

## BAB II

### TEORI PENUNJANG

#### II.1 GRAPH

Di bawah ini akan dikemukakan beberapa pengertian dalam teori graph, serta sifat-sifat yang diperlukan.

##### Definisi 2.1 :

Suatu graph  $\sigma[V(\sigma), E(\sigma)]$  disingkat graph  $\sigma$ , terdiri dari :

- $V(\sigma)$  (Himpunan simpul dari  $\sigma$ ) yaitu berupa himpunan tak kosong dan berhingga dari unsur-unsur yang disebut simpul/titik/vertex dengan notasi  $v_i, i = 1, 2, \dots, N$ .
- $E(\sigma)$  (Himpunan sisi dari  $\sigma$ ) yaitu himpunan kosong atau himpunan berhingga pasangan tak terurut dari elemen-elemen  $V(\sigma)$  yang disebut sisi/edge dengan notasi  $(v_i, v_j)$  atau  $e_k$  dimana  $i, j, k$  bilangan asli dan  $v_i, v_j \in V(\sigma)$ .

Garis  $(v_i, v_j)$  terhubung diantara simpul  $v_i$  dan  $v_j$  maka garis  $(v_i, v_j)$  dikatakan *insiden* dengan simpul  $v_i$  dan  $v_j$ .

Sebaliknya simpul  $v_i$  dan  $v_j$  dikatakan insiden dengan

garis  $(v_i, v_j)$ .

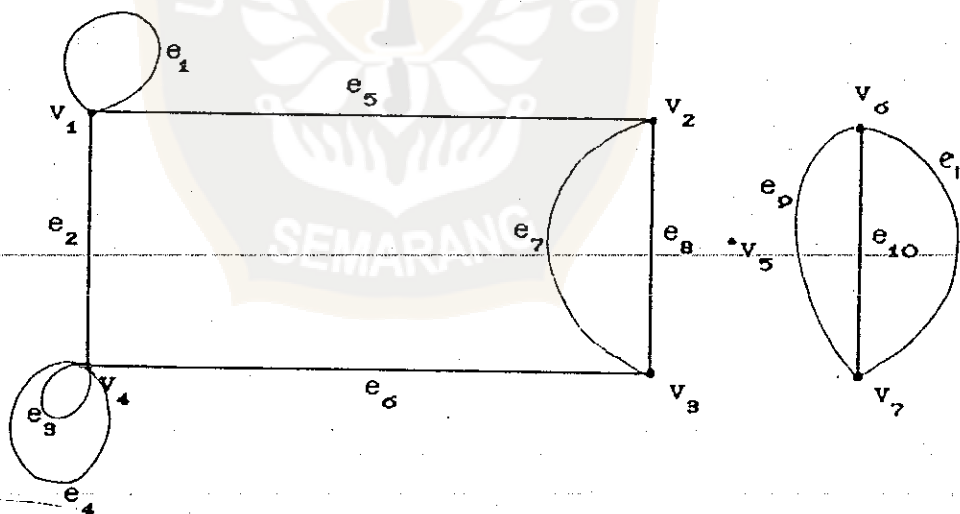
Suatu pasangan simpul mungkin terhubung melalui beberapa garis yang berbeda, dan garis-garis tersebut disebut *Garis paralel*.

Bila terdapat garis-garis dari pasangan simpul yang sama  $(v_i, v_i)$  maka garisnya disebut *loop*.

Suatu simpul yang tidak insiden dengan suatu garis disebut simpul *terasing* (Isolated point).

Contoh :

Diberikan graph  $\alpha$



Gambar 2.1

$$V(\alpha) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \}$$

$$E(\alpha) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11} \}$$

Garis  $e_1$  pada  $v_1$  merupakan loop, demikian juga garis

$e_9$  dan  $e_4$  merupakan dua loop pada titik  $v_4$ . Garis  $e_7$  dan  $e_8$  merupakan dua garis yang paralel, demikian juga dengan garis  $e_9, e_{10}$  dan  $e_{11}$ . Titik  $v_5$  merupakan isolated point, karena tidak ada garis yang insiden dengannya.

### Definisi 2.2 :

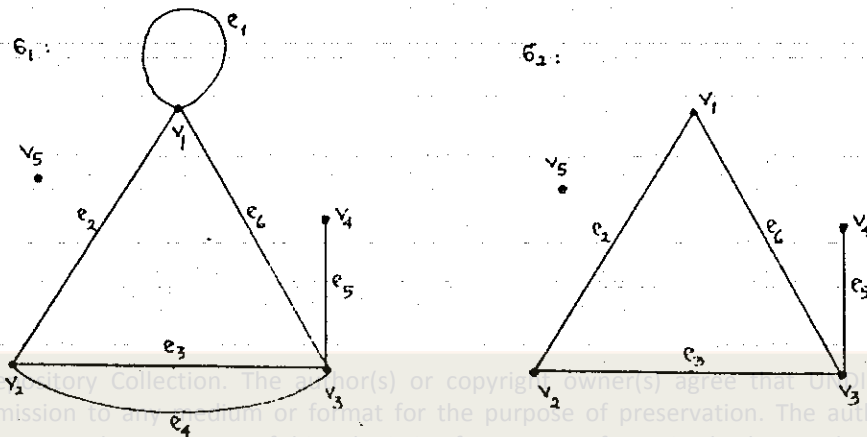
Dua simpul dikatakan bertetangga (adjacent) jika kedua simpul tersebut dihubungkan paling sedikit oleh 1 garis.

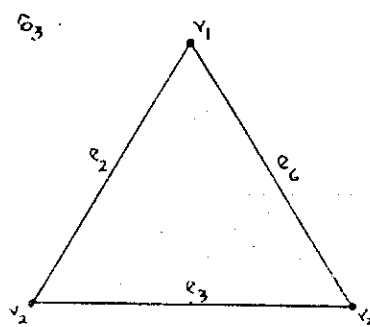
### Definisi 2.3 :

Subgraph  $\sigma'$  didefinisikan sebagai pasangan  $[V(\sigma'), E(\sigma')]$  dimana  $V(\sigma') \subseteq V(\sigma)$  dan  $E(\sigma') \subseteq E(\sigma)$ . Jika  $V(\sigma')$  dan  $E(\sigma')$  masing-masing subset sejati dari  $V(\sigma)$  dan  $E(\sigma)$  maka subgraph  $\sigma'$  disebut subgraph sejati dari  $\sigma$ .

Jika  $V(\sigma') = V(\sigma)$  dan  $E(\sigma')$  subset sejati dari  $E(\sigma)$  maka  $\sigma'$  disebut *spanning subgraph* dari  $\sigma$ .

### Contoh :





Gambar 2.2

$\sigma_2$  adalah spanning subgraph dari  $\sigma_1$  karena :

$$V(\sigma_2) = V(\sigma_1) \text{ dan } E(\sigma_2) \subset E(\sigma_1).$$

$\sigma_3$  adalah subgraph sejati dari  $\sigma_1$  karena :

$$V(\sigma_3) \subset V(\sigma_1) \text{ dan } E(\sigma_3) \subset E(\sigma_1).$$

**Definisi 2.4 :**

*Derajat suatu simpul  $v_i$  dalam graph  $\sigma$ , notasi  $d(v_i)$  ialah banyaknya sisi yang insiden ke simpul  $(v_i)$*

**Perjanjian :** Loop disuatu simpul memberikan nilai dua untuk derajat simpul tersebut.

Jadi  $d(v_i) = 2 \cdot l_{v_i} + n_{v_i}$  dimana  $l_{v_i}$  : banyaknya loop di simpul  $v_i$  dan  $n_{v_i}$  : banyaknya sisi yang insiden ke  $v_i$ . Pada gambar 2.2 kita lihat :  $d(v_1) = 4 = d(v_3)$  di  $\sigma_1$  dan  $d(v_1) = 2$ ,  $d(v_3) = 3$  di  $\sigma_2$ . Simpul berderajat satu seperti  $v_2$  disebut juga *titik ujung*.

Selanjutnya, dalam suatu graph dapat kita bentuk suatu *barisan sisi hingga*, dengan notasi  $v_0 v_1$ ,  $v_1 v_2$ , ...,  $v_{m-1} v_m$  atau  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v_m$  dengan sifat bahwa titik ujung suatu sisi merupakan titik awal dari sisi berikutnya, kecuali simpul pemula ( $v_0$ ) dan simpul akhir ( $v_m$ ).

Berdasarkan barisan sisi, kita definisikan *trail* dan *path*.

**Definisi 2.5 :**

Trail adalah barisan sisi yang semua sisi-sisinya berbeda ( tiap sisi hanya muncul satu kali). Jika simpul awal sama dengan simpul akhirnya ( $v_0 = v_m$ ) maka disebut trail tertutup.

**Definisi 2.6 :**

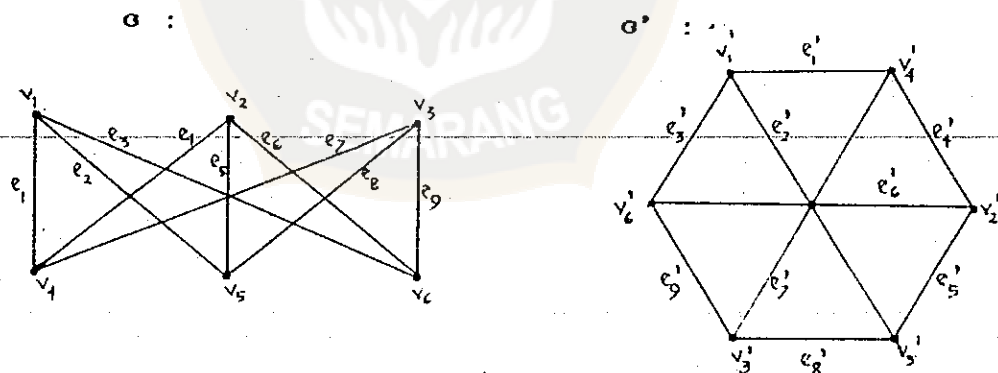
Path adalah trail dengan simpul-simpul yang berbeda, kecuali mungkin titik awal dan titik ujungnya. Suatu path disebut path tertutup jika simpul awal sama dengan simpul akhirnya ( $v_0 = v_m$ ), dan path tertutup disebut *sirkuit*.

Perhatikan kembali  $G_1$  pada gambar 2.2. Suatu contoh dari trail di  $G_1$  adalah :  $v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$  dan suatu path di  $G_1$  adalah  $v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$ , kemudian sirkuit di  $G_1$  :  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$  dan  $v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2$ .

**Definisi 2.7 :**

Dua graph  $\sigma$  dan  $\sigma'$  dikatakan *isomorf* satu dengan yang lain, jika ada korespondensi satu-satu antara simpul-simpulnya dan antara sisi-sisinya sedemikian sehingga hubungan insidensinya dipertahankan. Dengan kata lain jika sisi  $e$  insiden pada simpul  $v_1$  dan  $v_2$  di  $\sigma$ , maka sisi yang bersesuaian di  $\sigma'$  misalkan  $e'$  haruslah insiden dengan simpul  $v_1'$  dan  $v_2'$  yang bersesuaian dengan simpul  $v_1$  dan  $v_2$ .

Contoh :



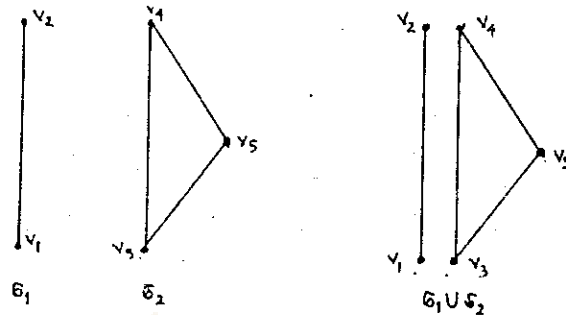
Gambar 2.3

Simpul-simpul  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$  bersesuaian dengan  $v_1', v_2', v_3', v_4', v_5', v_6'$  dan sisi-sisi  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$  sesuai dengan  $e_1', e_2', e_3', e_4', e_5', e_6', e_7', e_8', e_9'$

### II.1.1 Operasi Dalam Graph

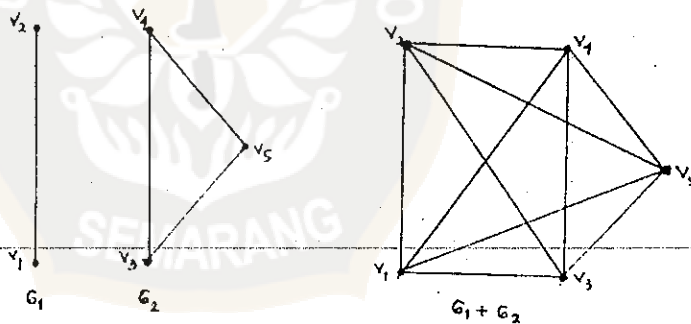
i) Penggabungan dua graph :  $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \sigma_3$

yaitu berupa graph dua komponen dimana  $V(\sigma_3) = V(\sigma_1) \cup V(\sigma_2)$  dan  $E(\sigma_3) = E(\sigma_1) \cup E(\sigma_2)$



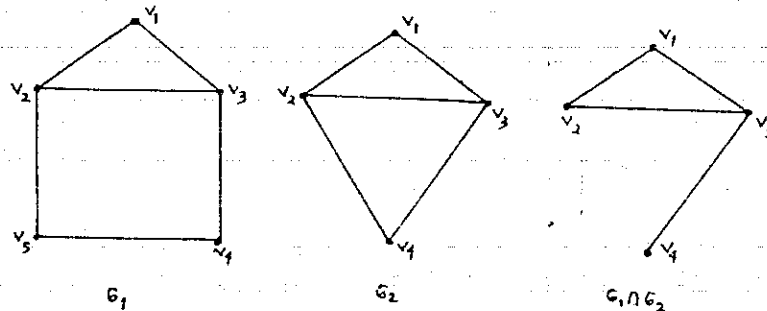
Gambar 2.4

ii) Penjumlahan dua graph :  $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3$  yaitu graph yang diperoleh dengan menarik sisi antara setiap simpul di  $\sigma_1$  dengan setiap simpul di  $\sigma_2$ .



Gambar 2.5

iii) Irisan dua graph  $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \sigma_3$  yaitu graph dengan himpunan simpul  $V(\sigma_1) \cap V(\sigma_2) = V(\sigma_3)$  dan himpunan garis  $E(\sigma_1) \cap E(\sigma_2) = E(\sigma_3)$



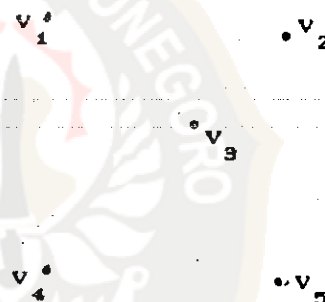
Gambar 2.6

### II.1.2 Beberapa Jenis Graph

Berikut ini diberikan tiga macam graph yang akan diperlukan dalam pembahasan selanjutnya.

- 1) *Graph null* ( $N_n$ ) yaitu graph yang himpunan sisinya kosong, atau graph yang hanya terdiri atas simpul-simpul yang terisolasi.

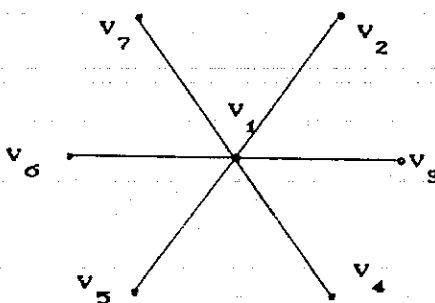
Misalnya  $N_5$  :



Gambar 2.7

- 2) *Graph bintang* ( $B_{1, n-1}$ ) yaitu graph yang salah satu simpulnya adjacent dengan semua simpul yang lain.

Misalkan  $B_{1,6}$  :

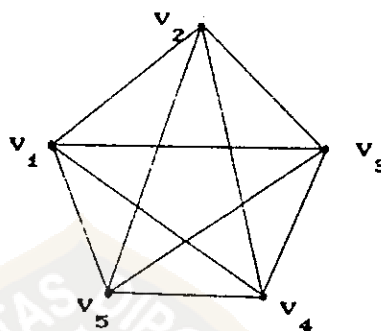


Gambar 2.8



3) *Graph lengkap* ( $L_N$ ) yaitu graph sederhana yang setiap pasangan dari simpul-simpul yang berbeda adalah adjacent.

Contoh  $L_5$  :



Gambar 2.9

Akibatnya graph lengkap merupakan graph sederhana yang banyak sisinya maksimum, yaitu :  $\binom{N}{2} = \frac{1}{2} N(N-1)$  sisi, dengan  $N$  adalah banyaknya simpul.

**Bukti :**

Dengan induksi matematika

\*) Untuk  $N = 1$

Maka ada  $\frac{1}{2} \cdot 1(1-1) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$  sisi.

terbukti benar.

\*) Misalkan benar untuk  $x$  simpul ( $N = x$ )

Banyak sisinya adalah :  $\frac{1}{2} \cdot x(x-1)$ .

\*) Untuk  $N = x + 1$

Dari graph lengkap dengan  $x$  simpul, ditambahkan 1 simpul. Karena merupakan graph lengkap maka 1 simpul tersebut harus adjacent dengan  $x$  simpul yang lain. Sehingga terjadi penambahan  $x$  buah sisi.

Didapat jumlah sisi :

$$= 1/2 \cdot x(x - 1) + x$$

$$= 1/2 x^2 - 1/2x + x$$

$$= 1/2 x^2 + 1/2 x$$

$$= 1/2 \cdot x (x + 1)$$

$$= 1/2 (x + 1)x$$

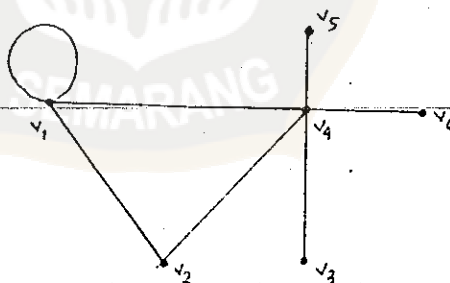
Terbukti benar untuk  $N = x + 1$ .

### II.1.2 Beberapa Teorema dan Lemma Tentang Graph

Definisi 2.8 :

Suatu graph  $\sigma$  dikatakan *terhubung* jika paling sedikit terdapat satu path yang menghubungkan setiap dua simpul dalam  $\sigma$ .

Contoh :



Gambar 2.10

Teorema 2.1 :

Suatu graph  $\sigma$  dikatakan tidak terhubung jika dan hanya jika himpunan simpul  $v(\sigma)$  dapat dipartisi ke dalam dua himpunan tak kosong yang saling lepas yaitu  $v_1(\sigma)$  dan  $v_2(\sigma)$  sehingga tidak ada sisi dalam  $\sigma$  yang satu ujungnya berada di  $v_1(\sigma)$

yang lain di  $v_2(\sigma)$ .

**Bukti :**

Misalkan ada partisi :  $v(\sigma) = v_1(\sigma) \cup v_2(\sigma)$  dan  $v_1(\sigma) \cap v_2(\sigma) = \emptyset$ . Ambil dua simpul sebarang  $a$  dan  $b$  di  $\sigma$ , sedemikian hingga  $a \in v_1(\sigma)$  dan  $b \in v_2(\sigma)$ . Maka tidak ada path yang menghubungkan  $a$  dan  $b$ . Sebab jika ada, maka terdapat paling sedikit satu sisi yang satu ujungnya di  $v_1(\sigma)$  dan yang lain di  $v_2(\sigma)$ . Karena itu jika satu partisi ada,  $\sigma$  tidak terhubung.

Sebaliknya misalkan  $\sigma$  graph tak terhubung. Ambil simpul  $a$  dalam  $\sigma$ . Misalnya  $v_1(\sigma)$  himpunan dari semua simpul dimana terdapat suatu path yang menghubungkan masing-masing simpul tersebut dengan  $a$ . Karena  $\sigma$  tidak terhubung, maka  $v_1(\sigma)$  tidak memuat semua simpul dari  $\sigma$ . Sisa-sisa simpul membentuk himpunan tak kosong, disebut  $v_2(\sigma)$ . Ini menunjukkan bahwa tidak ada simpul dalam  $v_1(\sigma)$  yang dihubungkan ke sembarang simpul dalam  $v_2(\sigma)$  oleh satu sisi. Sehingga terjadi partisi. Dari sini disimpulkan bahwa jika  $\sigma$  tidak terhubung maka ada partisi pada  $v(\sigma)$ .

Dengan pembuktian diatas dapat juga dipertegas bahwa jika graph  $\sigma$  tak terhubung, maka  $\sigma$  dapat diekspresikan sebagai *union* dari graph-graph terhubung yang terbatas dan masing-masing disebut

*komponen terhubung* atau *komponen saja*.

Pandang suatu graph  $\sigma$  dengan  $N$  simpul dan banyak sisinya  $n_e$  dan  $d(v_i)$  derajat simpul  $v_i$ .

**Lemma 2.1 (Lemma Jabat tangan)**

Jumlah derajat semua simpul di  $\sigma$  adalah sama dengan dua kali jumlah sisi-sisinya.

Dengan kata lain :

$$\sum_{v_i \in V(\sigma)} d(v_i) = 2 \cdot n_e$$

**Bukti :**

Ambil sembarang sisi  $e$  di  $\sigma$ .  $e$  menghubungkan dua simpul sebarang  $v_i$  dan  $v_j$  di  $\sigma$  (Simpul yang insiden ke  $e$ ). Maka sisi  $e$  memberikan nilai satu untuk derajat  $v_i$  dan juga satu untuk derajat  $v_j$ . Jika  $v_i$  sama dengan  $v_j$ , sisi  $e$  berupa loop di simpul  $v_i = v_j$  dan sesuai dengan perjanjian (halaman 6) memberikan nilai derajat dua untuk  $v_i = v_j$ . Karena  $e$  sisi sembarang, maka hal diatas juga berlaku untuk semua sisi-sisi lain, beserta simpul-simpul yang insiden padanya di  $\sigma$ . Jadi jumlah derajat dari semua simpul-simpul di  $\sigma$  adalah dua kali banyak sisi dalam graph  $\sigma$ .

**Teorema 2.2 :**

Andaikan  $\sigma$  adalah graph sederhana dengan  $N$  simpul. Jika  $\sigma$  mempunyai  $k$  komponen maka banyak sisi ( $n_e$ ) dari  $\sigma$  memenuhi :  $N-k \leq n_e \leq \frac{1}{2}(N-k)(N-k+1)$

**Bukti :**

(1) Semula akan ditunjukkan :  $n_e \leq \frac{1}{2}(N-k)(N-k+1)$ . Untuk membuktikan batas atas ini, kita misalkan graph  $\sigma$  diatas mempunyai dua komponen  $L_i$  dan  $L_j$  yang masing-masing merupakan graph lengkap dengan banyak simpul masing-masing  $N_i$  dan  $N_j$  dimana  $N_i \geq N_j > 1$ , serta banyak sisi masing-masing  $n_{ei}$  dan  $n_{ej}$ , maka jumlah sisi kedua komponen tersebut adalah:

$$\begin{aligned} n_e &= n_{ei} + n_{ej} = \frac{1}{2} N_i(N_i-1) + \frac{1}{2} N_j(N_j-1) \\ &= \frac{1}{2} (N_i^2 + N_j^2 + N_i - N_j) \end{aligned}$$

Sekarang rubah  $L_i$  dan  $L_j$  dengan graph lengkap lain  $L'_i$  dan  $L'_j$  dengan simpulnya masing-masing  $(N_i+1)$  dan  $(N_j-1)$  yaitu dengan menambahkan satu simpul milik  $L_j$  ke  $L_i$ . Jika sisi baru masing-masing  $n'_{ei}$  dan  $n'_{ej}$  maka jumlah sisi kedua graph lengkap baru tersebut:

$$\begin{aligned}
 n_e' &= n_{ei}' + n_{ej}' \\
 &= \frac{1}{2} (N_i+1)(N_i) + \frac{1}{2} (N_j-1)(N_j-2) \\
 &= \frac{1}{2} (N_i^2 + N_j^2 + N_i - 3N_j + 2)
 \end{aligned}$$

Perubahan graph ini memberikan perubahan sisi sebesar  $n_{e1} = n_e' - n_e = N_i - N_j + 1$  yang positif ( karena  $N_i \geq N_j > 1$  ) Pindahkan lagi satu titik dari  $L_j'$  ke  $L_i'$ , terbentuk graph lengkap baru  $L_i''$  dan  $L_j''$  dengan  $N_i'' = N_i' + 1 = N_i + 2$  dan  $N_j'' = N_j' - 1 = N_j - 2$  simpul, serta jumlah sisinya:

$$\begin{aligned}
 n_e'' &= n_{ei}'' + n_{ej}'' \\
 &= \frac{1}{2} (N_i+2)(N_i+1) + \frac{1}{2} (N_j-2)(N_j-3) \\
 &= \frac{1}{2} (N_i^2 + N_j^2 + 3N_i - 5N_j + 8)
 \end{aligned}$$

Penambahan sisi ini, jika dibandingkan dengan graph sebelumnya:

$$n_{e2} = n_e'' - n_e' = N_i - N_j + 3 > n_{e1}$$

Sedangkan penambahan sisi terhadap graph awal ( $L_i$  dan  $L_j$ ) ialah :

$$\begin{aligned}
 n_{e2}' &= n_e'' - n_e = 2N_i - 2N_j + 4 \\
 &= 2(N_i - 2N_j + 2) > n_{e1}
 \end{aligned}$$

terlihat adanya kenaikan jumlah sisi yang makin besar. Kenaikan jumlah sisi itu tentu lebih

besar lagi kalau pemindahan simpul itu diteruskan sampai komponen  $L_j$  hanya berupa satu simpul yang terisolasi.

Proses pemindahan simpul demikian (untuk membentuk graph lengkap baru) diperluas terhadap graph sederhana dengan  $k$  komponen berupa graph lengkap juga dimana:

$$N_1 \geq N_2 \geq \dots \geq N_i \geq N_j \geq N_k > 1$$

Maka graph sederhana ini akan mempunyai jumlah sisi yang maksimum (pada akhir dari proses pemindahan simpul) apabila komponennya berupa graph lengkap dengan  $(N - k + 1)$  simpul dan  $(k-1)$  simpul yang terisolasi. Dan kondisi ini memberikan jumlah sisi :

$$\left[ \frac{N - k + 1}{2} \right] = \frac{1}{2} (N - k + 1)(N - k)$$

(ii) Kemudian dibuktikan  $N - k < n_e$ .

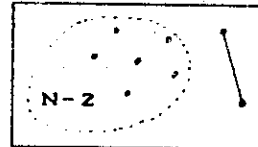
Untuk membuktikan batas bawah ini, digunakan induksi terhadap jumlah sisi dari  $\sigma$ .

- Jika  $\sigma$  berupa graph null hasilnya trivial
- Jika  $\sigma$  : graph sederhana  $N$  simpul,  $n_e$  sisi,  $k$  komponen berupa graph dengan kondisi minimum sisi yang mungkin, sehingga penghapusan sebarang sisinya menambah komponen, maka penghapusan salah satu sisi di  $\sigma$ , menambah jumlah komponen dari  $\sigma$ .

\* Tinjauan untuk :  $n_e = 1$

$$V(G) = \langle v_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n$$

$$E(G) = \langle \langle v_i, v_j \rangle \rangle, v_i, v_j \in V(G), i \neq j$$



Gambar 2.9

Maka :  $n_e \geq N - k$

$$1 \geq N - (N-1)$$

Jadi benar untuk  $n_e = 1$

\* Andaikan benar untuk  $n = S$  ; maka berlaku  $S \geq N - k$ .

\* Dari sini kita hapus satu sisi sebarang dari  $S$  sisi tersebut, maka sekarang mempunyai  $S' = (S-1)$  sisi dan  $k' = (k + 1)$  komponen sehingga :  $S = S' + 1$  dan  $k = k' - 1$ .

Dari :  $S \geq N - k$

$$S' + 1 \geq N - (k' - 1)$$

$$S' + 1 \geq N - k' + 1$$

$$S' \geq N - k'$$

Kesimpulan pada  $G$  berlaku :  $n_e \geq N - k$

**Lemma 2.2 :**

Jika dua sirkuit yang berbeda dari suatu graph

$G$ , masing-masing melibatkan sisi  $e$  secara

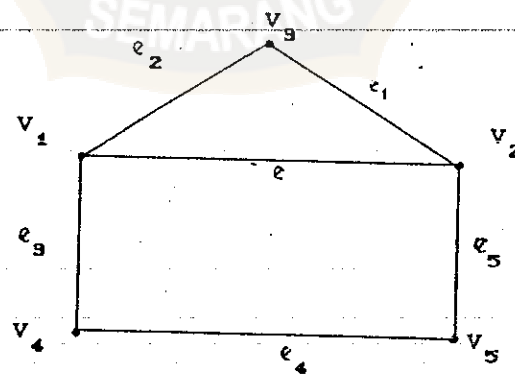


bersama-sama, maka terdapat sirkuit ke tiga dalam graph  $G$  yang tidak melibatkan  $e$ .

Bukti :

Misalkan sisi yang dilibatkan bersama-sama oleh kedua sirkuit tersebut :  $(v_1, v_2) = e$ , sehingga  $v_1$  dan  $v_2$  adalah simpul-simpul yang insiden ke  $e$ . Kedua simpul tersebut tentu saja dihubungkan oleh kedua path yang berbeda, yaitu path  $P_1 (= c_1 - e)$  sebagai bagian dari sirkuit pertama minus  $e$  dan path  $P_2 (= c_2 - e)$  yaitu bagian dari sirkuit kedua minus  $e$ . Maka kita peroleh sirkuit ketiga ( $c_3$ ) yang merupakan gabungan dari kedua path tersebut di simpul-simpul  $v_1$  dan  $v_2$  yang tidak melewati  $e$ .

Ilustrasi :



Gambar 2.10

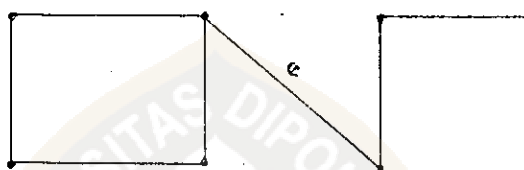
$$c_1 = e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e$$

$$c_2 = e \rightarrow e_3 \rightarrow e_4 \rightarrow e_5$$

$$c_3 = e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_3 \rightarrow e_4 \rightarrow e_5$$

**Definisi 2.9 :**

*Isthmus* atau *Jembatan* dalam suatu graph adalah suatu sisi  $e$  dalam graph terhubung yang dengan menghilangkan sisi tersebut mengakibatkan graph terpisah menjadi dua komponen.

**Contoh :**

Gambar 2.11

**II.2 DERET PANGKAT****Definisi 2.10**

Deret pangkat adalah sebuah deret yang mempunyai bentuk :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dimana  $a_0, a_1, \dots$  adalah konstanta.

Pandang deret  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Misalkan urutan jumlah parsial deret tersebut  $S_0, S_1,$

$$S_2, \dots \text{ dimana } S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 + a_1x$$

...

$$S_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

**Definisi 2.11**

Deret  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  konvergen jika terdapat bilangan  $S$  sedemikian sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

**II.2.1 FUNGSI PEMBANGKIT**

Misalkan  $a_0, a_1, a_2, \dots$  adalah barisan bilangan dengan indeks  $n$ .

**Definisi 2.12**

Fungsi pembangkit atau *Generating Function* dari barisan tersebut adalah suatu deret pangkat :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \dots(2.1)$$

yang konvergen

Penulisan tanda  $x^0 = 1, x^1, x^2, \dots$  diinterpretasikan sebagai penulisan tanda aljabar atau simbol yang mewakili bermacam-macam suku dari barisan  $a_0, a_1, \dots$

**Contoh-contoh Fungsi Pembangkit**

II.2.1.a Diberikan koefisien :  $\langle a_i \rangle = 1, 1, 1, \dots$   
 $i = 0, 1, 2, \dots$

Fungsi pembangkitnya adalah :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \quad \text{untuk } |x| < 1. \end{aligned}$$

II.2.1.b Suatu barisan koefisien  $\langle a_i \rangle$  dengan  $a_i =$

$C(N, i)$  untuk suatu  $N$  yang ditetapkan, dengan

nilai :

$$C(N, i) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } i = 0 \\ \binom{N}{i} & \text{untuk } i \leq N \\ 0 & \text{untuk } i > N \end{cases}$$

maka fungsi pembangkit dari  $a_i$  (sesuai dengan teorema binomial) adalah :

$$\begin{aligned} f(x) &= C(N, 0) + C(N, 1)x + C(N, 2)x^2 + \dots + \\ &\quad C(N, i)x^i + \dots + C(N, N)x^N \\ &= 1 + Nx + \frac{1}{2} N(N-1)x^2 + \dots \\ &= (1+x)^N \quad \text{untuk } |x| < 1 \end{aligned}$$

II.2.1.c Pada contoh ini diberikan fungsi pembangkit:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^N$$

akan dicari koefisien-koefisien dari  $f(x)$  tersebut. Berdasarkan contoh II.2.1.a, kita ketahui bahwa :

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{untuk } |x| < 1$$

$$\text{sehingga : } (1 + x + x^2 + \dots)^N = \frac{1}{(1-x)^N}$$

$$= (1-x)^{-N} ; |x| < 1$$

Dengan perluasan teorema binomial, diperoleh :

$$(1-x)^{-N} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-N}{r} (-x)^r$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-N)(-N-1)\dots(-N-r+1)}{r!} (-x)^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (N)(N+1)\dots(N+r-1)}{r!} (-1)^r x^r \\
(1-x)^{-N} &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{N+r-1}{r} x^r \quad \dots\dots (2.2)
\end{aligned}$$

Jadi koefisien dari fungsi pembangkit  $(1-x)^{-N}$  adalah :

$$\binom{N+r-1}{r}$$

**Lemma 2.3 :**

Banyak cara menyeleksi  $k$  obyek dari  $N$  obyek yang berbeda, dengan repetisi yang tak terbatas, adalah :

$$\binom{N+k-1}{k}$$

**Bukti :**

Ada  $N$  obyek bertanda :  $1, 2, \dots, N$  dan misalkan seleksi tertentu memberikan  $k$  bilangan asli :  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Susun  $a_1, a_2, \dots, a_k$  dalam urutan tak menurun,  $a_i$  tak perlu berbeda. Dari urutan tersebut, berikan label berikut :

$a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, a_4 + 3, \dots, a_k + (k-1)$

dengan penambahan :  $0$  ke  $a_1, 1$  ke  $a_2$  dan

seterusnya. Masing-masing suku tersebut dengan label yang baru adalah berbeda. Jadi setiap seleksi dengan repetisi yang terbatas dapat diidentifikasi secara unik sebagai suatu seleksi dari  $k$  bilangan asli yang berbeda dari bilangan asli : 1, 2, 3, ...,  $k$ , ...,  $(N+k-1)$ .

$$= \binom{N+k-1}{k}$$

Berdasarkan Lemma 2.3 diatas, maka koefisien fungsi pembangkit  $f(x)$  pada contoh II.2.1.c yaitu :

$$\binom{N+r-1}{r}$$

merupakan banyak cara menyeleksi  $r$  obyek dari  $N$  obyek yang berbeda, tanpa adanya batasan pengulangan (repetisi) untuk munculnya suatu obyek.

#### Beberapa Sifat Yang Dimiliki Fungsi Pembangkit

Jika \*)  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  dan  $S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$+ a_n x^n$  sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S'$

\*)  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  dan  $S_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$

+  $b_n x^n$  sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

Maka dipenuhi sifat-sifat berikut :

a. Penggeseran

$$x^k f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} x^n \quad \dots (2.3)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} x^k f(x) &= x^k (a_0 + a_1 x + \dots) \\ &= a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + a_2 x^{k+2} + \dots \\ &= a_{-k} x^0 + a_{1-k} x^1 + \dots + a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

dengan  $a_i = 0$  untuk  $i < 0$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} x^n$$

b. Perkalian dengan konstanta

Jika  $\alpha$  adalah konstanta, maka :

$\alpha f(x)$  adalah fungsi pembangkit untuk

$$\alpha a_0, \alpha a_1, \dots$$

Bukti :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$\alpha f(x) = \alpha (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$

$$= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \dots$$

$$\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n \quad \dots (2.4)$$

Akan dibuktikan bahwa  $\alpha f(x)$  konvergen.

Bukti :

$$\text{Diketahui } S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$\text{sehingga } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S'$$

$$\alpha f(x) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \alpha S'$$

Terbukti  $\alpha f(x)$  konvergen ke  $\alpha S'$ .

### c. Penjumlahan Antar Fungsi Pembangkit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \dots (2.5)$$

dengan  $c_i = a_i + b_i$

Bukti :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \cdot \\ &\quad (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ dengan } c_i = a_i + b_i \end{aligned}$$

akan dibuktikan bahwa  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  konvergen.

Bukti :

Diketahui :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S''$$

maka  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S' + S''$



$$\text{jadi : } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = S' + S''$$

Terbukti bahwa  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  konvergen ke  $S' + S''$

#### d. Perkalian Antar Fungsi Pembangkit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \dots\dots(2.6)$$

dimana  $c_n = a_i b_{n-i}$  ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$

Bukti :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) \\ &= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 \\ &\quad + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) x^3 + \dots \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \\ &\quad \text{dengan } c_i = a_i b_{n-i} \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  konvergen

Diketahui :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S''$$

$$\text{Maka } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S' \cdot S''$$

$$\text{Jadi } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = S \cdot S'$$

Terbukti bahwa  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  konvergen ke  $S \cdot S'$

Pada enumerator / fungsi pembangkit tree tidak perlu dicari batas-batas konvergensinya.

$a_N x^N$  menyatakan bahwa dari graph null dengan  $N$  simpul bisa dibentuk menjadi  $a_N$  bentuk tree yang berlainan.

### II.3 PARTISI SUATU BILANGAN ASLI

Partisi suatu bilangan asli ( $N$ ) diartikan sebagai penguraian  $N$  atas  $m$  bagian bilangan asli lainnya, yang lebih kecil atau sama dengan  $N$  demikian hingga jumlah  $m$  bilangan tersebut sama dengan  $N$ .

Misal :

$$\left[ N^{k_N} \dots j^{k_j} \dots 3^{k_3} 2^{k_2} 1^{k_1} \right] \text{ adalah partisi tersebut.}$$

dengan  $j$  bilangan asli tertentu antara 1 dan  $N$  ( $1 \leq j \leq N$ ) yang dapat muncul sebanyak  $k_j$  kali dengan  $0 \leq k_j \leq N$ , maka :

$$k_1 + k_2 + \dots + k_j + \dots + k_N = m \quad \dots \dots (2.7)$$

$$1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + j \cdot k_j + \dots + N \cdot k_N = N \quad \dots \dots (2.8)$$

Sebagai contoh  $N = 5$  dipartisi atas :

$m :$	1	2	3	4	5
ialah :	[5]	[41]	[31 <sup>2</sup> ]	[21 <sup>3</sup> ]	[1 <sup>5</sup> ]

$$[32] \quad [2^2 1]$$

terlihat bahwa pada salah satu partisi  $N = 5$  atas  $m=4$  bagian yaitu  $[21^3]$  sebagai notasi dari  $[2111]$  memenuhi kedua persamaan (2.7) dan (2.8) diatas, dengan  $j=2$  dan  $1$ , kemudian  $k_2=1$  dan  $k_1=3$ . Begitu pula pada partisi-partisi yang lain.

Dengan menganggap  $m$  bagian dari partisi sebagai  $m$  kolom yang akan diisi, maka proses pembentukan partisi bilangan  $N$  tersebut secara umum dilakukan sebagai berikut :

1. Sebagai partisi yang pertama, isikan angka satu pada  $(m-1)$  kolom terakhir, kemudian sisa angka dari  $N$  sebut  $N_1$  diletakkan pada kolom pertama.
2. Pindahkan satu angka dari kolom pertama ke kolom berikutnya (kolom 2 dan seterusnya). Pada langkah ini mungkin terjadi pemindahan yang bervariasi (ke beberapa kolom), tetapi tidak boleh terjadi duplikasi (susunan tidak berpengaruh). Misalkan partisi  $[5421] = [5412]$ .
3. Dengan angka yang sama di kolom pertama mungkin dapat dipindahkan satu demi satu angka-angka dari kolom ke dua, ketiga dan seterusnya ke kolom lain yang lebih jauh. Misalkan pada contoh di langkah 3 partisi selanjutnya adalah  $[5331]$  dan  $[5322]$ .
4. Pemindahan angka-angka tersebut dilanjutkan sampai tidak mungkin lagi terbentuk partisi baru. Sebagai contoh jika partisi di langkah 3 diteruskan, maka  $[3333]$  dinotasikan  $[3^4]$  adalah partisi terakhir

dari  $N = 12$  atas  $m = 4$  bagian.

Dengan pola diatas, kita dapatkan tabel partisi sebagaimana terlihat pada lampiran 1.

