BAB II

MATERI DASAR

2.1 PERSAMAAN DIFERENSIAL

Suatu **Persamaan Diferensial** adalah persamaan yang didalamnya terdapat turunan -turunan

contoh :

1). $\frac{du}{dt} = t^2 + 1$

2). $y''' + 2(y')^2 + y' = \cos x$

Persamaan Diferensial Biasa adalah persamaan diferensial yang hanya mengandung satu variabel bebas. contoh 1) dan 2).

Order(tingkat) persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi turunan yang timbul, persamaan 1) adalah order pertama; 2) adalah orde tiga.

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDER n

Persamaan diferensial order n berbentuk

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n\, y = Q$$

di mana

$P_0 \neq 0$, P_1, P_2, . . . ,P_n, Q adalah fungsi x atau konstanta.

Jika $Q = 0$ maka persamaan ini disebut persamaan Homogen

Jika $Q \neq 0$ maka persamaan ini disebut persamaan tak Homogen contoh :

5). $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$, pers. homogen order dua

6). $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 6x \frac{dy}{dx} + 12y = 12 \ln x - 4$, pers tak homogen order tiga.

Jika koefesien P_o, P_1, , ... ,P_n merupakan suatu konstanta maka persamaan tersebut dinamakan persamaan diferensial dengan koefesien konstan.

PERSAMAAN DIFERENSIAL SIMULTAN

Pandang persamaan -persamaan berikut

$$A \begin{cases} 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t \\ \frac{dx}{dt} + 3x - y = 0 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + u_2 = 1 \\ \frac{du_1}{dt} - \frac{du_3}{dt} + 2u_1 + u_2 = 1 \\ \frac{du_2}{dt} + \frac{du_3}{dt} + u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases}$$

Persamaan - persamaan tersebut dinamakan persamaan simultan(serentak) dengan banyaknya variabel bebas sama dengan banyaknya persamaan.

Teorema 2.1 (teorema Taylor)

Misalkan $f : R \longrightarrow R$ mempunyai turunan dengan orde n+1, $f^{(n+1)}(x)$ di selang $(\alpha-r,\alpha+r)$ dan misalkan ada konstanta $M > 0$ sedemikian sehingga berlaku $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ untuk semua x di selang tersebut. Maka untuk setiap x di selang itu, $f(x)$ dapat diuraikan menjadi bentuk

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + f''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \ldots + f^{n}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^n}{n!} + R_n$$

dengan

$$|R_n| \leq \frac{M\,|x-\alpha|^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

Bukti :

$|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ ditulis sebagai

$$-M \leq f^{(n+1)}(x) \leq M$$

Jika semua ruas diintegrasikan dari α hingga x, akan diperoleh

$$-M(x-\alpha) \leq f^{(n)}(x) - f^{(n)}(\alpha) \leq M(x-\alpha)$$

Hasil ini dintegrasikan pula dari α sampai x maka didapatkan

$$\frac{-M(x-\alpha)^2}{2!} \leq f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(\alpha) - f^{(n)}(\alpha)(x-\alpha) \leq$$

$$\frac{M(x-\alpha)^2}{2!}$$

proses integrasi ini diulangi sampai (n-1) kali lagi dan hasilnya adalah sebagai berikut

$$\frac{-M\ (x-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} \le f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x-\alpha) - f''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2!}$$

$$- \ . \ . \ . - f^{(n)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^n}{n!} \le \frac{M\ (x-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}$$

jika ruas tengah

$$f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x-\alpha) - f''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2!} - \ . \ . \ . \ .$$

$- f^{(n)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^n}{n!}$, dimisalkan sebagai R_n maka akan diperoleh

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + f''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \ . \ . \ . \ .$$

$$+ f^{(n)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^n}{n!} + R_n$$

dengan

$$R_n \le \frac{M\ |x-\alpha|^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

hasil ini disebut sebagai uraian Taylor untuk $f(x)$ disekitar $x = \alpha$. R_n dinamakan sebagai suku sisa

Teorema 2.1 terbukti

Dengan mengambil $\alpha = x_o$ dan $x = x_o + h$ maka akan diperoleh

$$f(x_o + h) = f(x_o) + h\ f'(x_o) + h^2\ \frac{f''(x_o)}{2!} + \ . \ . \ . \ .$$

$$+ h^n\ \frac{f^n(x_o)}{n!} + R_n$$

bila diambil $x = x_o - h$ akan diperoleh

$$f(x_o - h) = f(x_o) - h\, f'(x_o) + h^2 \frac{f''(x_o)}{2!} + \dots$$

$$+ (-1)^n h^n \frac{f^n(x_o)}{n!} + R_n$$

Contoh

1. Diberikan fungsi ekponensial $y = e^x$, dengan menggunakan deret Taylor buktikan untuk $x = 0$ deret tersebut mencakup semua suku dari y (tidak ada yang tersisa)

Bukti

$$y = f(x) = e^x \longrightarrow f(0) = 1$$

$$y' = f'(x) = e^x \longrightarrow f'(0) = 1$$

$$y'' = f''(x) = e^x \longrightarrow f''(0) = 1$$

$$y''' = f'''(x) = e^x \longrightarrow f'''(0) = 1$$

$$\dots \qquad\qquad \dots$$

$$y^n = f^n(x) = e^x \longrightarrow f^n(0) = 1$$

sehingga dapat disusun suatu persamaan dalam bentuk deret sebagai berikut

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

akan ditunjukan bahwa suku sisanya adalah sama dengan nol.

Ambil M harga maksimum dari fungsi eksponential pada interval I yang menghubungkan 0 ke x. Jika $x>0$ maka $M = e^x$ tetapi jika $x<0$ maka $M = e^0 = 1$. Karena

$f_c^{n+1}(t) = e^t$ untuk semua n

didapatkan

$$\max_{t\in I} |f^{n+1}(t)| \le M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

dan karena $x = 0$ maka

$$\frac{(x)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

sehingga didapatkan

$R_n = 0$, dengan kata lain untuk x = 0 deret e^x adalah berlaku untuk seluruh suku.

2.2 MATRIKS

2.2.1 BEBERAPA JENIS MATRIKS

Matriks

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau komplek) yang disusun/dijajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris - baris atau kolom - kolom). Skalar - skalar ini disebut elemen matriks. Matriks diberi nama dengan huruf - huruf besar A,B,M dan lain - lain. Secara lengkap matriks $A = (a_{ij})$ artinya suatu matriks A yang elemen - elemennya a_{ij} dengan indeks i menyatakan baris ke-i dan indeks j menyatakan kolom ke-j dari elemen elemen tersebut.

Pandang matriks $A = (a_{ij})$, $i = 1,2,3,\ldots,m$ dan $j = 1,2,3,\ldots n$, ini berarti banyaknya baris = m dan banyaknya kolom = n dituliskan dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks ini dapat ditulis $A_{(mxn)}=(a_{ij})$, m x n disebut dengan ukuran(ordo) dari matriks

Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks yang mempunyaijumlah baris sama dengan jumlah kolom.

Barisan elemen $m_{11}, m_{22}, \ldots, m_{nn}$ dari suatu matriks bujur sangkar M_{nxn} diagonal utama dari matriks.

Matriks Diagonal

Matriks diagonal ialah matriks bujur sangkar yang semua elemen diluar diagonal utama adalah nol. Dengan perkataan lain $C = (c_{ij})$ adalah matriks diagonal bila $c_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

Matriks Identitas

Matriks identitas (satuan) ialah matriks diagonal yang elemen elemen diagonal utamanya semua sama dengan 1. Dengan perkataan lain matriks I adalah matriks identitas bila $i_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $i_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Matriks Simetri

Matriks D dikatakan matriks simetri bila pada elemen - elemennya berlaku $d_{ij} = d_{ji}$ untuk semua i dan j. Oleh karena itu matriks simetri pasti matriks bujur sangkar.

Matriks Invers

Jika A dan B matriks - matriks bujur sangkar berordo n dan berlaku AB = BA = I dengan I matriks identitas maka dikatakan matriks B invers dari matriks A dan ditulis $B = A^{-1}$, sebaliknya matriks A adalah invers dari matriks B dan ditulis $A = B^{-1}$

2.2.3 OPERASI - OPERASI PADA MATRIKS

Penjumlahan

Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ matriks berukuran sama maka A + B adalah matriks C dimana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, untuk setiap i dan j

Perkalian

Perkalian skalar terhadap matriks jika λ suatu skalar (bilangan) dan $A = (a_{ij})$ maka matriks $\lambda A = \lambda(a_{ij})$. Dengan perkataan lain matriks λA diperoleh dengan mengalikan setiap elemen matriks A dengan λ.

Perkalian antar matriks. Pandang matriks $A = (a_{ij})$ berukuran (p x q) dan matriks $B = (b_{ij})$ berukuran (q x r), maka matriks perkalian AB adalah suatu matriks C = (c_{ij}) berukuran (p x r) dimana

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ . \ . \ . \ + a_{iq}b_{qj}$$

untuk setiap $i = 1,2, \ldots, p$ dan $j = 1,2, \ldots, r$

Oleh sebab itu dalam perkalian dua buah matriks disyaratkan jumlah banyaknya kolom matriks pertama sama dengan jumlah banyaknya baris matriks kedua.Dan dalam perkalian matriks umumnya tidak dipenuhi hukum komutatif

Tranpose dari suatu matriks

Pandang suatu matriks A = (a_{ij}) berukuran (m x n) maka tranpose dari matriks A adalah matriks A^Tberukuran (n x m) yang didapatkan dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A, $i = 1,2, \ . \ . \ . \ ,m$ sebagai kolom ke-i dari A^Tatau A^T=(a_{ji}).

Sehingga suatu matriks akan simetri bila A = A^T

Transformasi(Operasi) elementer pada baris dan kolom dari suatu matriks

Yang dimaksud dengan transformasi (operasi) elementer pada baris atau kolom suatu matriks A adalah sebagai berikut:

- Penukaran tempat baris ke-i dan baris ke-j(baris ke-i dijadikan baris ke-j dan baris ke-j dijadikan baris ke-i), ditulis : $H_{ij}(A)$
- Penukaran tempat kolom ke-i dan kolom ke-j (kolom ke-i

dijadikan kolom ke-j dan kolom ke-j dijadikan kolom ke-i) di : $L_{ij}(A)$

-Memperkalikan baris ke-i dengan skalar $\lambda = 0$ di tulis $H_i^{(\lambda)}A$

-Memperkalikan kolom ke-i dengan skalar $\lambda = 0$ di tulis $L_j^{(\lambda)}A$

-Menambah baris ke-i dengan λ kali baris ke-j ditulis $H_{ij}^{(\lambda)}A$

-Menambah kolom ke-i dengan λ kali kolom ke-j ditulis $K_{ij}^{(\lambda)}A$

Determinan suatu matriks

Determinan suatau matriks berorde n didefinisikan sebagai suatu skalar yang dihubungkan dengan matriks bujursangkar $A = (a_{ij})$, $i = 1,2,\ldots,n$ dan $j = 1,2,\ldots,n$ yang dituliskan

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dan didefinisikan untuk n = 1 oleh

$$D = a_{11}$$

dan untuk $n \geq 2$ oleh

$$D = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \;.\;.\;.\; + a_{in}C_{in}$$

$(i = 1,2,\ldots,\text{ atau } n)$

atau

$$D = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \; . \; . \; . + a_{nj}C_{nj}$$

$$(j = 1,2, \; . \; . \; ., \text{ atau } n)$$

di mana

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

dan M_{ij} merupakan determinan berorde n-1 yaitu determinan submatriks A yang diperoleh dari matriks A dengan cara menghilangkan baris dan kolom unsur a_{ij}(baris ke-i dan kolom ke-j).

2.3 INTERPOLASI

Jika diberikan $y = f(x)$, $x_o \le x \le x_n$ maka untuk setiap nilai x akan berkorespondensi dengan satu atau lebih nilai y. Dengan anggapan bahwa $f(x)$ bernilai tunggal, kontiniu dan diketahui dalam bentuk eksplisit, maka nilai - nilai $f(x)$ berkorespondensi tepat dengan nilai - nilai x yang diberikan. Dengan demikian hubungan x dengan $f(x)$ dapat ditabulasikan dengan mudah. Tetapi seringkali diketahui daftar nilai - nilai $(x_o,y_o),(x_1,y_1)$, ... $,(x_n,y_n)$ yang memenuhi relasi $y = f(x)$ dengan bentuk eksplisit tidak diketahui

Oleh sebab itu perlu dicari cara untuk mendapatkan nilai $f(x)$ untuk suatu harga x yang diberikan, tanpa diketahui bentuk eksplisit dari $f(x)$.

Salah satu cara untuk untuk mendapatkan nilai $f(x)$ disebut dengan interpolasi. Interpolasi adalah suatu metode untuk mencari nilai $f(x)$ didalam interval (x_o, x_n) yang nilainya diestimasi dari nilai $f(x)$ yang nilainya diketahui disekitar titik yang akan dicari nilai $f(x)$nya

2.3.1 INTERPOLASI SELISIH MUNDUR

Didefinisikan

$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$, sebagai operator selisih mundur pertama

$$\nabla^2 f_n = \nabla f_n - \nabla f_{n-1}$$
$$= f_n - f_{n-1} - \left[f_{n-1} - f_{n-2} \right],$$ sebagai operator selisih mundur ke dua

dan seterusnya hingga

$\nabla^n f_n = \nabla^{n-1} f_n - \nabla^{n-1} f_{n-1}$, sebagai operator selisih mundur ke-n

Untuk n tertentu maka dapat disusun suatu tabel selisih mundur, misalkan n = 4 maka tabelnya adalah sebagai berikut

x	f_n	∇	∇^2	∇^3	∇^4
x_o	f_o				
		∇f_1			
x_1	f_1		∇f_2		
		∇f_2		$\nabla^3 f_3$	
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$		$\nabla^4 f_4$
		∇f_3		$\nabla^3 f_4$	
x_3	f_3		$\nabla^2 f_4$		
		∇f_4			
x_4	f_4				

Teorema 2.2

Jika didefinisikan operator

$$D = f'(a)$$

maka akan berlaku

$$D = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \frac{1}{4}\nabla^4 + \dots \right]$$

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + \dots \right]$$

$$D^3 = \frac{1}{h^3}\left[\nabla^3 + \frac{3}{2}\nabla^4 + \dots \right]$$

$$D^4 = \frac{1}{h^4}\left[\nabla^4 + \dots \right]$$

dengan $h = \dfrac{x_o - x_n}{i}$, $i = 1, 2, \dots n$

Bukti :

Diberikan sejumlah (n+1) buah nilai-nilai dari x dan f yakni $(x_o, f_o), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$. Akan dicari $f_n(x)$ berupa polinom berderajad n sedemikian sehingga f_n dan $f_n(x)$ memenuhi daftar titik tersebut

$$x_1 = x_o + h$$

$$x_2 = x_1 + h = x_o + 2h$$

$$x_3 = x_2 + h = x_o + 3h$$

$$\dots$$

$$x_n = x_{n-1} + h = x_o + nh$$

sehingga $f_n(x)$ dapat dituliskan sebagai

$$f_n(x) = a_o + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots$$

$$+ \alpha_n(x - x_n) \;.\;\;.\;\;.(x - x_o)$$

agar f_n dan $f_n(x)$ memenuhi himpunan titik tersebut diperoleh

$$\alpha_o = f_n$$

$$f_{n-1} = f_n + \alpha_1(x_{n-1} - x_n)$$

$$\alpha_1 = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{\nabla f_n}{h}$$

$$f_{n-2} = f_n + \alpha_1(x_{n-2} - x_n) + \alpha_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})$$

$$= f_n + \frac{\nabla f_n}{h}(x_{n-2} - x_n) + \alpha_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})$$

$$-(\alpha_2(-2h)(-h)) = f_n - 2\nabla f_n - f_{n-2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\nabla^2 f_n}{2!\; h^2}$$

dan seterusnya sehingga untuk ke-α_n didapatkan

$$\alpha_n = \frac{\nabla^n f_n}{n!\; h^n}$$

Dengan kata lain persamaan itu dapat ditulis sebagai suatu persamaan selisih

$$f_n(x) = f_n + \frac{\nabla f_n}{h}(x - x_n) + \;.\;\;.\;\;.\; + \frac{\nabla^n f_n}{n!\; h^n}$$

$$(x - x_n)\ .\ .\ .(x - x_o)$$

ambil $x = x_n + ph$, maka

$$f_n(x_n+ph) = f_n + p\nabla f_n + \frac{p\ (p+1)}{2!}\nabla^2 f_n$$

$$+ \frac{p(p+1)(p+2)}{3!}\nabla^3 f_n + \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{4!}\nabla^4 f_n$$

$$+ \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{5!}\nabla^4 f_n \quad + \ .\ .\ .$$

$$+ \frac{p(p+1)\ \ .\ .\ .\ (p+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

jika persamaan ini diturunkan ke-p satu kali didapat

$$h\ f'_n(x_n+ph) = \nabla f_n + \frac{2p+1}{2!}\nabla^2 f_n \ + \frac{3p^2+ 6p\ + 2}{3!}$$

$$\nabla^3 f_n + \frac{2p^3+ 9p^2+ 11p + 3}{4!}\nabla f_n + \ .\ .\ .$$

diturunkan ke-p dua kali didapatkan

$$h^2\ f''_n(x_n+ph) = \nabla^2 f_n + (p + 1)\nabla^3 f_n + \frac{6p +^2 18p + 11}{12}$$

$$\nabla^4 f_n + \ .\ .\ .$$

diturunkan ke-p tiga kali didapatkan

$$h^3\ f'''_n(x_n+ph) = \nabla^3 f_n + \frac{12p + 18}{12}\nabla^4 f_n \ + \ .\ .\ .$$

diturunkan ke-p empat kali akan diperoleh

$$h^4 f_n^{IV}(x_n+ph) = \nabla^4 f_n + \ldots$$

Untuk x = x maka didapatkan p = 0, jadi

$$h\, f_n'(x_n) = \nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^3 f_n + \frac{1}{4}\nabla^4 f_n$$

$$+ \ldots$$

$$h^2 f_n''(x_n) = \nabla^2 f_n + \nabla^3 f_n + \frac{11}{12}\nabla^4 f_n + \ldots$$

$$h^3 f_n'''(x_n) = \nabla^3 f_n + \frac{3}{4}\nabla f_n + \ldots$$

$$h^4 f_n^{IV}(x_n) = \nabla^4 f_n + \ldots$$

Jadi dengan $x_n = \alpha$ akan didapatkan

$$f_n'(\alpha) = D\, f_n(\alpha) = \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^3 f_n + \frac{1}{4}\nabla^4 f_n + \ldots\right]$$

$$D\, f_n(\alpha) = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \frac{1}{4}\nabla^4 + \ldots\right] f_n$$

Karena $f_n(\alpha)$ sembarang fungsi maka

$$D = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \frac{1}{4}\nabla^4 + \ldots\right]$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \ldots\right]$$

$$D^3 = \frac{1}{h^3}\left[\nabla^3 + \frac{3}{2}\nabla^4 + \ . \ . \ . \ \right]$$

$$D^4 = \frac{1}{h^4}\left[\ \nabla^4 + \ . \ . \ . \ \right]$$

Sehingga teorema 2.2 terbukti.

Contoh

1. Diberikan fungsi $f(x) = 2x^2 + x$, untuk x dari 0 sampai dangan 4 disusun tabel selisih mundur sebagai berikut

x	$f(x)$	∇	∇^2	∇^3	∇^4
0	0				
		2			
1	2		2		
		4		0	
2	6		2		0
		6		0	
3	12		2		
		8			
4	20				

Carilah nilai $f'(4)$!

Jawab

Dengan menggunakan rumus

$$D = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \frac{1}{4}\nabla^4 + \ . \ . \ . \right]$$

dimana $x_1 = x_0 + h$ jadi $h = 1$, maka untuk $f'(4)$ akan diperoleh

$$Df_4 = \frac{1}{h}\left[\nabla f_4 + \frac{1}{2}\nabla_4^2 f + \frac{1}{3}\nabla_4^3 f + \frac{1}{4}\nabla_4^4 f \right]$$

$$f'(4) = 1\left[8 + \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{4}(0) \right] = 9$$

Jika dihitung secara langsung akan diperoleh

$$f'(4) = 2(4) + 1 = 9$$

ternyata hasil ini sama dengan penghitungan dengan menggunakan interpolasi selisih mundur, untuk perhitungan dengan melibatkan suku - suku yang lebih banyak maka hasil perhitungan dengan interpolasi selisih mundur akam berupa suatu pendekatan dari nilai yang sebenarnya.