BAB II
TEORI PENUNJANG

2.1. LOGIKA PROPOSISI

2.1.1. **Bahasa Logika Proposisi**

Definisi 1 (Proposisi)

Kalimat logika proposisi dibentuk dari simbol-simbol berikut, yang merupakan proposisi,

- Simbol-simbol Kebenaran :

  benar dan salah

- Simbol-simbol Proposisi :

  $P, Q, R, S, P_1, \ldots\ldots$

Definisi 2 (Kalimat)

Kalimat logika proposisi dibentuk dari proposisi dengan menggunakan kata penghubung proposisi :

tidak , dan , atau , jika-maka , jika dan hanya jika , jika-maka-jika tidak maka

Kalimat dibentuk menurut aturan berikut :

- Setiap proposisi, yakni simbol kebenaran maupun simbol proposisi merupakan kalimat.
- Jika $\mathcal{F}$ kalimat, maka negasinya juga kalimat, yakni

  (tidak $\mathcal{F}$)

- Jika $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ kalimat, konjungsinya juga kalimat, yakni

  ($\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$)

  $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ komponen konjungsi dari ($\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$)

- Jika $\mathscr{F}$ dan $\mathscr{G}$ kalimat, disjungsinya juga kalimat, yakni

  ($\mathscr{F}$ atau $\mathscr{G}$)

  $\mathscr{F}$ dan $\mathscr{G}$ komponen disjungsi dari ($\mathscr{F}$ atau $\mathscr{G}$)
- Jika $\mathscr{F}$ dan $\mathscr{G}$ kalimat, implikasinya juga kalimat, yakni

  (jika $\mathscr{F}$ maka $\mathscr{G}$)

  $\mathscr{F}$ anteseden dan $\mathscr{G}$ konsequen dari (jika $\mathscr{F}$ maka $\mathscr{G}$)

  Kalimat (jika $\mathscr{G}$ maka $\mathscr{F}$) disebut konvers dari kalimat (jika $\mathscr{F}$ maka $\mathscr{G}$)
- Jika $\mathscr{F}$ dan $\mathscr{G}$ kalimat, equivalensinya juga kalimat, yakni

  ($\mathscr{F}$ jika dan hanya jika $\mathscr{G}$)

  $\mathscr{F}$ sisi bagian kiri dan $\mathscr{G}$ sisi bagian kanan dari equivalensi ($\mathscr{F}$ jika dan hanya jika $\mathscr{G}$)
- Jika $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ dan $\mathscr{H}$ kalimat, maka kondisionalnya juga kalimat, yakni

  (jika $\mathscr{F}$ maka $\mathscr{G}$ jika tidak maka $\mathscr{H}$)

  $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ dan $\mathscr{H}$ masing-masing merupakan anak kalimat dari jika, maka dan jika tidak maka dari kondisional (jika $\mathscr{F}$ maka $\mathscr{G}$ jika tidak maka $\mathscr{H}$)
- Setiap kalimat yang digunakan untuk membentuk kalimat E, memuat E itu sendiri yang merupakan sub kalimat dari E. Dengan demikian sub kalimat dari E adalah E sendiri, komponen E, dan sub kalimat dari komponen-komponen tersebut. Sub kalimat dari kalimat E selain E itu sendiri merupakan sub kalimat yang sebenarnya dari E.
- Pada kalimat yang panjang digunakan tanda kurung ( ), pasangan akolade [ ], dan pasangan kurawal { } dan sering pula dilakukan pemutusan untuk menunjukkan struktur

kalimat

- Kata penghubung proposisi bisa diganti dengan notasi yang lebih singkat, yakni

dan	$\wedge$
atau	$\vee$
tidak	$\neg$
jika-maka	$\rightarrow$
jika dan hanya jika	$\leftrightarrow$

(untuk kata penghubung jika-maka -jika tidak maka umumnya tidak diganti dengan notasi yang lebih singkat).

Contoh 1

Expressi E :

[{tidak (P atau Q)} jika dan hanya jika {(tidak P) dan (tidak Q)}]

merupakan kalimat.

Karena P dan Q kalimat,

maka (P atau Q), (tidak P), (tidak Q) kalimat,

karenanya {tidak (P atau Q)} dan {(tidak P) dan (tidak Q)} kalimat,

maka bila diberikan expressi E,

[{tidak (P atau Q)} jika dan hanya jika {(tidak P) dan (tidak Q)}]

juga merupakan kalimat.

Delapan kalimat di atas (termasuk E) merupakan sub kalimat dari E, tujuh kalimatnya (selain E) merupakan sub kalimat yang sebenarnya dari E.

Contoh 2

Kalimat E di atas bisa ditulis sebagai berikut :

E : tidak (P atau Q)
jika dan hanya jika
(tidak P) dan (tidak Q)

atau dengan lebih singkat

$$[\{\neg (P \vee Q)\} \leftrightarrow \{(\neg P) \wedge (\neg Q)\}]$$

2.1.2. Arti Kalimat Logika Proposisi

Definisi 3 (interpretasi)

Suatu interpretasi I merupakan suatu penugasan dari nilai kebenaran, yakni benar dan salah, pada tiap himpunan simbol-simbol proposisi . Interpretasi kosong tidak memberikan nilai kebenaran pada simbol-simbol proposisi.

Untuk suatu kalimat $\mathcal{F}$, interpretasi I merupakan interpretasi untuk $\mathcal{F}$ jika I memberikan nilai kebenaran , yakni benar atau salah pada tiap simbol proposisi dari $\mathcal{F}$

Contoh 3

Diandaikan kalimat

$\mathcal{F}$: P atau (tidak Q)

Suatu interpretasi I_1 untuk $\mathcal{F}$ menentukan salah pada P dan benar pada Q, yakni

I_1 : P salah

Q benar

interpretasi lainnya yakni I_2

I_2 : P benar

Q salah

R benar

juga merupakan interpretasi untuk $\mathcal{F}$, sekalipun R tidak terdapat dalam $\mathcal{F}$.

Definisi 4 (Aturan semantik)

Misalkan E kalimat dan I interpretasi untuk E. Maka nilai kebenaran dari E (dan semua sub kalimatnya) dalam I ditentukan dengan menggunakan aturan semantik berikut :

- Aturan Proposisi

  Nilai kebenaran dari tiap-tiap simbol proposisi

  P, Q, R,

  dalam E sama seperti nilai kebenaran yang ditunjukkan I.

- Aturan Benar

  Kalimat

  benar

  adalah benar dalam I.

- Aturan Salah

  Kalimat

  salah

  adalah salah dalam I.

- Aturan Tidak

  Negasi

  tidak $\mathcal{F}$

benar jika $\mathcal{F}$ salah

- Aturan Dan

  Konjungsi

  $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$

  benar jika $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ keduanya benar

- Aturan Atau

  Disjungsi

  $\mathcal{F}$ atau $\mathcal{G}$

  benar jika $\mathcal{F}$ benar atau jika $\mathcal{G}$ benar

- Aturan Jika-maka

  Implikasi

  jika $\mathcal{F}$ maka $\mathcal{G}$

  benar jika $\mathcal{F}$ salah atau jika $\mathcal{G}$ benar

- Aturan Jika dan hanya jika

  Equivalensi

  $\mathcal{F}$ jika dan hanya jika $\mathcal{G}$

  benar jika nilai kebenaran dari $\mathcal{F}$ sama seperti nilai kebenaran $\mathcal{G}$, yakni jika $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ keduanya benar atau jika $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ keduanya salah.

- Aturan Jika-maka-jika tidak maka

  Kondisional

  jika $\mathcal{F}$ maka $\mathcal{G}$ jika tidak maka $\mathcal{K}$

  mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan nilai kebenaran dari $\mathcal{G}$ jika $\mathcal{F}$ benar, dan mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan nilai kebenaran dari $\mathcal{K}$ jika $\mathcal{F}$ salah.

Definisi 5 (tabel kebenaran)

Aturan semantik bisa diringkas dalam tabel kebenaran sebagai berikut :

$\mathcal{F}$	tidak $\mathcal{F}$
benar	salah
salah	benar

Benar : B

Salah : S

$\mathcal{F}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$	$\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$	$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$	$\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}$
B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	S
S	B	S	B	B	S
S	S	S	S	B	B

$\mathcal{F}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{H}$	jika $\mathcal{F}$ maka $\mathcal{G}$ jika tidak maka $\mathcal{H}$
B	B	B	B
B	B	S	B
B	S	B	S
B	S	S	S
S	B	B	B
S	B	S	S
S	S	B	B
S	S	S	S

Contoh 4

Diandaikan kalimat

$\mathcal{F}$: jika (P dan (tidak Q)) maka ((tidak P) atau R)

dan interpretasi

I : P benar
Q salah
R salah

untuk $\mathcal{F}$.

Maka akan digunakan aturan semantik untuk menentukan nilai kebenaran dari kalimat $\mathcal{F}$ dalam interpretasi sebagai berikut karena Q salah, (dengan aturan tidak) diperoleh

(tidak Q) benar

karena P benar dan (tidak Q) benar, (dengan aturan dan) diperoleh

(P dan (tidak Q)) benar

karena P benar, (dengan aturan tidak) diperoleh

(tidak P) salah

karena (tidak P) salah dan R salah, (dengan aturan atau) diperoleh

((tidakP) atau R) salah

karena (P dan (tidak Q)) benar dan ((tidak P) atau R) salah, (dengan aturan jika-maka) maka semua kalimat $\mathcal{F}$,

jika (P dan (tidak Q))

maka ((tidak P) atau R)

adalah salah.

2.1.3. **Substitusi**

Definisi 6 (substitusi total)

Jika $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ dan $\mathcal{H}$ kalimat, maka

$$\mathcal{F} \leftarrow \{\mathcal{G} \longleftarrow \mathcal{H}\}$$

adalah kalimat yang diperoleh dengan mengganti semua peubah dari $\mathcal{G}$ dalam $\mathcal{F}$ dengan $\mathcal{H}$.

Contoh 5

$\mathcal{F}$: [P dan (Q atau P)]

pada substitusi total $\mathcal{F} \leftarrow \{P \longleftarrow$ (jika R maka S)$\}$

menghasilkan

(jika R maka S) dan (Q atau (jika R maka S))

Definisi 7 (substitusi parsial)

Jika $\mathcal{F}$ $\mathcal{G}$ dan $\mathcal{H}$ kalimat, maka

$$\mathcal{F} \leftarrow \{\mathcal{G} \longleftarrow \mathcal{H}\}$$

adalah kalimat yang diperoleh dengan tidak mengganti, mengganti satu atau lebih peubah dari $\mathcal{G}$ dalam $\mathcal{F}$ dengan $\mathcal{H}$.

Contoh 6

$$\mathcal{F} : [\text{P atau P}]$$

pada substitusi parsial $\mathcal{F} \leftarrow \{P \longleftarrow Q\}$

menghasilkan

P atau P (tidak ada yang berubah pada P)

P atau Q (mengganti P yang kedua)

Q atau P (mengganti P yang pertama)

Q atau Q (mengganti kedua P)

Dengan demikian substitusi parsial di atas menghasilkan empat kalimat.

Definisi 8 (substitusi majemuk)

Diandaikan $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$ dan $\mathcal{H}_1$,   ,$\mathcal{H}_n$ merupakan kalimat, maka

- Substitusi Total

Ditunjukkan dengan

$$F \leftarrow \left\{ \begin{matrix} \mathcal{G}_1 & \longleftarrow & \mathcal{H}_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{G}_1 & \longleftarrow & \mathcal{H}_n \end{matrix} \right\}$$

adalah kalimat yang dipeoleh dengan mengganti secara bersamaan setiap peubah dari tiap sub kalimat $\mathcal{G}_i$ dalam $\mathcal{F}$ dengan $\mathcal{H}_i$.

• Substitusi Parsial

Ditunjukkan dengan

$$\mathcal{F} \leftarrow \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1 \longleftarrow \mathcal{H}_1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \mathcal{G} \longleftarrow \mathcal{H} \end{bmatrix} \right\}$$

adalah kalimat yang diperoleh dengan tidak mengganti, atau mengganti secara bersamaan satu atau lebih peubah dari beberapa sub kalimat $\mathcal{G}_i$ dalam $\mathcal{F}$ dengan kalimat $\mathcal{H}_i$.

Contoh 7

• Substitusi Total

$$\begin{bmatrix} \text{jika P} \\ \text{maka jika (Q atau P)} \\ \quad\text{maka (Q atau R)} \end{bmatrix} \leftarrow \left\{ \begin{matrix} \text{P} \longleftarrow \text{R} \\ \text{(Q atau R)} \longleftarrow \text{(tidak R)} \end{matrix} \right\}$$

menghasilkan kalimat

jika R

maka jika (Q atau R)

maka (tidak R)

Dua peubah dari P diganti dengan R dan peubah dari (Q atau R) diganti dengan (tidak R).

• Substitusi Parsial

$$\begin{bmatrix} \text{jika P} \\ \text{maka jika (Q atau P)} \\ \quad\text{maka (Q atau R)} \end{bmatrix} \leftarrow \left\{ \begin{bmatrix} \text{P} \longleftarrow \text{R} \\ \text{(Q atau R)} \longleftarrow \text{(tidak R)} \end{bmatrix} \right\}$$

menghasilkan beberapa kalimat, yakni

1. jika P
   maka jika (Q atau P)
   maka (Q atau R)

   (tidak mengganti peubah sama sekali)

2. jika R
   maka jika (Q atau P)
   maka (Q atau R)

   (mengganti peubah dari P yang pertama)

3. jika R
   maka jika (Q atau R)
   maka (Q atau R)

   (mengganti peubah dari P yang pertama dan kedua)

4. jika R
   maka jika (Q atau R)
   maka (tidak R)

   (mengganti peubah dari P yang pertama dan kedua serta mengganti peubah dari (Q atau R))

5. jika P
   maka jika (Q atau R)
   maka (Q atau R)

   (mengganti peubah dari P yang kedua)

6. jika P
   maka jika (Q atau R)
   maka (tidak R)

   (mengganti peubah dari P yang kedua dan peubah dari (Q atau R))

7. jika P
   maka jika (Q atau P)
   maka (tidak R)

   (mengganti peubah dari (Q atau R))

8. jika R
   maka jika (Q atau P)
   maka (tidak R)

   (mengganti peubah dari P yang pertama dan peubah dari (Q atau R)

Maka substitusi parsial di atas menghasilkan delapan kalimat.

2.2. Logika Predikat

2.2.1. Bahasa Logika Predikat

Definisi 9 (simbol-simbol)

Kalimat logika predikat dibentuk dari simbol-simbol berikut

- Simbol kebenaran

  benar dan salah

- Simbol konstanta

  a, b, c,...

- Simbol variabel

  u, v, w, x, y,...

- Simbol fungsi

  f, g, h,...

  tiap simbol fungsi mempunyai bilangan bulat positif yang salingberhubungan yang merupakan arity-nya, yang menunjukkan pengambilan argumen fungsi.

- Simbol predikat

  p, q, r,...

  tiap simbol predikat juga mempunyai hubungan arity.

Suatu fungsi atau simbol predikat dari arity n disebut n-ary fungsi atau simbol predikat.

Simbol 1-ary, 2-ary, 3-ary disebut uner, biner, ternary.

Konstanta dan variabel menunjukkan obyek, sedangkan fungsi dan predikat menunjukkan fungsi dan relasi antar obyek-obyek tersebut.

Definisi 10 (term)

Term logika predikat merupakan expressi yang berarti obyek, yang dibentuk menurut aturan berikut :

- Konstanta a, b, c,... adalah term
- Variabel x, y, u,... adalah term
- Jika t_1. t_2,..., t_n term, dimana $n \geq 1$ dan f simbol fungsi dari arity n, maka

$f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ adalah term

- Jika $\mathcal{F}$ kalimat dan s dan t term, maka kondisional

jika $\mathcal{F}$ maka s jika tidak maka t adalah term

Contoh 8

Diandaikan simbol fungsi f biner, yakni dari arity 2, dan simbol fungsi g ternary, yakni dari arity 3, maka

a term (karena a konstanta)

x term (karena x variabel)

f(a,x) term (karena a dan x term dan f simbol fungsi biner)

g(x, f(a,x)) juga term (karena x, f(a,x) dan a term dan g simbol fungsi ternary)

Definisi 11 (proposisi)

Proposisi logika predikat merupakan relasi antar obyek, yang dibentuk menurut aturan berikut :

- Simbol kebenaran

benar dan salah

- Jika $t_1, t_2, \ldots, t_n$ term, dimana $n \geq 1$ dan simbol predikat arity n, maka

$p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ adalah proposisi.

Contoh 9

Jika p simbol predikat ternary (arity 3), maka

p(a, x, f(a,x))

adalah proposisi (karena a, x, f(a,x)) adalah term dan p simbol predikat ternary).

Definisi 12 (kalimat)

Kalimat logika predikat dibentuk dari proposisinya, menurut aturan berikut :

- Setiap proposisi adalah kalimat
- Jika $\mathcal{F}$ kalimat, negasinya juga kalimat, yakni

$$(\text{tidak } \mathcal{F})$$

- Jika $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ kalimat, konjungsinya juga kalimat, yakni

$$(\mathcal{F} \text{ dan } \mathcal{G})$$

  dan disjungsinya juga kalimat, yakni

$$(\mathcal{F} \text{ atau } \mathcal{G})$$

- Jika $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ kalimat, implikasinya juga kalimat, yakni

$$(\text{jika } \mathcal{F} \text{ maka } \mathcal{G})$$

  dan equivalensinya juga kalimat, yakni

$$(\mathcal{F} \text{ jika dan hanya jika } \mathcal{G})$$

- Jika $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ dan $\mathcal{H}$ kalimat, kondisionalnya juga kalimat, yakni

$$(\text{jika } \mathcal{F} \text{ maka } \mathcal{G} \text{ jika tidak maka } \mathcal{H})$$

- Jika x variabel dan $\mathcal{F}$ kalimat, maka

$$((\text{untuk setiap } x)\ \mathcal{F})$$

dan

$$((\text{terdapat } x)\ \mathcal{F})$$

merupakan kalimat. Prefik "untuk setiap" dan "terdapat" masing-masing disebut quantifier universal dan quantifier existensial ;

variabel dari $\mathcal{F}$ disebut skup quantifier.

Contoh 10

Diandaikansimbol fungsi f dan g dan simbol predikat q adalah biner, yakni dari arity 2, dan simbol predikat p ternary, yakni dari arity 3. Maka

p(a, x, f(a,x))

merupakan kalimat (karena merupakan proposisi) ;

q(g(b,x), y)

adalah kalimat (karena merupakan proposisi) ;

((terdapat y) q(g(b,x), y))

adalah kalimat (karena skup quantifier existensial (terdapat y) adalah kalimat) ;

(p(a, x, f(a,x)) dan ((terdapat y) q(g(b,x), y)))

adalah kalimat (karena keduanya komponen konjungsi yang merupakan kalimat) ;

((untuk setiap x) (p(a, x, f(a,x)) dan ((terdapat y) q(g(b,x), y))))

adalah kalimat (karena skup quantifier universal (untuk setiap x) adalah kalimat).

Definisi 13 (expressi)

Suatu expressi logika predikat adalahsuatu kalimat atau term.

Definisi 14 (sub term, sub kalimat, sub expressi)

- Setiap term yang digunakan membentuk term t (termasuk t sendiri) atau kalimat $\mathcal{F}$ disebut sub term dari t atau $\mathcal{F}$.
- Setiap kalimat yang digunakan membentuk term t atau kalimat $\mathcal{F}$ (termasuk $\mathcal{F}$ sendiri) disebut sub kalimat dari t atau $\mathcal{F}$.
- Sub term bersama dengan sub kalimatdari term t (termasuk t sendiri)disebut sub expressi dari t. Demikian pula,

sub term dan sub kalimat dari kalimat $\mathcal{F}$ (termasuk $\mathcal{F}$ sendiri) disebut sub axpressi dari $\mathcal{F}$

Contoh 11

- Dalam term kondisional

$$t : \begin{array}{l} \text{Jika (untuk setiap x) } q(x, f(x)) \\ \text{maka } f(a) \\ \text{jika tidak maka } b \end{array}$$

sub termnya adalah

x, a, f(a), b dan t sendiri

sub kalimatnya adalah

q(x, f(a)) dan (untuk setiap x) q(x, f(a))

Semua sub term dan sub kalimat tersebut merupakan sub expressi dari t.

- Dalam kalimat

$$\mathcal{F} : \begin{array}{l} p(a, x, f(a,x)) \\ \text{dan} \\ \text{(terdapat y) } q(g(b,x), y) \end{array}$$

sub termnya adalah

a, x, f(a,x), b, g(b,x) dan y

sub kalimatnya adalah

p(a, x, f(a,x)), q(g(b,x), y), (terdapat y) q(g(b,x), y) dan $\mathcal{F}$ sendiri.

Catatan,

Notasi quantifier ditulis dengan sistem standart sebagai berikut :

(untuk setiap x) = $\forall$ x

(terdapat x) = $\exists$ x

Definisi 15 (peubah bebas dan peubah terikat)

Diandaikan x variabel dan E expressi (kalimat atau term) dari logika predikat.

Maka peubah x bebas dalam E jika tidak terdapat dalam skup quantifier (untuk setiap x) atau (terdapat x)dalam E.

Dan peubah x terikat dalam E jika terdapat dalam skup quantifier (untuk setiap x) atau (terdapat x) dalam E.

Contoh 12

Diandaikan kalimat

$$E : (\text{untuk setiap } x) \left[\begin{array}{l} p(x,y) \\ \text{dan} \\ (\text{terdapat } y)\ q(y,z) \end{array} \right]$$

Variabel x dalam p(x,y) terikat dalam E, dengan quantifier (untuk setiap).

Variabel z dalam q(y,z) bebas dalam E.

Variabel y dalam p(x,y) bebas.

Variabel y dalam q(y,z) terikat, dengan quantifier (terdapat y).

Remark-pendapat

Jika $\mathcal{F}$ sub expressi dari expressi E, variabel dalam $\mathcal{F}$. bisa bebas dalam $\mathcal{F}$ tetapi terikat dalam E.

Sebagai contoh, jika E kalimat

$$E : (\text{untuk setiap } x)\ (\text{terdapat } y)\ p(x,y)$$

dan $\mathcal{F}$ sub kalimat

$$\mathcal{F} : (\text{terdapat } y)\ p(x,y)$$

Variabel x bebas dalam $\mathcal{F}$, karena tidak terdapat dalam skup quantifier (untuk setiap x) atau (terdapat x) dalam $\mathcal{F}$.

Variabel x terikatdalam E, karena terdapat dalam skup quantifier (untuk setiap x) dalam E.

Definisi 16 (kalimat tertutup)

Suatu kalimat adalah tertutup jika tidak mempunyai peubah bebas dari variabelnya.

Contoh 13

Kalimat

(untuk setiap x) (untuk setiap y) p(x,y)

tertutup.

Definisi 17 (simbol-simbol bebas)

Simbol-simbol bebas dari suatu expressi E terdiri atas :

1. Simbol-simbol peubah bebas di E
2. Simbol-simbol konstanta di E
3. Simbol-simbol fungsi di E
4. Simbol-simbol predikat di E

Contoh 14

Simbol-simbol bebas dari expressi E

$$E : ((\text{untuk setiap}) \begin{bmatrix} p(x,y) \\ \text{dan} \\ (\text{terdapat } y)\ q(y, f(a,z)) \end{bmatrix}$$

adalah : 1. peubah bebas : y, z

2. konstanta : a
3. fungsi : f
4. predikat : p, q

2.2.2. **Arti Kalimat Logika Predikat**

Definisi 18 (interpretasi)

Diandaikan D himpunan tidak kosong sembarang

Interpretasi *I* pada domain D memberikan nilai pada konstanta, variabel, fungsi, dan simbol predikat, sebagai berikut :

- Tiap konstanta a, elemen a_I dari D
- Tiap variabel x, elemen x_I dari D
- Tiap simbol fungsi f arity n, n-ary fungsi $f_I(d_1, d_2, \ldots, d_n)$dalam D.Fungsi f_I didefinisikan pada argumen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ dalam D.
- Tiap simbol predikat p arity n, n- ary relasi $p_I(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ bernilai benar atau salah.

  relasi p_I didefinisikan pada argumen $d_1, d_2, \ldots, d_n$dalam D.

Untuk expressi E dalam logika predikat, interpretasi *I* merupakan interpretasi untuk E jika *I* memberikan nilai pada tiap simbol bebas dari E, yakni, konstanta, fungsi, dan simbol predikat serta variabel bebas dari E.

Contoh 15

- Diandaikan kalimat

E : jika p(x, f(x))
maka (terdapat y) p(a,y)

E mempunyai variabel bebas x.

Andaikan *I* interpretasi untuk E pada domain bilangan real

a adalah 2

x adalah π

f adalah fungsi pembagi 4 (yakni, $f_I(d)$ adalah d/4)

p adalah relasi lebih besar atau sama dengan (yakni, $p_I(d_1, d_2)$ adalah $d_1 \geq d_2$)

maka kalimat dalam I adalah

jika $\pi \geq \pi/4$

maka terdapat bilangan real d

sedemikian hingga $2 \geq d$

Interpretasi tidak menentukan nilai variabel y yang tidak bebas dalam E.

- Diandaikan J interpretasi untuk Epada himpunan semua orang

a adalah ratu Elizabeth

b adalah Napoleon

x adalah George Washington

f adalah fungsi "ibu" (yakni, f_J (d) adalah ibu dari d)

p adalah relasi "anak" (yakni, p_J (d_1,d_2)adalah "d_1 anak dari d_2")

Maka kalimat dalam J adalah

jika George Washington anak dari ibu George Washington

maka terdapat seseorang y

sedemikian hingga ratu Elizabeth anak dari y

Interpretasi menentukan nilai (Napoleon) konstanta b sekalipun b tidak terdapat dalam kalimat.

2.2.3. Aturan Semantik Bahasa Logika Predikat

Definisi 19 (aturan semantik dasar)

Diandaikan E expressi dan I interpretasi untuk E pada domain tidak kosong D.

Maka nilai E dalam I ditentukan dengan menggunakan aturan semantik berikut :

- Aturan konstanta

  Nilai konstanta

  a

  adalah elemen domain a_I

- Aturan Variabel

  Nilai variabel

  x

  adalah elemen domain x_I

- Aturan aplikasi

  Nilai suatu aplikasi

  $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

  adalah elemen domain f_I $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, dimana f_I fungsi yang ditentukan oleh f dan $d_1, d_2, \ldots, d_n$ yang merupakan nilai term t_1, $t_2, \ldots,$ t_n dalam I.

- Aturan term jika-maka-jika tidak maka

  Nilai term kondisional

  jika $\mathcal{F}$ maka s jika tidak maka t

  merupakan nilai term s jika kalimat $\mathcal{F}$ benar dan merupakan nilai term t jika $\mathcal{F}$ salah dalam I.

- Aturan benar dan salah

  Nilai simbol kebenaran

  benar dan salah

  merupakan nilai kebenaran benar dan salah.

- Aturan proposisi

  Nilai proposisi

  $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

  adalah nilai kebenaran p_I $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, benar dan salah,dimana p_I relasi yang ditentukan oleh p dan $d_1, d_2, \ldots, d_n$ yang merupakan nilai term $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dalam *I*.

- Aturan tidak

  Nilai negasi

  tidak $\mathcal{F}$

  benar jika kalimat $\mathcal{F}$ salah dalam *I*.

Contoh 16

Diandaikan kalimat

tidak p(y, f(y))

E : atau

p(a, f(f(a)))

dan andaikan *I* interpretasi pada domain bilangan bulat tidak negatif, dimana

a adalah 0

y adalah 2

f adalah fungsi succesor (yakni, f_I (d) adalah d+1)

p adalah relasi kurang dari (yakni, $p_I(d_1, d_2)$ adalah $d_1 < d_2$

Maka interpretasi *I* menjadikan E sebagai berikut

tidak 2 < 2+1

atau

0 < (0+1)+1

Akan digunakan aturan semantik untuk menentukan nilai disjungsi pertama, yakni, tidak p(y, f(y)), dalam interpretasi ini sebagai berikut :

(dengan aturan variabel) diperoleh

nilai y adalah 2

karena y adalah 2 dan f fungsi succesor, (dengan aturan aplikasi) diperoleh

nilai f(y) adalah 2+1, yakni 3

karena y adalah 2 dan f(y) adalah 3, dan p relasi kurang dari <, (dengan aturan proposisi) diperoleh

nilai p(y, f(y)) adalah 2 < 3, maka benar

karena p(y, f(y)) benar, (dengan aturan tidak) diperoleh

nilai tidak p(y, f(y)) salah

Untuk menentukan nilai disjungsi kedua p(a, f(a)) dalam interpretasi *I* sebagai berikut :

(dengan aturan konstanta) diperoleh

nilai adalah 0

karena a adalah 0 dan f fungsi succesor, (dengan aturan aplikasi) diperoleh

nilai f(a) adalah 0+1, yakni 1

karena f(a) adalah 1 dan f fungsi succesor, (dengan aturan aplikasi) diperoleh

nilai f(f(a)) adalah 1+1, yakni 2

karena a adalah 0, f(f(a)) adalah 2, dan p relasi kurang dari <, (dengan relasi proposisi) diperoleh

nilai p(a, f(f(a))) adalah 0 < 2, maka benar

akhirnya, karena dalam interpretasi *I* disjungsi pertama tidak p(y, f(y)) salah dan disjungsi kedua p(a, f(f(a))) benar, (dengan aturan atau) diperoleh nilai kalimat E ,yakni

tidak p(y, f(y))

atau

p(a, f(f(a)))

adalah benar.

Definisi 20 (perluasan interpretasi)

Diandaikan *I* interpretasi pada domain D.

Variabel x dan konstanta d pada domain D.

Perluasan interpretasi dari *I* pada domain D dengan notasi

$$\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$$

berarti :

1. memberi nilai d pada variabel x
2. nilai variabel yang lain sesuai *I*
3. konstanta a, fungsi f dan predikat p nilainya sesuai *I*

Analog :

1. untuk konstanta a dengan notasi : $\langle a \leftarrow d \rangle \circ I$
2. untuk fungsi f dengan notasi : $\langle f \leftarrow g \rangle \circ I$
3. untuk predikat p dengan notasi : $\langle p \leftarrow q \rangle \circ I$

Contoh 17

1. *I* interpretasi pada domain bilangan bulat, dimana

x adalah 1

y adalah 2

maka perluasan interpretasi

$$\langle x \leftarrow 3 \rangle \circ I$$

berarti memberi nilai 3 pada x, sedangkan y tetap

jadi x adalah 3

y adalah 2

2. I interpretasi pada domain bilangan bulat

   f simbol fungsi biner

   + fungsi jumlahan pada bilangan bulat

   maka

$$\langle f \leftarrow + \rangle \circ I$$

   interpretasi pada bilangan bulat dimana

   f adalah fungsi jumlahan +

   tetapi nilai simbol yang lain sesuai I.

Definisi 21 (aturan semantik untuk quantifier)

- Aturan untuk setiap

  Diandaikan I interpretasi untuk kalimat (untuk setiap x)$\mathcal{F}$ pada domain D.

  Maka nilai kalimat quantifier universal

  (untuk setiap x)$\mathcal{F}$

  benar dalam I jika

  untuk setiap elemen domain d dalam D

  nilai $\mathcal{F}$ benar dalam perluasan interpretasi

$$\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$$

- Aturan terdapat

  Diandaikan I interpretasi untuk kalimat (terdapat x)$\mathcal{F}$ pada domain D.

  Maka nilai kalimat quantifier existensial

  (terdapat x)$\mathcal{F}$

  benar dalam I jika

  terdapat elemen domain d dalam D

  sedemikian hingga nilai $\mathcal{F}$ benar dalam perluasan interpretasi

$$\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$$

Contoh 18

Diandaikan kalimat

$$\mathcal{G} : \text{(terdapat } x\text{) } p(x,y)$$

dan andaikan I interpretasi pada bilangan bulat positif, dimana

y adalah 2

p relasi kurang dari <

akan dibuktikan bahwa $\mathcal{G}$ benar dalam I.

Untuk membuktikan ini, akan diperlihatkan (dengan aturan terdapat)

terdapat elemen domain d dalam D

sedemikian hingga nilai

$p(x,y)$

benar dalam perluasan interpretasi $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$

selanjutnya ambil d adalah 1, maka karena p relasi kurang dari, x adalah 1, dan y adalah 2 dalam perluasan interpretasi $\langle x \leftarrow 1 \rangle \circ I$, (dengan aturan proposisi) diperoleh

nilai

$p(x,y)$

adalah $1 < 2$, jadi, benar dalam $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$

Karenanya, kalimat $\mathcal{G}$ benar dalam I.

Definisi 22 (kesepakatan)

Dua interpretasi I dan J bersepakat pada suatu simbol (yaknivariabel, konstantan fungsi atau simbol predikat) jika keduanya menentukan nilai sama pada simbol

atau

keduanya tidak menentukan nilai pada simbol

Dua interpretasi *I* dan J bersapakat pada expressi E jika

nilai E dalam *I* sama dengan nilai E dalam J

atau

I dan J bukan interpretasi untuk E

Contoh 19

Diandaikan interpretasi *I* pada bilangan bulat dimana

I : a adalah 0

b adalah 2

x adalah -1

f adalah fungsi succesor (yakni, $f_I(d)$ adalah d+1)

dan interpretasi J pada bilangan bulat dimana

J : a adalah 0

x adalah 1

f adalah fungsi predecesor (yakni, $f_J(d)$ adalah d-1)

Maka *I* dan J bersepakat pada konstanta a, karena nilai a aalah 0dalam kedua intrpretasi.

I dan J bersepakat pada simbol predikat p, karena keduanya tidak memberikan nilai pada simbol ini.

I dan J tidak bersepakat pada variabel x, karena nilai x adalah -1 dalam *I* tetapi bernilai 1 dalam J.

I dan J bersepakat pada expressi f(x), karena nilai f(x) adalah (-1)+1, yakni 0, dalam *I* dan 1-1, yakni 0 dalam J.

I dan J bersepakat pada expressi f(y), karena keduanya bukan interpretasi untuk expressi ini.

I dan J tidak bersepakat pada expressi f(b), karena *I* interpretasi untuk f(b) tetapi J tidak.