BAB II

INTEGRAL STOKASTIK TERHADAP MARTINGALE $- L^2$

2.1 PROSES - PROSES TERPREDIKSI

L merupakan keluarga dari semua fungsi bernilai real $Y_t(\omega)$ yang didefinisikan pada $R^+ \times \Omega$ yang terukur pada $\mathscr{B}_t(\omega) \times \mathscr{A}$, dan mempunyai sifat - sifat sebagai berikut :

1. $Y = (Y_t)$ teradaptasi terhadap $(\mathscr{F}_t)$
2. Untuk setiap ω , fungsi $t \longrightarrow Y_t(\omega)$ adalah kontinu kiri

Dengan $\mathscr{F}_t$, $t \in R^+$ adalah keluarga naik sub σ - field yang kontinu kanan dari $\mathscr{A}$ dan $\mathscr{F}_o$ mengandung semua himpunan kosong P dalam $\mathscr{A}$. Dengan P adalah ukuran probabilitas pada $(\Omega, \mathscr{A})$. $Y = Y_t$ dikatakan teradaptasi terhadap $\mathscr{F}_t$ jika setiap Y_t terukur terhadap $\mathscr{F}_t$.

Keluarga $(\mathscr{F}_t)$, $t \in T$ disebut keluarga naik (increasing family) dari σ - field jika $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{A}$ untuk $s \le t$.
Sedangkan keluarga $(\mathscr{F}_t)$, $t \in T$ disebut keluarga turun (decreasing family) dari σ - field jika $\mathscr{F}_s \supset \mathscr{F}_t \supset \mathscr{A}$.

Keluarga naik $(\mathcal{G}_t)$ dikatakan kontinu kanan jika :

(i) $\mathcal{G}_t^+ = \mathcal{G}_t$, untuk setiap t , dengan

$\mathcal{G}_t^+ = \bigcap_{s>t} \mathcal{G}_s$, untuk $t \geq 0$

(ii) $\mathcal{G}_0$ mengandung semua himpunan kosong P dalam $\mathcal{A}$.

Definisi 2.1.1

Suatu proses stokastik $X = X_t \ (\omega)$ adalah terprediksi terhadap $\mathcal{G}_t$, jika fungsi $(t,\omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ terukur terhadap P.

Contoh

Proses sederhana (ϕ_t) yang didefinisikan dalam bentuk :

$$\phi_t \ (\omega) = \phi_0 \ (\omega) \ I_{(0)} (t) + \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j \ (\omega) \ I_{(t_j, t_{j+1}]} (t)$$

dengan $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, adalah terprediksi jika setiap ϕ_j terukur terhadap ($\mathcal{G}_{t_j}$).

Definisi 2.1.2

Proses stokastik $X = X_t$, $t \in R^+$ adalah terukur bila fungsi $(t,\omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ adalah terukur terhadap $\mathcal{B}(R^+) \times \mathcal{A}$. Jika $t \in [0,T]$, maka keterukuran itu terhadap $\mathcal{B}[0,T] \times \mathcal{A}$

Definisi 2.1.3

Variabel random X yang didefinisikan pada ruang probabilitas $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ adalah suatu fungsi bernilai real dengan domain Ω sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $T \in \mathscr{B}(R)$:

$$\{\omega / X(\omega) \in \mathscr{B}(R)\} \in \mathscr{A}$$

Definisi 2.1.4

Suatu keluarga $\{\xi_n\}, n \geq 1$ dari variabel random, dikatakan terintegral seragam, jika :

$$\sup_n \int_{\{|\xi_n| > c\}} |\xi_n| dP \longrightarrow 0, \ c \longrightarrow \infty$$

atau dalam notasi yang lain

$$\sup_n E\left[|\xi_n| \ I_{\{|\xi_n| > c\}} \right] \longrightarrow 0, \ c \longrightarrow \infty$$

2.2 MARTINGALE TERINTEGRAL KUADRAT

Definisi 2.2.1

Suatu proses stokastik (M_t) disebut martingale jika :

(i) untuk setiap t, M_t terintegral dan terukur terhadap $\mathscr{F}_t$.

(ii) untuk $s < t$, $E(M_t \mid \mathscr{F}_s) = M_s$

Contoh :

Jika (ξ_n), $n \geq 0$ adalah barisan dari variabel random independen dengan $E(\xi_n) = 0$ dan $X_n = \xi_o +$

$\xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\omega : \xi_0 , \ldots , \xi_n\}$

maka barisan stokastik $X = (X_n , \mathcal{F}_n)$ adalah suatu martingale.

Bukti :

Misalkan $X_n = \xi_0 + \ldots + \xi_n$, maka

$$E(|X_n|) = E(|\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n|)$$
$$\leq E(|\xi_0|) + \ldots + E(|\xi_n|)$$
$$< \infty \text{ , untuk } n \geq 0.$$

Karena $E(|X_n|) < \infty$ maka jelas bahwa untuk setiap $n \geq 0$, X_n terintegral.

Dan untuk $m \geq n \geq 0$,

$$E(X_m \mid \mathcal{F}_n) = E(X_n + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$$
$$= E(X_n \mid \mathcal{F}_n) + E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$$

Karena X_{n+1} independen dengan $\mathcal{F}_n$ maka :

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1})$$

dan juga karena $E(\xi_n) = 0$ maka $E(X_{n+1}) = 0$, sehingga didapat :

$$E(X_m \mid \mathcal{F}_n) = E(X_n \mid \mathcal{F}_n) + E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$$
$$= E(X_n \mid \mathcal{F}_n) + E(X_{n+1})$$
$$= X_n + 0$$
$$= X_n$$

Juga $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$, untuk $m \geq n \geq 0$ dan X_n terukur terhadap $\mathcal{F}_n$. Karena barisan stokastik diatas memenuhi semua sifat dari martingale maka terbukti bahwa $X = (X_n , \mathcal{F}_n)$ adalah suatu martingale.

Definisi 2.2.2

Suatu martingale $M = (M_t , \mathcal{F}_t) , t \in R^+$, dikatakan terintegral kuadrat atau disebut dengan martingale - L^2 , jika :

$$\sup_t E (M_t^2) < \infty \tag{2.2.1}$$

Untuk martingale - martingale yang berada pada interval [0,T] , dengan $T > 0$ maka persamaan (2.2.1) dapat diganti menjadi

$$(M_T^2) < \infty \tag{2.2.1a}$$

Persamaan (2.2.1a) menyatakan secara tidak langsung bahwa :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E (M_t^2) < \infty$$

2.3 LOCAL MARTINGALE

Definisi 2.3.1

(a) Proses bernilai real (M_t) , $t \in R^+$ yang teradaptasi - $\mathcal{F}_t$ adalah local martingale terhadap ($\mathcal{F}_t$) jika ada barisan dari stopping time (τ_n) $n \geq 1$ sedemikian sehingga $\tau_n \uparrow \infty$ (atau kalau dalam interval [0,T] , $\tau_n \uparrow T$) dan untuk setiap n , (M_t^n , $\mathcal{F}_t$) adalah suatu martingale dimana :

$$M_t^n = M_{t \wedge \tau_n}$$

(b) Proses bernilai real (M_t) , $t \in R^+$ disebut local martingale - L^2 jika memenuhi (a) dengan (M_t^n , $\mathcal{F}_t$) adalah suatu martingale - L^2.

Definisi 2.3.2

Random variabel τ disebut stoppimg time untuk ($\mathcal{F}_t$) , $t \in R^+$, jika [ω : $\tau(\omega) \leq t$] $\in \mathcal{F}_t$ untuk setiap $t \in R^+$.

Definisi 2.3.3

Proses variasi kuadrat (proses variasi) dari M dinotasikan dengan $\langle M \rangle$ atau $\langle M,M \rangle$ dan didefinisikan :

$$\langle M\rangle_t = A_t + \langle M\rangle_o \text{ dengan } \langle M_o\rangle = M_o^2$$

Bila M kontinu, maka $\langle M\rangle_t$ juga kontinu.

Secara khusus bila $0 \le s \le t$, maka :

$$E\{(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s\} = E\{(M_t^2 + M_s^2 - 2M_t M_s) | \mathcal{F}_s\}$$
$$= E(M_t^2 | \mathcal{F}_s) + E(M_s^2 | \mathcal{F}_s)$$
$$- E(2M_t M_s | \mathcal{F}_s)$$
$$= E(M_t^2 | \mathcal{F}_s) + E(M_s^2 | \mathcal{F}_s)$$
$$- 2E(M_t M_s | \mathcal{F}_s)$$
$$= E(M_t^2 | \mathcal{F}_s) + E(M_s^2 | \mathcal{F}_s)$$
$$- 2E(M_s^2 | \mathcal{F}_s)$$
$$= E(M_t^2 | \mathcal{F}_s) - E(M_s^2 | \mathcal{F}_s)$$
$$= E(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s)$$
$$= E(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s | \mathcal{F}_s)$$

Jika (M_t) dan (N_t) adalah martingale - L^2 kontinu , maka :

$$\sum_{\pi_n} [(M_{t^n_{j+1}} - M_{t^n_j})(N_{t^n_{j+1}} - N_{t^n_j})] \longrightarrow \langle M,N\rangle_t - M_0 N_0$$

pada L^1 dengan $|\pi_n| \longrightarrow 0$, dimana π_n adalah partisi dari $[0,t]$ dan $M_t N_t - \langle M,N\rangle_t$ adalah martingale kontinu dengan

$$M_t N_t - \langle M,N\rangle_t = \frac{1}{4} [(M+N)_t^2 - \langle M+N\rangle_t] - \frac{1}{4} [(M-N)_t^2 - \langle M-N\rangle_t]$$

Teorema 2.3.1

Andaikan $M = M_t$ dengan $M_o = 0$ adalah local martingale kontinu yang terbatas pada [0 , t] untuk setiap t , maka $M_t = 0$.

Bukti :

Diasumsikan bahwa M adalah martingale - L^2 kontinu.

Kemudian misalkan $\pi_n = \{ t_j^n \}$ adalah partisi dari [0,t] sedemikian sehingga $|\pi_n| \longrightarrow 0$ dengan $n \longrightarrow \infty$ dinyatakan :

$$S_{\pi_n} = \sum_{\pi_n} \left[M_{t^n_{j+1}} - M_{t^n_j} \right]^2$$

Maka terlihat bahwa

$$S_{\pi_n} \leq \max_{\pi_n} | M_{t^n_{j+1}} - M_{t^n_j} | \cdot |M|_t ,$$

dengan $|M|_t$ adalah jumlah variasi dari M_s pada [0,t].

Karena M_t kontinu maka $S_{\pi_n} \longrightarrow 0$ dan $S_{\pi_n} \longrightarrow \langle M \rangle_t$ pada L^1. Karena itu $\langle M \rangle_t = 0$ untuk setiap t . Dari sini $E (M_t - M_o)^2 = 0$ jadi $M_t = 0$.

Sekarang diandaikan M adalah local martingale kontinu. Dari definisi, terdapat barisan naik stopping time σ menuju tak hingga dan $M_t^N = M_{t \wedge \sigma N}$ adalah suatu martingale - L^2.

Untuk Π adalah partisi berhingga dari [0,t] maka untuk semua ω didapatkan :

$$\sum_{\pi} |M^N_{t_{j+1}}(\omega)-M^N_{t_j}(\omega)| \leq |M|_t(\omega)+|M_{\sigma_{N(\omega)}}(\omega)| + \sup_{0\leq s\leq t} |M_s(\omega)|$$

Karena itu untuk setiap N , $M^N_t(\omega)$ adalah terbatas dalam [0,t] .

Sehingga untuk $N \longrightarrow \infty$ didapatkan $M^N_t = M_{t\wedge\sigma N} = M_t = 0$

Jadi teorema terbukti.

Teorema 2.3.2

Untuk setiap local martingale kontinu (M_t) ada suatu proses A_t , yang memiliki sifat-sifat :

1. $A_0 = 0$
2. $A_t \geq A_s$ untuk $t \geq s$
3. $(M^2_t - A_t)$ adalah local martingale.

Bukti :

Diasumsikan $M_0 = 0$, dan σ_n adalah barisan stopping time menuju ∞ atau T. Karena M_t adalah kontinu local martingale, maka :

$$M^2_t = M_{t\wedge\sigma n}$$

sehingga variasi kuadratnya dapat dinyatakan dengan

$$\langle M^n\rangle_t = A^n_t + \langle M^n\rangle_0$$

$$\langle M^n\rangle_t = A^n_t$$

Untuk $t \in R_+$

$$M^{n+1}_{t\wedge\sigma n} = M_{t\wedge\sigma n\wedge\sigma n+1} = M_{t\wedge\sigma n} = M^n_t$$

sehingga : $A^{n+1}_{t\wedge\sigma n} = A^n_t$

Untuk $t \le \sigma n$, didapat $A_t^n = A_{t \wedge \sigma n} = A_t$

Demikian juga untuk $M_t^n = M_{t \wedge \sigma n} = M_t$

Untuk $t = 0$, maka $A_t^n = \langle M^n \rangle_t$

$$A_o^n = \langle M^n \rangle_c = (M_o^n)^2 = M_{o \wedge \sigma n}^2 = M_o^2 = 0$$

$$A_o = 0$$

Untuk $t \ge s$, maka $A_{t \wedge s} \le A_t$

$$A_s \le A_t$$

Karena $M_t^n = M_t$ dan $(M_t^n)^2 = M_t^2$ serta $A_t^n = A_t$ maka

$(M_t^2 - A_t) = \{(M_t^n)^2 - A_t^n\}$ adalah local martingale.

Lemma 2.3.1

Misalkan $(M_t, \mathcal{F}_t)$ adalah local martingale kontinu dengan proses variasi $\langle M \rangle_t$. Jika $E\langle M \rangle_t < \infty$ untuk setiap t dalam $[0,T]$ maka $(M_t, \mathcal{F}_t)$ adalah martingale $-L^2$ untuk $t \in [0,T]$.

Bukti

Dimisalkan $M_t^2 - A_t$ adalah local martingale maka dari definisi, ada suatu barisan stopping time (τ_n) dengan $\tau_n \uparrow T$ sedemikian sehingga untuk $s \le t$,

$E(M_{t \wedge \tau_n}^2 - A_{t \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_s) = M_{s \wedge \tau_n}^2 - A_{s \wedge \tau_n}$.

Bila $s = 0$ didapatkan $E(M_{t \wedge \tau_n}^2 - A_{t \wedge \tau_n}) = E(M_o^2 - A_o)$

Untuk semua n , $E(\langle M \rangle_{t \wedge \tau_n}) \le E(\langle M \rangle_t) < \infty$, sehingga $E(M_{t \wedge \tau_n}^2)$ adalah barisan terbatas dan terintegral seragam dari barisan $\{M_{t \wedge \tau_n}\}$.

Jadi terbukti $(M_t, \mathcal{F}_t)$ adalah martingale $-L^2$ pada $[0,T]$.

Untuk martingale terintegral kuadrat, jika $M = M_t$ dan $N = N_t$ adalah local martingale kontinu, didefinisikan proses $\langle M,N\rangle$ dengan

$$\langle M , N\rangle = \frac{1}{4} \{\langle M + N , M + N\rangle - \langle M - N , M - N\rangle\}$$

Bila τ_n adalah barisan stopping time sedemikian sehingga

$M_t^n = M_{t \wedge \tau n}$ dan $N_t^n = N_{t \wedge \tau n}$ adalah martingale $- L^2$, maka

$\langle M,N\rangle_t (\omega) = \langle M^n, N^n\rangle_t (\omega)$ untuk $t \leq \tau_n$.

Theorema 2.3.3

Misalkan $M = (M_t)$ dan $N = (N_t)$ adalah local martingale terhadap $(\mathcal{F}_t)$ dengan $M_o = N_o = 0$. Andaikan bahwa B_t ($B_o = 0$) adalah kontinu , proses teradaptasi - ($\mathcal{F}_t$) sedemikian sehingga :

(i) untuk hampir semua ω , $B_s (\omega)$ adalah terbatas pada $[0,t]$

(ii) $M_t N_t - B_t$ adalah local martingale untuk setiap t.

Maka :

$$B_t = \langle M , N \rangle_t$$

Bukti :

Dimisalkan $Z_t = M_t N_t - B_t$

Dengan definisi dari $\langle M,N \rangle$ didapatkan :

$$Z_t = \frac{1}{4}\left[(M+N)_t^2 - \langle M+N \rangle_t - \{(M-N)_t^2 - \langle M-N \rangle_t\}\right]$$

$$+ \langle M,N \rangle_t - B_t$$

$$= Y_t + \langle M,N \rangle_t - B_t$$

dimana (Y_t) adalah local martingale kontinu, karena $\left\{ (M+N)_t^2 - \langle M+N \rangle_t \right\}$ dan $\left\{ (M-N)_t^2 - \langle M-N \rangle_t \right\}$ adalah local martingale kontinu. Jadi diperoleh hubungan ini :

$$Z_t - Y_t = \langle M,N \rangle_t - B_t$$

dimana ruas sebelah kiri adalah local martingale kontinu dan ruas sebelah kanan proses kontinu pada setiap interval berhingga. Selain itu , $Z_0 - Y_0 = 0$. Karena itu , dari teorema 2.3.1 terlihat bahwa $Z_t - Y_t = 0$ untuk setiap t, yaitu $\langle M,N \rangle_t - B_t = 0$ untuk setiap t.

Misalkan $M = (M_t)$ adalah kontinu, martingale - L^2 dan σ adalah suatu stopping time . Kita notasikan $M_t^\sigma = M_{t\wedge\sigma}$ dan $M^\sigma = (M_t^\sigma)$. Terlihat bahwa proses $(M_t^\sigma , \mathcal{F}_t)$ adalah kontinu , martingale - L^2.

Lemma 2.3.2

Misalkan M_t dengan $M_o = 0$ dan N_t dengan $N_o = 0$ adalah martingale $- L^2$ kontinu terhadap $\mathcal{F}_t$. Bila τ adalah suatu stopping time, maka

$\langle M^\tau, N^\tau \rangle_t = \langle M, N^\tau \rangle_t = \langle M, N \rangle_{t \wedge \tau}$

Bukti :

Karena (M_t), (N_t), (M_t^τ) dan (N_t^τ) adalah martingale $-L^2$ kontinu, martingale (ξ_t) dan (η_t) yang didefinisikan dengan :

$$\xi_t = M_t N_t^\tau - \langle M, N^\tau \rangle_t$$

dan

$$\eta_t = M_t N_t - \langle M, N \rangle_t$$

adalah terintegral seragam dan λ_t dengan

$\lambda_t = M_t^\tau \; N_t^\tau - \langle M^\tau, N^\tau \rangle_t$

adalah martingale.

$$\begin{aligned} \eta_t^\tau - \lambda_t &= M_t^\tau \; N_t^\tau - \langle M, N \rangle_t^\tau - \{M_t^\tau \; N_t^\tau - \langle M^\tau, N^\tau \rangle_t\} \\ &= M_t^\tau \; N_t^\tau - \langle M, N \rangle_t^\tau - M_t^\tau \; N_t^\tau + \langle M^\tau, N^\tau \rangle_t \\ &= \langle M^\tau, N^\tau \rangle_t - \langle M, N \rangle_t^\tau \end{aligned}$$

dengan theorema 2.3.1 didapat $\eta_t^\tau = 0$ dan $\lambda_t = 0$ sehingga :

$$\langle M^\tau, N^\tau \rangle_t - \langle M, N \rangle_t^\tau = 0$$

$$\langle M^\tau, N^\tau \rangle_t = \langle M, N \rangle_t^\tau$$

sekarang dimisalkan $X_t = M_t \; N_t^\tau - M_t^\tau \; N_t^\tau$ untuk $A \in \mathcal{F}_t$

$$\int_{A\cap(\tau\leq t)} X_t \, dP = \int_{A\cap(\tau\leq t)} E\,(X_t \mid \mathcal{F}_t)\, dP$$

$$= \int_{A\cap(\tau\leq t)} E(\, M_t \; N_t^{\tau} - M_t^{\tau} \; N_t^{\tau} \mid \mathcal{F}_t)\, dP$$

$$= \int_{A\cap(\tau\leq t)} E(\, M_t \; N_{t\wedge\tau} - M_{t\wedge\tau} \; N_{t\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_t)\, dP$$

$$= \int_{A\cap(\tau\leq t)} (M_t \; N_{\tau} - M_{\tau} \; N_{\tau})\, dP$$

karena $\tau \leq$ t maka $\displaystyle\int_{A\cap(\tau > t)} X_t \, dP = 0$

sehingga $\displaystyle\int_A X_t \, dP = \int_A (M_t \; N_{\tau} - M_{\tau} \; N_{\tau})\, dP$ untuk

semua $A \in \mathcal{F}_t$

$$X_t = (M_t \; N_{\tau} - M_{\tau} \; N_{\tau})$$

$$X_t = E\,[\,(M_t - N_{\tau})N_{\tau} \mid \mathcal{F}_t\,]$$

Dari hubungan

$$\xi_t - \eta_t^{\tau} = M_t \; N_t^{\tau} - \langle M, N^{\tau}\rangle_t - \{M_t^{\tau} \; N_t^{\tau} - \langle M, N\rangle_t^{\tau}\}$$

$$= M_t \; N_t^{\tau} - \langle M, N^{\tau}\rangle_t - M_t^{\tau} \; N_t^{\tau} + \langle M, N\rangle_t^{\tau}$$

$$= M_t \; N_t^{\tau} - M_t^{\tau} \; N_t^{\tau} + \langle M, N\rangle_t^{\tau} - \langle M, N^{\tau}\rangle_t$$

$$= X_t + \langle M, N\rangle_t^{\tau} - \langle M, N^{\tau}\rangle_t$$

Menurut theorema 2.3.1 $\langle M, N\rangle_t^{\tau} = \langle M, N^{\tau}\rangle_t$

Jadi terbukti $\langle M^{\tau}, N^{\tau}\rangle = \langle M, N^{\tau}\rangle_t = \langle M, N\rangle_{t\wedge\tau}$

Definisi 2.3.4

Bila $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq o}$ adalah barisan stokastik maka

$$X_n^* = \max_{o\leq j\leq n} |X_j| \text{ dan } || X_n ||_p = (E|X_n|^p)^{1/p}$$

Theorema 2.3.4 (Doob)

Misalkan $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ adalah submartingale yang nonnegatif , maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $n \geq 0$

$$P\left\{ X_n^* \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{(X_n^* \geq \varepsilon)} X_n^* \, dP \leq \frac{E\, X_n}{\varepsilon} \quad \ldots.(1)$$

$$||X_n||_p \leq ||X_n^*||_p \leq \frac{p}{p-1} ||X_n||_p \quad , \; p>1 \ldots(2)$$

Bukti :

Dimisalkan $\tau_n = \min\left\{j \leq n \; ; \; X_j \geq \varepsilon\right\}$ dan $\tau_n = n$ bila $\max_{o\leq j\leq n} X_j < \varepsilon$.

Karena $n \geq \tau_n$ maka

$$EX_n \geq EX_{\tau_n}$$

$$= \int_{X_n^* \geq \varepsilon} X_{\tau_n} dP + \int_{X_n^* < \varepsilon} X_{\tau_n} dP \geq \varepsilon \int_{X_n^* \geq \varepsilon} dP + \int_{X_n^* < \varepsilon} X_n \, dP$$

$$E(X_n) \geq \varepsilon \int_{X_n^* \geq \varepsilon} dP + \int_{X_n^* < \varepsilon} X_n \, dP$$

$$\varepsilon \int_{X_n^* \geq \varepsilon} dP + \int_{X_n^* < \varepsilon} X_n \, dP \leq E(X_n)$$

$$\varepsilon \int_{X_n^* \geq \varepsilon} dP \leq E(X_n) - \int_{X_n^* < \varepsilon} X_n \, dP$$

$$\varepsilon \int_{X_n^* \geq \varepsilon} dP \leq \int_{X_n^* \geq \varepsilon} X_n \, dP \leq E(X_n)$$

$$\varepsilon \, P\left\{X_n^* \geq \varepsilon\right\} \leq \int_{X_n^* \geq \varepsilon} X_n \, dP \leq E(X_n)$$

$$P\left\{X_n^* \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n^* \geq \varepsilon} X_n \, dP \leq \frac{E(X_n)}{\varepsilon}$$

maka (1) terbukti.

Dalam pembuktian ketidaksamaan (2) pertama diandaikan bahwa $||X_n^*||_p < \infty$

dan dengan menggunakan persamaan :

$$E \, \xi^r = r \int_0^\infty t^{r-1} \, P(\xi \geq t) \, dt$$, yang dipenuhi

untuk setiap variabel random nonnegatif ξ dan $r > 0$.

Sehingga :

$$E(X_n^*)^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \, P(X_n^* \geq t) \, dt$$

$$\leq p \int_0^\infty t^{p-1} \int_{X_n^* \geq t} \frac{1}{t} X_n \, dP \, dt$$

$$\leq p \int_0^\infty t^{p-2} \int_{X_n^* \geq t} X_n \, dP \, dt$$

$$\leq p \int_0^\infty t^{p-2} \left[\int_\Omega X_n \, I\{X_n^* \geq t\} \, dP \right] dt$$

$$\leq p \int_\Omega X_n \left[\int_0^{X_n^*} t^{p-2} \, dt \right] dP$$

$$\leq p \int_{\Omega} X_n \left[\frac{1}{p-1} \quad t^{p-1} \right]_0^{X_n^*} dP$$

$$\leq p \int_{\Omega} X_n \frac{1}{p-1} X_n^{*\ p-1} dP$$

$$\leq \frac{p}{p-1} \int_{\Omega} X_n X_n^{*\ p-1} dP$$

$$\leq \frac{p}{p-1} E \left(X_n X_n^{*\ p-1} \right)$$

Dengan ketidaksamaan Holder

$$E(X_n^*)^p \leq \frac{p}{p-1} E \left(X_n X_n^{*\ p-1} \right)$$

$$\leq q \,(E|X_n|^p)^{1/p} \left[E\,(|X_n^*|^{p-1})^q \right]^{1/q}$$

$$\leq q \,||X_n||_p \left(E\,|X_n^*|^p \right)^{1/q}$$

$$\frac{E(X_n^*)^p}{\left(E|X_n^*|^p \right)^{1/q}} \leq q \,||X_n||_p$$

$$\left[E\,(X_n^*)^p \right]^{1-1/q} \leq q \,||X_n||_p$$

$$\left[E\,(X_n^*)^p \right]^{(q-1)/q} \leq q \,||X_n||_p$$

$$\left[E\,(X_n^*)^p \right]^{1/p} \leq q \,||X_n||_p$$

$||X_n^*||_p \leq q \,||X_n||_p$ maka (2) terbukti.

Secara khusus bila M_t adalah martingale kontinu kanan maka didapatkan suatu ketidaksamaan dari Doob yang disebut ketidaksamaan martingale. Bila $E|M_t|^p < \infty$ untuk setiap t, dimana $1 < p < \infty$ dan $I = [a,b]$ serta $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ maka ketidaksamaan martingale disajikan dalam bentuk :

$$E\,(\sup_{t \in I} |M_t|)^p \le q^p \; E\,|M_b|^p$$

Akibat theorema Doobs

Misalnya : $(X_n, \mathcal{F}_n)$ adalah martingale terintegral kuadrat, maka :

$$P\{\max_{j \le n} |X_j| \ge \varepsilon\} \le \frac{E\,X_n^2}{\varepsilon^2}$$

Lemma 2.3.3 (Borel-Cantelli)

Jika $\sum P(A_n) < \infty$, maka P { A_n infinitely often } = 0

Bukti :

$$\{A_n \text{ infinitely often}\} = \limsup An = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$$

Sehingga

$$P\{A_n \text{ infinitely often}\} = P\{\limsup A_n\}$$
$$= P\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\}$$
$$= P\{\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} P\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\}$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} P\{A_n\} = 0$$

Akibat Lemma Borel-Cantelli :

Bila $A_n = \{ | \xi_n - \xi | \geq \varepsilon \}$ dan dengan Lemma Borel-Cantelli didapat $P\{A_n \text{ infinitely often}\} = 0$, maka untuk $\varepsilon_n \downarrow 0$ $\xi_n \longrightarrow \xi$.

2.4 INTEGRAL STOKASTIK TERHADAP MARTINGALE - L^2

Misalkan $M = (M_t)$, $0 \leq t \leq T$ adalah kontinu - kanan, martingale terintegral kuadrat terhadap keluarga kontinu kanan dari σ - field $(\mathcal{F}_t)$. Dengan mengansumsikan bahwa $M_o = 0$, apabila $f = (f_t)$ merupakan fungsi terprediksi sederhana yang dinyatakan dalam bentuk :

$$f_t\ (\omega) = \sum_{j=o}^{n-1} f_j\ (\omega) \quad I_{(t_j, t_{j+1}]}(t)$$

dimana $0 \leq t_o < \ldots < t_n = T$, f_j terukur terhadap

$\mathcal{F}_{t_j}$ dan $E \int f_s^2 \, d\langle M \rangle_s < \infty$, maka integral stokastik dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\int_0^T f_s \, dM_s = \sum_j f_j \left(M_{t_{j+1}} - M_{t_j} \right)$$

karena $f_s \; I_{(0,t]}(s)$ adalah proses terprediksi sederhana maka integral stokastik dapat juga didefinisikan dengan :

$$\int_0^t f_s \, dM_s = \int_0^T f_s \, I_{(0,t]}(s) \, dM_s$$

untuk selanjutnya $\int_0^T$ bisa ditulis dengan $\int$

Dan :

$$E \int f_s \, dM_s = 0 \tag{2.4.1}$$

$$E \left[\int f_s \, dM_s \right]^2 = E \left[\int f_s^2 \, d\langle M \rangle_s \right] \tag{2.4.2}$$

dimana $\langle M \rangle$ adalah proses variasi kuadrat dari M.

2.4.1 SIFAT - SIFAT INTEGRAL STOKASTIK

Selain persamaan (2.4.1) dan (2.4.2) maka integral stokastik $\int f_s \, dM_s$ mempunyai sifat - sifat sebagai berikut :

1. Linearitas

Jika $f, g \in L^2(M)$ dan $\alpha \in R$, maka $f + g \in L^2(M)$, $\alpha_f \in L^2(M)$, dan

$$\text{(a)} \int (f+g)_u \; dM_u = \int f_u \; dM_u + \int g_u \; dM_u$$

$$\text{(b)} \int \alpha f_u \; dM_u = \alpha \int f_u \; dM_u$$

Bukti :

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \int (f+g)_u \; dM_u &= \sum_j (f_j + g_j)(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) \\
&= \sum_j f_j (M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) + \\
&\quad \sum_j g_j (M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) \\
&= \int f_u \; dM_u + \int g_u \; dM_u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \int \alpha f_u \; dM_u &= \sum_j \alpha f_j (M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) \\
&= \alpha \sum_j f_j (M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) \\
&= \alpha \int f_u \; dM_u
\end{aligned}$$

2. Untuk setiap $t \geq 0$ $(0 \leq t \leq T)$ dan $f \in L^2 M$, didapat $f I_{[0,t]} \in L^2 M$ dan didefinisikan

$$\int_0^t f_s dM_s = \int f_s \ I_{[0,t]} \ (s) \ dM_s$$

Untuk $0 \le s < t$, didapatkan

$$\int_s^t f_u \ dM_u = \int f_u \ I_{[s,t]} \ (u) \ dM_u$$

Bila τ adalah stopping time maka $\int_0^t f_s \ I_{[0,\tau]} \ (s) \ dM_s$

dapat juga ditulis $\int_0^{t \wedge \tau} f_s \ (s) \ dM_s$

3. Misal $Y_t = \int_0^t f_u \ dM_u$, $f \in L^2(M)$ maka Y_t terukur terhadap $\mathcal{F}_t$ maka :

(a) $(Y_t, \mathcal{F}_t)$ adalah suatu martingale - L^2

(b) Y_t kontinu kanan

Bukti :

(a). Jika f terprediksi , fungsi sederhana pada $L^2(M)$, maka (a) langsung terbukti.

Untuk $f \in L^2(M)$, misalkan (f^n) adalah barisan terprediksi, fungsi sederhana dalam $L^2(M)$ sedemikian sehingga ,

$$E \int [\ f_u - f_u^n \ ]^2 \ d\langle M \rangle_u \longrightarrow 0$$

maka untuk s dan t tertentu ($s \le t$), didapatkan :

$$E \left| E\left(\int_s^t f_u \ dM_u \mid \mathscr{F}_s \right) - E\left(\int_s^t f_u^n \ dM_u \mid \mathscr{F}_s \right) \right|$$

$$\leq \left\{ E\left[\int_s^t (f_u - f_u^n) \ dM_u \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left\{ E\left[\int_0^T (f_u - f_u^n)^2 \ d\langle M \rangle_u \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$$

Karena $E\left[\int_s^t (f_u \ dM_u) \mid \mathscr{F}_s \right] = 0$ maka

$$E\left[\int_s^t (f_u^n \ dM_u) \mid \mathscr{F}_s \right] = 0$$

dan (a) terbukti.

(b). Asumsikan keluarga $\mathscr{F}_t$ adalah kontinu kanan. Maka supermartingale X_t kontinu kanan jika dan hanya jika $E(X_t)$ kontinu kanan. Secara khusus suatu martingale X_t selalu kontinu kanan.

4. Andaikan $M = (M_t)$ adalah kontinu dan martingale $- L^2$, $f \in L^2(M)$ maka integral stokastik $\int_0^t f_s \ dM_s$ $(0 \leq t \leq T)$ adalah kontinu .

Bukti :

Misalkan (f^n) adalah barisan fungsi sederhana sedemikian sehingga untuk setiap n berlaku :

$$E \int_0^T (f_s - f_s^n)^2 \quad d\langle M\rangle_s < 2^{-n}$$

Dari ketidaksamaan martingale yang didapatkan dari teorema Doob diperoleh :

$$E \left[\sup_{0 \le t \le T} \left| \int_0^t f_s \ dM_s - \int_0^t f_s^n \ dM_s \right|^2 \right]$$

$$\le 4 \ E \int_0^T (f_s - f_s^n)^2 \ d\langle M\rangle_s$$

Dari Lemma Borel-Cantelli,

$$P \left[\sup_{0 \le t \le T} \left| \int_0^t f_s \ dM_s - \int_0^t f_s^n \ dM_s \right| > \frac{1}{n}, \right.$$

$$\left. \text{infinitely often} \right] = 0$$

Hal ini berakibat

$$\sup_{0 \le t \le T} \left| \int_0^t f_s \ dM_s \longrightarrow \int_0^t f_s^n \ dM_s \right| \longrightarrow 0 \text{ untuk } n \longrightarrow \infty$$

5. Misalkan M adalah martingale - L^2 kontinu, $f \in L^2(M)$ dan $Y_t = \int_0^t f_s \, dM_s$. Jika N adalah beberapa martingale -L^2 kontinu, maka :

$$\langle Y,N \rangle_t = \int_0^t f_s \, d\langle M,N \rangle_s$$

Bukti :

Karena $Y_t = \int_0^t f_s \, dM_s$

maka mudah untuk dipahami , bahwa variasi kuadrat dari Y dan N akan menghasilkan persamaan :

$$\langle Y,N \rangle_t = \int_0^t f_s \, d\langle M,N \rangle_s$$

6. Andaikan M adalah kontinu, martingale -L^2 $(M_0 = 0)$ dan $f \in L^2(M)$. Maka martingale - L^2 kontinu ,

$Y_t = \int_0^t f_s \, dM_s$ mempunyai variasi kuadrat,

$$\langle Y \rangle_t = \int_0^t f_s^2 \, d\langle M \rangle_s$$

Bukti :

Ambil N = Y pada sifat 5, maka didapatkan

$$\langle Y,N \rangle_t = \int_0^t f_s \, d\langle M,N \rangle_s$$

$$\langle Y,Y \rangle_t = \int_0^t f_s \, d\langle M,Y \rangle_s$$

$$\langle Y \rangle_t = \int_0^t f_s \, d\langle M,Y \rangle_s$$

Kembali menggunakan sifat 5, maka untuk

M = N , didapatkan :

$$\langle M,Y \rangle_s = \int_0^s f_u \, d\langle M \rangle_u$$

Sehingga dengan substitusi didapatkan bentuk

$$\langle Y \rangle_t = \int_0^t f_s^2 \, d\langle M \rangle_s$$

7. Misalkan $f \in L^2(M)$ dan andaikan bahwa τ adalah suatu stopping time untuk martingale $-L^2$ kontinu M . Maka martingale Y^τ dapat dinyatakan dengan

$$Y_t^{\tau} = \int_0^t f_s \, I_{[0,\tau]}(s) \, dM_s$$

Bukti :

Jelas bahwa $f \, I_{[0,\tau]} \in L^2(M)$, sehingga integral stokastik sebelah kanan ada.

Dengan memisalkan $\xi_t = \int_0^t f_s \, I_{[0,\tau]}(s) \, dM_s$

didapatkan :

$$\begin{aligned} E[\, Y_t^{\tau} - \xi_t \,]^2 &= E \langle Y^{\tau} - \xi \rangle_t \\ &= E \langle Y^{\tau} \rangle_t + E \langle \xi \rangle_t \\ &\quad - 2E \langle Y^{\tau}, \xi \rangle_t \end{aligned}$$

Dari ruas kanan persamaan diatas didapatkan :

$$E \langle Y^{\tau} \rangle_t = E \langle Y \rangle_{t \wedge \tau} = E \int_0^{t \wedge \tau} f_s^2 \, d\langle M \rangle_s \, ,$$

$$E \langle \xi \rangle_t = E \int_0^t f_s^2 \, I_{[0,\tau]}(s) \, d\langle M \rangle_s \, ,$$

dan

$$E \langle Y^{\tau}, \xi \rangle_t = E \int_0^t f_s \, I_{[0,\tau]}(s) \, d\langle Y^{\tau}, M \rangle_s$$

$$= E \int_0^t f_s \, I_{[0,\tau]}(s) \, d\langle Y, M \rangle_{s \wedge \tau}$$

$$= E \int_0^{t \wedge \tau} f_s^2 \, I_{[0,\tau]}(s) \, d\langle M \rangle_s$$

$$= E \int_0^t f_s^2 \, I_{[0,\tau]}(s) \, d\langle M \rangle_s$$

Pada akhirnya didapatkan :

$$E[\, Y_t^{\tau} - \xi_t \,]^2 = E \langle Y^{\tau} - \xi \rangle_t$$

$$= E \langle Y^{\tau} \rangle_t + E \langle \xi \rangle_t - 2E \langle Y^{\tau}, \xi \rangle_t$$

$$= E \int_0^{t \wedge \tau} f_s^2 \, d\langle M \rangle_s + E \int_0^t f_s^2 \, I_{[0,\tau]}(s) \, d\langle M \rangle_s$$

$$- 2E \int_0^t f_s^2 \, I_{[0,\tau]}(s) \, d\langle M \rangle_s$$

$$= E \int_0^{t \wedge \tau} f_s^2 \, d\langle M \rangle_s - E \int_0^t f_s^2 \, I_{[0,\tau]}(s) \, d\langle M \rangle_s$$

$$= E \int_0^t f_s^2 \, I_{[0,\tau]}(s) \, d\langle M \rangle_s$$

$$- E \int_0^t f_s^2 \; I_{[0,\tau]}(s) \; d\langle M\rangle_s$$

$$= 0$$

Sehingga didapatkan

$$E \left[Y_t^\tau - \xi_t \right]^2 = 0$$

$$\left[Y_t^\tau - \xi_t \right] = 0$$

$$Y_t^\tau = \xi_t$$

$$Y_t^\tau = \int_0^t f_s \; I_{[0,\tau]}(s) \; d\langle M\rangle_s$$

Sehingga sifat 7 terbukti.

8.(a) Misalkan f terprediksi dan terbatas, dan misalkan σ dan τ adalah stopping time sedemikian sehingga $\sigma \leq \tau$, maka $f_\sigma \; I_{(\sigma,\tau]} \in L^2(M)$ dan

$$\int_0^\tau f_\sigma \; I_{(\sigma,\tau]}(t) \; d\,M_t = f_\sigma \left[M_\tau - M_\sigma \right],$$ dengan

M kontinu.

Bukti :

Dari sifat naik ($\mathcal{F}_t$) diperoleh :

$$\left[\omega : I_{(\sigma(\omega),\tau(\omega)]}(t) = 1\right] = \left[\omega : \sigma(\omega) < t\right]$$

$$\cap \left[\omega : \tau(\omega) < t\right]^c \in \mathcal{F}_t$$

Karena itu $f_\sigma \, I_{[\sigma,\tau]}(t)$ terukur terhadap $\mathcal{F}_t$.
Keterbatasan dari f menunjukkan bahwa $f_\sigma I_{(\sigma,\tau)} \in L^2(M)$
Ditulis

$$Z_T = \int_0^T f_\sigma \, I_{(\sigma,\tau]}(s) \, d\,M_s$$

dan

$$N = f_\sigma \left[M_\tau - M_\sigma \right]$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} E(Z_T - N)^2 &= E(Z_T^2 - 2Z_T N + N^2) \\ &= E(Z_T^2) - 2E(Z_T N) + E(N^2) \\ &= E\int_0^T f_\sigma^2 \, I_{(\sigma,\tau]}(s) \, d\langle M\rangle_s \\ &\quad - 2E(Z_T N) + E f_\sigma^2 (M_\tau - M_\sigma)^2 \end{aligned}$$

Bagian awal pada ruas sebelah kanan sama dengan

$$E\left\{f_\sigma^2 \left[\langle M\rangle_\tau - \langle M\rangle_\sigma\right]\right\}$$

Selanjutnya ,

$$E\left[Z_T\, N \mid \mathcal{F}_\sigma \right] = f_\sigma\, E\left[\int_0^T f_\sigma\, I_{(\sigma,\tau]}(s)\, dM_s \,.\right.$$

$$\left. \int_0^T I_{(\sigma,\tau]}(s)\, d\, M_s \mid \mathcal{F}_\sigma \right]$$

$$= f_\sigma\, E\left[< \int_0^T f_\sigma\, I_{(\sigma,\tau]}(s)\, dM_s , \right.$$

$$\left. \int_0^T I_{(\sigma,\tau]}(s)\, dM_s > \mid \mathcal{F}_\sigma \right]$$

$$= f_\sigma\, E\left[\int_0^T f_\sigma\, I_{(\sigma,\tau]}(s)\, d\langle M\rangle_s \mid \mathcal{F}_\sigma \right]$$

Sehingga

$$E\left[Z_T\, N \right] = E\left[\int_0^T f_\sigma^2\, I_{(\sigma,\tau]}(s)\, d\langle M\rangle_s \right]$$

$$= E\left\{ f_\sigma^2 \left[\langle M\rangle_\tau - \langle M\rangle_\sigma \right] \right\}$$

Bagian akhir dari ruas kanan sama dengan

$$E\, f_\sigma^2 \quad (M)_\tau - (M)_\sigma = E\left\{ f_\sigma^2 \left[\langle M\rangle_\tau - \langle M\rangle_\sigma \right] \right\}$$

Akhirnya didapatkan ,

$$E\left(Z_T - N \right)^2 = E\left[\int_0^T f_\sigma^2\, I_{(\sigma,\tau]}(s)\, d\langle M\rangle_s \right]$$

$$- 2E\left(Z_T\, N\right) + E\, f_\sigma^2 \left(M_\tau - M_\sigma\right)^2$$

$$= E\, f_\sigma^2 \left[\langle M \rangle_\tau - \langle M \rangle_\sigma \right]$$

$$- 2E\, f_\sigma^2 \left[\langle M \rangle_\tau - \langle M \rangle_\sigma \right]$$

$$+ E\, f_\sigma^2 \left[\langle M \rangle_\tau - \langle M \rangle_\sigma \right]$$

Sehingga $E(Z_T - N)^2 = 0$

$$(Z_T - N) = 0$$

$$Z_T = N$$

$$\int_0^T f_\sigma\, I_{(\sigma,\tau]}(s)\, dM_s = f_\sigma\, [\, M_\tau - M_\sigma \,]$$

(b) Andaikan bahwa (X_t) adalah kontinu, proses teradaptasi $\mathcal{F}_t$ dan misalkan g terbatas, fungsi kontinu dari variabel real. Misalkan (τ_i) adalah barisan stopping time berhingga dengan $\tau_i \le \tau_{i+1}$ untuk setiap i ,

maka :

$$f = \sum_i g(X_{\tau_i})\, I_{(\tau_i, \tau_{i+1}]} \in L^2(M)$$

dan

$$\int_0^T f_t\, d M_t = \sum_i g(X_{\tau_i})\, [\, M_{\tau_{i+1}} - M_{\tau_i} \,]$$

Bukti :

Karena (X_t) adalah kontinu dan teradaptasi $\mathcal{F}_t$, X_{τ_i} terukur terhadap $\mathcal{F}_{\tau_i}$ dan karena itu $g\ (X_{\tau_i})$ terukur terhadap $\mathcal{F}_{\tau_i}$.

Dari sifat 8(a) , untuk setiap i, $g(X_{\tau_i})$ $I_{(\tau_i,\tau_{i+1}]}$ adalah terprediksi dan terbatas dan

$$f = \sum_i g(X_{\tau_i})\ I_{(\tau_i,\tau_{i+1}]} \in L^2(M)$$

Dengan menggunakan sifat 8(a) dan linearitas dari integral stokastik , maka didapatkan :

$$\int_0^T f_t\ dM_t = \sum_i \int_0^T g(X_{\tau_i})\ I_{(\tau_i,\tau_{i+1}]}(t)\ dM_t$$

$$= \sum_i g(X_{\tau_i})\ [\ M_{\tau_{i+1}} - M_{\tau_i}\ ]$$

9. Misalkan M adalah martingale -L^2 kontinu dan f, g $\in$ L^2M. Jika $A = \{\ \omega : f_t(\omega) = g_t(\omega),\ 0 \le t \le T\ \}$, maka $\int_0^T f_t\ dM_t = \int_0^T g_t\ dM_t$.

Bukti :

$$\tau = \begin{cases} \inf(\ t : f_t \neq g_t\ ,\ 0 \le t \le T\ ) \\ T \text{ jika himpunan ini kosong.} \end{cases}$$

dengan τ adalah stopping time untuk $\mathcal{F}_t$ pada [0,T].

Bila Y_t adalah kontinu dari martingale

$\int_0^t (f_s - g_s)\ dM_s$, $0 \le t \le T$ maka dengan sifat (7) diperoleh

$$Y_\tau = \int_0^T (f_s - g_s)\ I_{[0,\tau)}\ (s)\ dM_s .$$

untuk setiap ω,

$$[\ f_s(\omega) - g_s(\omega)]^2\ I_{[0,\tau(\omega))}\ (s) =$$

$$I_{[\tau(\omega))}\ [\ f_{\tau(\omega)}(\omega) - g_{\tau(\omega)}(\omega)]^2$$

Karena f dan $g \in L^2M$ maka

$$E\left\{ \int_0^T (\ f_t - g_t)^2\ I_{[0,\tau)}\ (t)\ d\langle M\rangle_t \right\} = 0$$

$$E(\ Y_\tau)^2 = 0$$

$$Y_\tau = 0$$

untuk $\omega \in A$, $\tau(\omega) = T$ sehingga $Y_\tau = Y_T$ pada A.

Dari $Y_T = \int_0^T (\ f_t - g_t)\ dM_s$ dan $Y_T = Y_\tau = 0$ maka

$$\int_0^T f_t\ dM_s = \int_0^T g_t\ dM_s$$