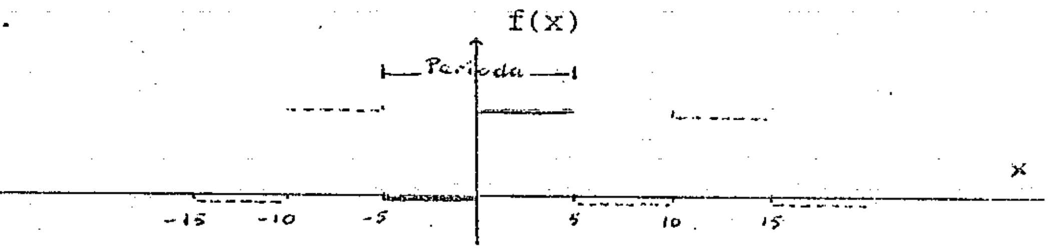
a.Carilah koefisien Fourier yang bersesuaian dengan

fungsi $f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases}$ bilo perioda = 10

b tuliskan deret Fouriernya

Penyelesaian .

a.



Perioda l=10 dan l=5 dipilih interval c ke c+2l sebagai -5 ke 5 sehingga c = -5 . maka

$$a_n = \frac{2}{l}\int_c^{c+l} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left(\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_0^5 (3)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx\right)$$

$$= \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{n\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right)\Big|_0^5 = 0 \quad , n\neq 0$$

jika n=0 , $a_n = a_0 = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{0\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_0^5 dx = 3$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_c^{c+l} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left(\int_{-5}^{0}(0)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_0^5 (3)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx\right)$$

$$= \frac{3}{5}\int_0^5 \sin\frac{n\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\left(\frac{-5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right)\Big|_0^5$$

$$= \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

b. $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)$

$$= 3 + \sum \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}$$

$$= 3 + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \ldots\ldots\right)$$

Definisi 2.2.4.

Sebuah fungsi f(x) dinamakan ganjil jika f(-x)=-f(x) dan dinamakan genap jika f(-x)=f(x).

Contoh 16.

x^3 ; x^5-3x^2+2x ; sin x ; tan 3x adalah funsi ganjil.

x^4 ; $2x^6-4x^2+5$; cos x ; e^x+e^{-x} adalah funfsi genap.

Dalam deret Fourier yang bersesuaian dengan sebuah fungsi ganjil hanya suku-suku sinus yang dapat hadir. Dalam deret Fourier yang bersesuaian dengan sebuah fungsi genap, hanya suku-suku cosinus yang dapat hadir.

Theorema 2.2.2.

Bentuk kompleks dari deret Fourier adalah

$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2n\pi x/l}$ dimana dengan C=-1, maka

$$C_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i2n\pi x/l}\,dx$$

Bukti

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{c}^{c+l} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{l}\,dx$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{c}^{c+l} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{l}\,dx$$

dengan subtitusi $\sin\frac{2n\pi x}{l}=\frac{e^{i2n\pi x/l}-e^{-i2n\pi x/l}}{2i}$

$$\cos\frac{2n\pi x}{l}=\frac{e^{i2n\pi x/l}+e^{-i2n\pi x/l}}{2}$$

diperoleh $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{i2n\pi x/l}+e^{-i2n\pi x/l}}{2}\right)\right.$

$$\left.+b_n\left(\frac{e^{i2n\pi x/l}-e^{-i2n\pi x/l}}{2i}\right)\right]$$

$$= a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - i\, b_n}{2}\; e^{i2n\pi x/l} \right.$$

$$\left. + \frac{a_n + i\, b_n}{2}\; e^{-i2n\pi x/l} \right]$$

$$= C_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n e^{i2n\pi x/l} + C_{-n} e^{-i2n\pi x/l} \right]$$

dimana koefisien-koefisiennya $a_o = C_o$

$$C_n = \frac{a_n - i\, b_n}{2}$$

$$C_{-n} = \frac{a_n + i\, b_n}{2}$$

sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-i2n\pi x/l} = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{i2n\pi x/l}$

diperoleh $f(x) = C_o + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i2n\pi x/l} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{i2n\pi x/l}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i2n\pi x/l}$$

dengan cara subtitusi koefisien a_n dan koefisien b_n

kedalam $C_n = \frac{a_n - i\, b_n}{2}$,diperoleh

$$C_n = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{l} \int_c^{c+l} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{l}\, dx - i\, \frac{2}{l} \int_c^{c+l} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{l}\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{l} \int_c^{c+l} f(x) \left[\left(\frac{e^{i2n\pi x/l} + e^{-i2n\pi x/l}}{2} \right) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{e^{i2n\pi x/l} - e^{-i2n\pi x/l}}{2i} \right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{l} \int_{c}^{c+l} f(x) e^{-i 2n\pi x/l} \, dx. \qquad \text{Terbukti}$$

2.3 Sistem Derajat Kebebasan Tunggal

Definisi 2.3.1.

Gerak adalah perubahan posisi atau tempat suatu benda terhadap titik acuan setiap saat.

Benda bergerak berarti tempat benda berubah dan mempunyai kecepatan. Pengertian kecepatan dengan kelajun adalah berbeda, kecepatan merupakan besaran vektor sedangkan kelajuan merupakan besaran skalar.

Definisi 2.3.2.

Kecepatan (v) adalah perbandingan antara selisih jarak (Δs) tempuh dengan selisih waktu (Δt) tempuh. Persamaannya dapat ditulis, $V = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta s}{t}$ atau $V = \frac{ds}{dt}$

Definisi 2.3.3.

Percepatan (a) adalah perbandingan antara selisih kecepatan (Δv) benda dengan selisih waktu (Δt) tempuh. Persamaannya ditulis $a = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta v}{t}$ atau $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$.

Definisi 2.3.4.

Suatu tarikan atau dorongan yang dapat menimbulkan perubahan gerak disebut *gaya*.

Definisi 2.3.5.

Bunyi hukum *Newton II* adalah jika gaya luar (F) bekerja pada suatu benda dengan massa (m) menghasilkan kecepatan sebesar (v). Maka persamaan ditulis $F=\frac{d(mv)}{dt}=m\frac{dv}{dt}=ma$.

Satuan standart untuk massa adalah kg(mks), gr(cgs). Sedangkan untuk gaya(F) Newton(mks), dyne(cgs), untuk percepatan(a) kg/dt^2(mks), gr/dt^2(cgs).

Contoh 17.

Suatu benda dengan massa 10kg bergerak dengan kecepatan awal 54km/jam, setelah 5menit kecepatan bertambah menjadi 108km/jam. Berapa gaya yang bekerja pada benda itu.

Penyelesaian.

$m=10kg$

$v_1=54$ km/jam= 15 m/dtk

$v_2=108$ km/jam= 30 m/dtk

t= 5 menit = 300 dtk

maka, $F=ma=m\frac{(v_1-v_2)}{dt}=10\ kg\frac{(15\ m/dtk)}{(300-0)dtk}$

$=0{,}5\frac{kg\ m}{dtk}=0{,}5$ Newton.

Definisi 2.3.6.

Jumlah gaya-gaya dalam besaran komponennya menurut sumbu koordinat x,y,dan z besarnya sama dengan nol, ditulis $\Sigma F_x = \Sigma m a_x = 0$, $\Sigma F_y = \Sigma m a_y = 0$,$\Sigma F_z = \Sigma m a_z = 0$.

Definisi 2.3.7.

Hukum Hooke's menyatakan gaya yang bekerja pada sebuah benda yang diberi penghambat pegas *k* sehingga bergerak sepanjang *x* dinyatakan bahwa $f_s = -kx$

Definisi 2.3.8.

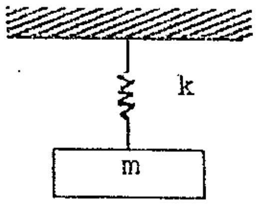
Diagram free body adalah suatu sketsa dari benda yang dipisahkan dari benda lainnya, dimana semua gaya luar pada benda terlihat jelas.

Definisi 2.3.9.

*Prinsip d'Al bert*menyatakan bahwa sebuah sistem dapat dibuat dalam keadaan keseimbangan dinamis dengan menambahkan gaya fiktif pada gaya-gaya luar yang biasa disebut *gaya inersia.*

Contoh 18.

Tunjukkan bahwa persamaan differensial dari gerak vertikal benda yang tergantung pada pegas benda yang sama bergetar sepanjang sumbu horizontal seperti tampak pada gambar.

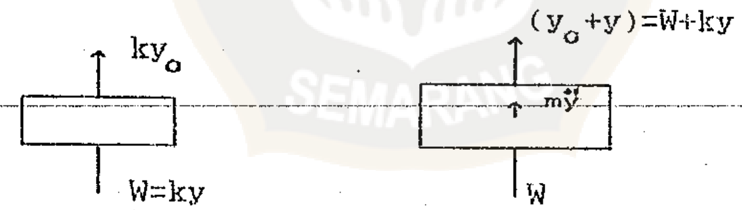


Penyelesaian.

Dalam posisi seimbang statis, pegas tertarik sejauh y_o unit dan mengakibatkan gaya $ky_o=W$ keatas pada benda tersebut, dimana W adalah berat benda. Bila benda berpindah sejauh y ke bawah dari posisi seimbang maka besar gaya pegas diberikan oleh $F_s=k(y_o+y)$ atau $F_s=W+ky$, sebab $ky_o=W$. Dengan hukum Newton II didapat $,-(W+ky)+W=m\ddot{y}$

$$m\ddot{y}+ky=0$$

Gambar diagram *free body*nya



Definisi 2.3.10.

Frekuensi adalah jumlah getaran yang ditempuh dalam waktu satu detik. Dengan satuan *herz* (*hz*) atau *siklus perdetik* (*spd*).

Definisi 2.3.11.

Perioda adalah waktu yang ditempuh dalam satu getaran penuh. Dengan satuan *detik persiklus* atau *detik* .

Hubungan antara *frekuensi* dengan *perioda* dapat ditulis $F = \frac{1}{T}$.

Contoh 19.

Suatu benda bergetar dengan frekuensi 5 herz dalam waktu 1 detik. Maka frekuensi dan periodanya adalah $F = \frac{5}{1} = 5$ Herz dan $T = \frac{1}{5} = 0,2$ detik.

Definisi 2.3.12.

Getaran bebas adalah getaran dari sebuah sistem tanpa adanya pengaruh dari luar.

Definisi 2.3.13.

Getaran paksa adalah getaran dari sebuah sistem yang diakibatkan adanya pengaruh dari luar.

Definisi 2.3.14.

sistem adalah susunan komponen-komponen fisik yang dihubungkan atau berhubungan sedemikin sehingga membentu suatu kesatuan.

Definisi 2.3.15.

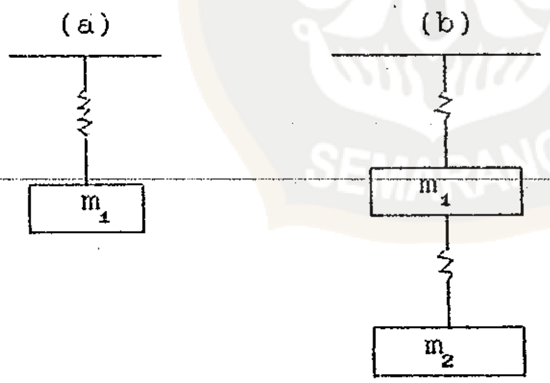
Derajat kebebasan adalah satu koordinat lepas yang diperlukan guna menentukan secara lengkap posisi dari sistem pada setiap saat.

Definisi 2.3.16.

Derajat kebebasan tunggal adalah satu sumber koordinat lepas yang diperlukan guna menentukan secara lengkap posisi dari sistem pada setiap saat.

Secara umum pengertian *sistem derajat kebebasan tunggal* adalah suatu sistem dengan satu sumber koordinat lepas yang diperlukan guna menentukan secara lengkap, dari susunan komponen-komponen fisik yang saling berhubungan sehingga membentuk satu kesatuan pada setiap saat.

Contoh 20.



Gambar (a) merupakan sistem dengan satu derajat kebebasan, sedangkan gambar (b) menunjukkan sistem dengan dua derajat kebebasan.