BAB I

P E N D A H U L U A N

Integral stokastik merupakan integral dari suatu proses, dimana proses tersebut merupakan proses - proses stokastik. Sedangkan proses stokastik sendiri merupakan kumpulan dari variabel random - variabel random X_t , dengan $t \in T$ dimana T adalah himpunan parameter waktu. Jadi secara sederhana dapat dikatakan bahwa integral stokastik merupakan integral dari proses - proses stokastik. Berikut ini diberikan dua contoh proses stokastik.

Jika M_t merupakan proses stokastik yang variabel randomnya mempunyai sifat sebagai berikut :

(i) untuk setiap t, M_t terintegral dan terukur terhadap $\mathcal{F}_t$.

(ii) untuk $t > s$, $E(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$,

maka M_t disebut martingale.

Sedangkan proses Wiener (W_t) adalah proses stokastik yang memenuhi sifat - sifat sebagai berikut :

(i) $W(0) = 0$

(ii) $W(t)$ berdistribusi Gaussian dengan mean 0 dan varian σ^2

(iii) $W(t_2) - W(t_1)$, $W(t_3) - W(t_2)$, ..., $W(t_n) - W(t_{n-1})$ saling independen untuk $t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_n$

Proses - proses tersebut didefinisikan dalam ruang probabilitas (Ω , $\mathscr{A}$, P) , dengan Ω menunjukkan event - event , $\mathscr{A}$ menunjukkan sebuah σ - field yang didefinisikan dalam Ω , dan P menunjukkan probabilitas yang didefinisikan dalam $\mathscr{A}$ dan Ω.

Untuk proses martingale , integral stokastik didefinisikan sebagai berikut.

Apabila $f = (f_t)$ adalah fungsi terprediksi sederhana yang dinyatakan dalam bentuk :

$$f_t(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j(\omega) \; I_{(t_j , t_{j+1}]}(t) ,$$

dimana $0 \le t_0 < \ldots < t_n = T$, f_j terukur terhadap $\mathscr{F}_{t_j}$

dan $E \int f_s^2 \; d\langle M \rangle_s < \infty$, maka integral stokastik dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\int_0^T f_s \; dM_s = \sum_j f_j \left(M_{t_{j+1}} - M_{t_j} \right),$$

Selanjutnya , untuk proses Wiener (W_t) integral stokastik didefinisikan sebagai berikut :

$$\int f_t \; dW_t = \sum f_{t_j} \left[W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \right]$$

dengan $f_t(\omega) = f_{t_j}(\omega)$ jika $t_j \le t < t_{j+1}$,

$j = 0, 1, \ldots, n-1$ dimana $0 = t_o < \ldots < t_n < \infty$ adalah partisi dari $[\ 0,\infty\ )$ dan f_{t_j} terukur terhadap $\mathscr{F}_{t_j}$.

Pada pembahasan skripsi ini , kita akan membatasi permasalahan hanya pada integral stokastik terhadap martingale - L^2 dan proses Wiener martingale yang didefinisikan oleh Ito.

Adapun sistematika penulisan skripsi ini dapat dijelaskan sebagai berikut :

Bab I memuat pendahuluan yang berisi latar belakang, identifikasi, pembatasan masalah serta sistematika penulisan. Bab II memuat tentang pengertian proses-proses terprediksi , martingale terintegral kuadrat , local martingale serta pengertian integral stokastik terhadap martingale terintegral kuadrat beserta sifat - sifatnya. Bab III memuat tentang proses Wiener dan integral stokastik terhadap proses Wiener martingale yang didefinisikan oleh Ito. Bab IV memuat penutup yang berisi kesimpulan.