BAB III

PERMODELAN PERSAMAAN KESETIMBANGAN DAN ANALISIS FREKUENSI GETARAN ALAMI

3.1 KESETIMBANGAN LANGSUNG DENGAN PRINSIP D'ALEMBERT

Hukum Newton kedua tentang gerak yang menyatakan bahwa laju perubahan momentum dari suatu benda bermassa m sama dengan gaya yang bekerja kepadanya dapat dinyatakan secara matematis sebagai berikut :

$$\Sigma F = \frac{d}{dt}\left[m \frac{du}{dt} \right] \qquad (3.1)$$

dengan

ΣF = Resultan gaya gaya yang bekerja pada benda

u = perpindahan

Untuk sebagaian besar masalah dinamika struktur massa tidak bergantung (berubah) menurut waktu, sehingga persamaan 3.1 dapat ditulis menjadi

$$\Sigma F = m \frac{d^2u}{dt^2} = m\,\ddot{u}(t) \qquad (3.2)$$

Persamaan ini memperlihatkan bahwa gaya sama dengan perkalian antara massa dan percepatan. Persamaan diatas dapat ditulis sebagai

$$\Sigma F - m\,\ddot{u}(t) = 0 \qquad (3.3)$$

Menurut d'Alembert massa akan menghasilkan gaya inersia yang sebanding dengan percepatan dan yang melawannya. Suatu keadaan setimbang akan diperoleh bila persamaan 3.3 dipenuhi.

3.2 KOMPONEN - KOMPONEN UTAMA SISTEM DINAMIK

Komponen - komponen utama sistem dinamik adalah unsur - unsur yang menyusun permodelan dari suatu struktur yang elastik yang dikenakan beban dinamik, meliputi :

- Massa
- Elastisitas (kekakuan)
- Redaman
- Sumber gaya dari luar (pembebanan)

3.2.1 MASSA

Massa dari struktur menurut d'Alembert akan menghasilkan gaya inersia yang sebanding dengan dengan gaya - gaya yang melawannya

$$F_I = m\ddot{u}$$

3.2.2 ELASTISITAS (KEKAKUAN)

Jika pada suatu struktur yang elastis diberikan gaya maka struktur tersebut kemungkinan akan melendut(membelok) sehingga ada titik - titik pada struktur yang mengalami perpindahan.Akan tetapi karena keelastisitasannya maka struktur akan bereaksi untuk tetap kembali ke bentuk semula. Reaksi ini akan berbanding lurus dengan jarak perpindahan titik struktur dan disebut dengan gaya elastisitas,di tulis

$$F_S = k\ u$$

dengan k adalah suatu tetapan (konstanta) dan disebut sebagai modulus kekakuan.

3.2.3 REDAMAN

Pada struktur yang bergerak akan selalu terdapat gaya - gaya yang menahan kecepatan gerak struktur. Gaya ini disebut dengan gaya redaman. Gaya ini dapat terjadi dengan bermacam - macam cara misalnya karena redaman udara, air, magnet, atau karena gesekan dengan benda yang lainnya bisa juga karena gaya redaman yang dimiliki oleh struktur itu sendiri. Gaya redaman berbanding lurus dengan kecepatan geraknya dan mempunyai arah yang berlawanan dengan arah gerak struktur.Ditulis

$$F_D = c\ \dot{u}$$

dengan c suatu tetapan disebut sebagai koefeisien redaman sedangkan $\dot{u} = \dfrac{du}{dt}$ adalah kecepatan gerak struktur. Apabila gaya redaman terlalu kecil atau kurang berpengaruh terhadaap sistem gerak tersebut maka gaya redaman sering dianggap bernilai nol(tidak ada)

3.2.4 GAYA LUAR (PEMBEBANAN)

Perbedaan utama antara dinamika dengan statika adalah pada pembebanan yang dikenakan untuk struktur. Pada dinamik struktur dikenakan pembebanan yang bergantung kepada waktu (fungsi dari waktu t), sedangkan pada statika pembebanan tidak bergantung kepada waktu. Dalam prakteknya beban dinamik dapat ditimbulkan oleh gempa, angin yang tidak tetap, ledakan, mesin torak atau kejut (impact) akibat beban bergerak. Gaya luar (pembebanan) akan mengakibatkan suatu struktur atau bagian dari struktur bergerak arah gaya ini adalah searah dengan gerak yang dihasilkan. Pembebanan dinamis dituliskan sebagai

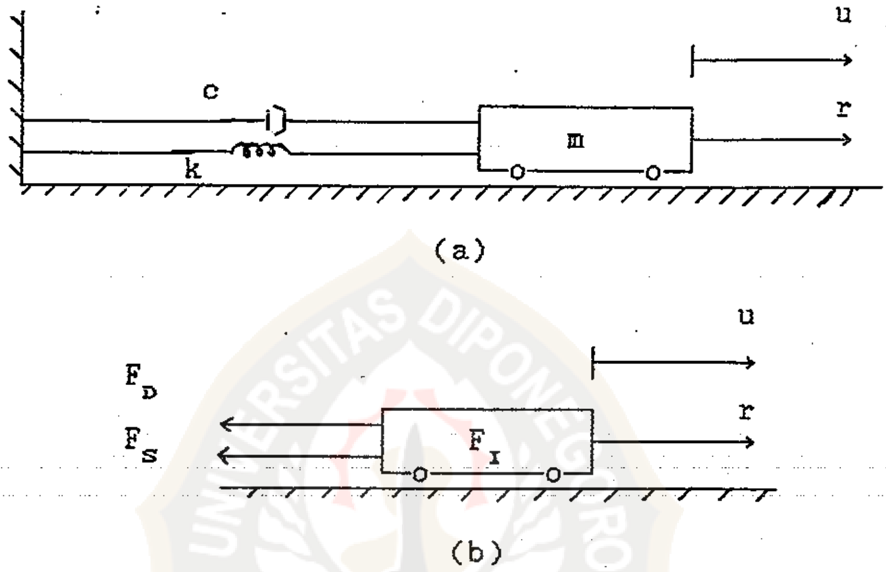
$$r = f(t)$$

3.3 DERAJAD KEBEBASAN SISTEM

Derajad kebebasan sistem didefinisikan sebagai jumlah komponen perpindahan yang harus dipertimbangkan agar mewakili pengaruh semua gaya inersia yang penting dari suatu struktur.

3.3.1 SISTEM DENGAN DERAJAD KEBEBASAN TUNGGAL

Apabila suatu perpindahan struktur dapat digambarkan dengan perpindahan koordinat tunggal untuk seluruh bagian struktur maka sistem ini di sebut dengan derajad kebebasan tunggal atau Single Degree Of Freedom (SDOF). Pandang gambar berikut



Gb. 3.1

Sistem berderajad kebebasan tunggal yang diidealisasi

(a) *komponen - konponen utama*

(b) *gaya gaya dalam kesetimbangan*

Perumusan persamaan gerak untuk sistem dalam gambar (3.1) adalah

$$\Sigma F = F_I$$

$$= - F_S - F_D + r$$

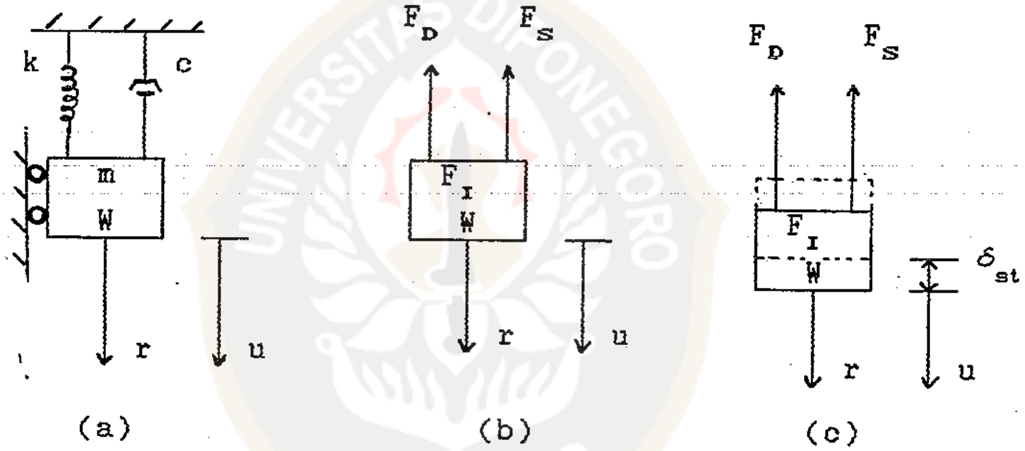
$$F_I + F_S + F_D + r$$

dapat ditulis

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k\,u = r \qquad (3.4)$$

3.3.2 PENGARUH GAYA GRAFITASI

Pandang gambar berikut (Gb.3.2) gaya - gaya yang dipengaruhi oleh gaya grafitasi yang mengakibatkan benda bergerak ke bawah struktur bergerak kearah vertikal, oleh karena itu gaya grafitasi bekerja dalam arah perpindahan. Misalkan gaya yang diakibatkan oleh grafitasi di sebut dengan W = m g, dengan m massa struktur (benda) dan g



Gb. 3.2

Pengaruh gaya grafitasi

konstanta grafitasi bumi. Maka persamaan kesetimbangan dapat dituliskan dengan

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k u = r + W$$

Meskipun demikian jika perpindahan total u dinyatakan sebagai jumlah perpindahan tetap δ_{st} yang disebabkan oleh gaya W ditambah dengan perpindahan dinamik tambahan $\bar{u}$, seperti gambar (3.2.c)

$$u = \delta_{st} + \bar{u}$$

maka gaya elstistisitas

$$fs = k\,u = k\,\delta_{st} + k\,\bar{u}$$

Sehingga persamaan kesetimbangannya menjadi

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k\,\delta_{st} + k\,\bar{u} = r + W$$

Kesetimbangan awal akan tercapai (pada saat t = 0) dengan $\ddot{u} = 0$ dan $\dot{u} = 0$ serta belum diberi beban dinamis, sehingga didapatkan

$$k\,\delta_{st} = W$$

oleh karena itu persamaan kesetimbangan dapat dituliskan sebagai

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k\,\bar{u} = r$$

dengan mengingat δ_{st} tidak berubah menurut waktu (t) dan $u = \delta_{st} + \bar{u}$ maka akan diperoleh

$$\dot{u} = \dot{\bar{u}} \text{ dan } \ddot{u} = \ddot{\bar{u}}$$

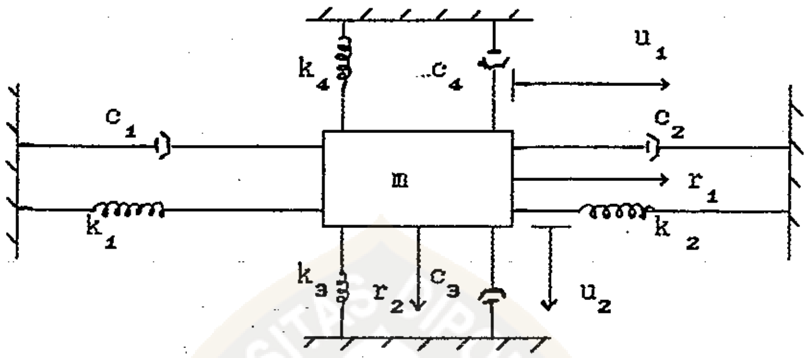
Jadi persamaan kesetimabangannya adalah

$$m\ddot{\bar{u}} + c\dot{\bar{u}} + k\,\bar{u} = r$$

persamaan ini analog dengan persamaan (3.4)

3.3.3 SISTEM DENGAN BANYAK DERAJAD KEBEBASAN

Perpindahan struktur yang meliputi lebih dari satu arah perpindahan dari keseluruhan struktur disebut dengan



Gb.3.3

sistem struktur dengan dua koordinat perpindahan

sistem dengan banyak derajad kebebasan atau Multi Degree Of Freedom (MDOF).

Pandang gambar 3.3, mempunyai dua arah perpindahan. Perumusan persamaan geraknya adalah

$\Sigma F = m\ a$, a adalah percepatan

$$m\ \ddot{u}_1 = -\ (c_1 + c_2)\dot{u}_1 - (k_1 + k_2)u_1 + r_1$$

$$m\ \ddot{u}_2 = -\ (c_3 + c_4)\dot{u}_2 - (k_3 + k_4)u_2 + r_2$$

persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

Bentuk diatas dapat ditulis menjadi

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R \tag{3.5}$$

dengan

M = matriks massa

C = matriks redaman

K = matriks kekakuan

R = matriks gaya gaya luar.

$\ddot{U}$, $\dot{U}$ dan U masing - masing adalah percepatan, kecepatan dan perpindahan

Perhatikan bahwa elemen elemen matriks tersebut adalah simetris yakni

$m_{ij} = m_{ji}$, $c_{ij} = c_{ji}$ dan $k_{ij} = k_{ji}$

dengan

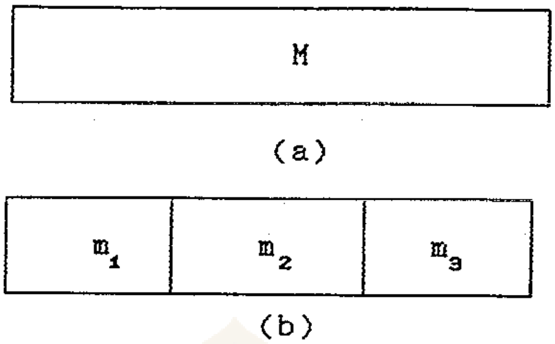
m_{ij} = elemen matriks massa

c_{ij} = elemen matriks redaman

k_{ij} = elemen matriks kekakuan

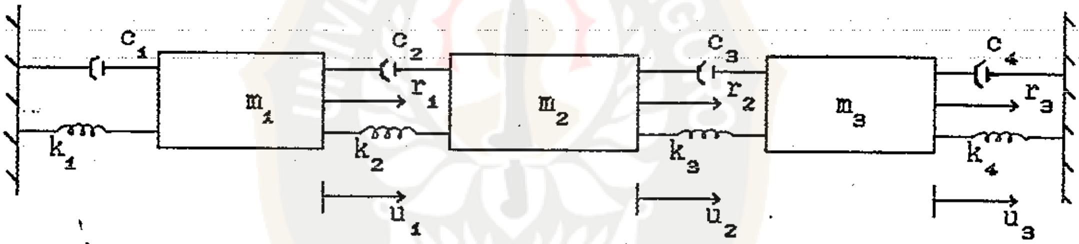
$i = 1,2,$ dan $j = 1,2$

Suatu struktur dapat terbagi bagi menjadi beberapa bagian, pembagian ini diistilahkan sebagai *diskretisasi struktur*. Pandang suatu benda M yang kemudian didiskretisasi menjadi tiga bagian



Gb.3.4

Deskretisasi suatu balok secara umum



Gb.3.5

elemen - elemen batang yang mengalami pembebanan luar

Apabila elemen - elemen batang ini mengalami pembebanan luar secara dinamis dan mengalami perpindahan dalam arah yang sama (Gb.3.5) maka perumusan persamaan gerak untuk sistem ini adalah

$$\Sigma F = m\ a$$

$$m\ \ddot{u}_1 = -\ c_1\dot{u}_1 -\ c_2(\dot{u}_1 -\ \dot{u}_2) -\ k_1 u_1 -\ k_2(u_1 -\ u_2) +\ r_1$$

$$m\ \ddot{u}_2 = -\ c_2(\dot{u}_2 -\ \dot{u}_1) -\ c_3(\dot{u}_2 -\ \dot{u}_3) -\ k_2(u_2 -\ u_1) -\ k_3(u_2 -\ u_3) +\ r_2$$

$$m\ddot{u}_3 = -c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) - c_4\dot{u}_3 - k_3(u_3 - u_2) - k_4u_3 + r_3$$

persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

sehingga dapat ditulis

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R \qquad (3.6)$$

Perhatikan bahwa :

$m_{ij} = m_{ji}$, $c_{ij} = c_{ji}$ dan $k_{ij} = k_{ji}$, $i = 1,2,3$ dan $j = 1,2,3$. Oleh karena itu matriks massa, matriks redaman dan matriks kekakuan adalah simetri. Apabila elemen - elemen batang tadi juga bergerak kearah vertikal maka setiap titik massa akan mempunyai dua koordinat perpindahan sehingga untuk keseluruhan struktur akan mempunyai enam derajad kebebasan.

Diskretisasi struktur seperti yang digambarkan di atas sering digunakan dalam analisis struktur dinamis. Matriks massa yang dihasilkan oleh diskretisasi struktur seperti diatas disebut dengan matriks massa tergumpal dan mempunyai ciri khusus sebagai matriks diagonal. Secara phisik diasumsikan bahawa seluruh massa pada tiap potongan adalah terpusat pada titik dimana perpindahan ditetapkan.

3.4 ANALISIS FREKUENSI GETARAN ALAMI (BEBAS)

Persamaaan gerak untuk suatu sistem yang bergetar bebas dapat diperoleh dengan memandang persamaan geraktanpa diikutsertakannya matriks redaman dan juga vektor beban (gaya - gaya luar),yakni

$$M \ddot{U} + K U = 0 \qquad (3.7)$$

di mana 0 adalah vektor nol. Masalah analisis getaran adalah penentuan suatau kondisi agar dari persamaan (3.7) dimungkinkan terjadinya gerak.

Untuk mencari solusi dari persamaan (3.7) akan dipandang suatu sistem dengan derajat kebebasan tunggal, misalkan disajikan dengan persamaan

$$m \ddot{u} + k u = 0 \qquad (3.8)$$

dengan

$$\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2} \quad , \text{ u fungsi dari t}$$

Penyelesaian persamaan diferensial ini akan berbentuk

$$u(t) = G\, e^{\lambda t}, \text{ G konstanta sembarang}$$

substitusikan penyelesaian ini ke persamaan (3.8)

$$\left[m \lambda^2 + k\right] G\, e^{\lambda t} = 0 \qquad (3.9)$$

bagi persamaan 3.9 denga $G\ e^{\lambda t}$ kemudian masukan notasi $\omega^2 = \frac{k}{m}$ sehingga diperoleh

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \text{atau} \quad \lambda = \pm i\omega$$

sehingga solusi persamaan (3.7) menjadi

$$u(t) = G_1 e^{-i\omega} + G_2 e^{+i\omega} \qquad (3.10)$$

dimana kedua suku yang diakibatkan oleh nilai - nilai λ dan konstanta G_1 dan G_2 menyatakan amplitudo gerak yang sembarang. Karena

$$e^{\pm i\omega} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$$

maka persamaan 3.10 dapat ditulis menjadi

$$u(t) = G_1(\cos \omega t - i \sin \omega t) + G_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t$$

$$= (G_1 - G_2)\cos \omega t + (iG_1 - iG_2)\sin \omega t$$

$$= A \cos \omega t + B \sin \omega t \qquad (3.11)$$

dengan A dan B konstanta sembarang, karena

$$\sin (\omega t + \theta) = \sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta$$

maka persamaan 3.11 dapat ditulis

$$u(t) = z \sin (\omega t + \theta) \qquad (3.12)$$

dengan

$$A = z \sin \theta$$

$$B = z \cos \theta$$

θ adalah sudut fase pada saat $t = 0$

Sekarang akan diuraikan untuk Multi Degree Of Freedom (sistem dengan lebih dari satu derajad kebebasan). Pandang kembali persamaan 3.12, untuk sistem dengan derajad kebebasan lebih dari satu u(t) akan berbentuk matriks baris sehingga dapat dituliskan menjadi

$$\mathcal{U}(t) = Z \sin(\omega t + \theta) \qquad (3.13)$$

$$\mathcal{U}(t) = u_i(t) \text{ dan } Z = z_i$$

$i = 1.2,\ldots,n$ dengan n = banyaknya derajad kebebasan dalam pernyataan ini Z menggambarkan bentuk sistem yang tidak bergantung kepada t

Bila diambil turunan kedua dari persamaan 3.13, percepatan getaran bebas diperoleh

$$\ddot{\mathcal{U}}(t) = -\omega^2 \; Z \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 \; \mathcal{U} \qquad (3.14)$$

Substitusi persamaan 3.14 ke persamaan 3.7 akan diperoleh

$$\left[K - \omega^2 M \right] \mathcal{U} = 0$$

sekarang melalui aturan Cramer akan diperlihatkan bahwa penyelesaian dari persamaan simultan ini adalah berbentuk

$$\mathcal{U} = \frac{0}{| K - \omega^2 M |}$$

solusi non trivial dimungkinkan bila penyebut berharga 0 (determinan = 0).Di tuliskan

$$| K - \omega^2 M | = 0 \qquad (3.15)$$

Persamaan 3.15 disebut dengan persamaan frekuensi sistem. Dengan memperluas determinan akan diperoleh persamaan aljabar berderajad kebebasan n dengan parameter ω^2, untuk sistem yang mempunyai n derajad kebebasan. Ke n akar - akar persamaan ini ($\omega^1, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^n$) menunjukan frekuensi modus dari ke n getaran yang mungkin terjadi pada sistem. Modus yang mempunyai frekuensi terendah disebut modus pertama, frekuensi berikutnya yang lebih tinggi adalah modus kedua dan seterusnya.

Dari sini juga dapat ditentukan periode getarannya. Karena ω merupakan frekuensi getaran sudut atau kecepatan sudut dari getaran, ini diukur menurut satuan radian persatuan waktu. Frekuensi gerak diberikan oleh

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

karena

$$T = \frac{1}{f}$$

maka

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Sehingga akan didapatkan periode getaran untuk sebanyak n periode. Dan selanjutnya periode getaran juga diurutkan mulai dari yang terendah sampai dengan yang tertinggi. Periode yang terendah disebut dengan T_a.