BAB II

MATRIKS DAN SISTEM PERSAMAAN LINIER

2.1 Matriks

2.1.1 Definisi Dan Jenis Matriks

Definisi 2.1

Suatu matriks adalah rangkaian berbentuk persegi panjang dari bilangan-bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom, himpunan elemen mendatar disebut baris dan elemen yang tegak disebut kolom. Matriks diberi nama dengan huruf besar dan diberi notasi [ ]. Secara lengkap ditulis matriks $A_{mxn} = (a_{ij})$ artinya suatu matriks A yang elemen-elemenya a_{ij} dimana indeks i menyatakan baris ke-i dan indeks j menyatakan kolom ke-j dari elemen. (mxn) disebut ukuran atau ordo dari matriks, sehingga i = 1,2,...,m dan j = 1,2,...,n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2

Matrks bujur sangkar berordo n adalah suatu matriks dengan banyak baris sama dengan banyak kolom = n. Barisan elemen a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} disebut diagonal utama dari matriks bujur sangkar A tersebut.

Contoh 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$ adalah matriks bujur sangkar berordo 3

Definisi 2.3

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di atas diagonal utama sama dengan nol.

Contoh 2.2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ adalah matriks segitiga bawah.

Definisi 2.4

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di bawah diagonal utama sama dengan nol.

Contoh 2.3

Contoh 2.3

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$ adalah matriks segitiga atas.

Definisi 2.5

Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen kecuali elemen-elemen diagonal utama adalah nol.

Contoh 2.4

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ adalah matriks diagonal.

Definisi 2.6

Matriks identitas adalah matriks diagonal dengan elemen-elemen pada diagonal utama sama dengan 1, dan dinotasikan dengan I atau I_n dimana n adalah ordo matriks tersebut.

Contoh 2.5

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ adalah matriks identitas berordo 3

Definisi 2.7

Matriks invers adalah matriks bujur sangkar yang dinotasikan dengan A^{-1} yang dibaca invers dari matriks A, dimana berlaku hubungan $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

2.1.2 Operasi-Operasi Pada Matriks

Definisi 2.8

Jika $A = a_{ij}$ dan $B = b_{ij}$ matriks berukuran sama, maka A + B adalah suatu matriks $C = c_{ij}$ dimana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk setiap i dan j atau $A + B = a_{ij} + b_{ij}$.

Contoh 2.6

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+0 & 1+2 & 2+6 \\ 4+1 & 2+3 & 5+4 \\ 6+5 & 1+3 & 7+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 5 & 5 & 9 \\ 11 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.9

Jika $A = a_{ij}$ dan $B = b_{ij}$ matriks berukuran sama, maka A - B adalah suatu matriks C = c_{ij} dimana c_{ij} = a_{ij}- b_{ij} untuk setiap i dan j atau A - B = a_{ij} - b_{ij}.

Contoh 2.7

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

maka

$$A - B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-1 & 2-4 & 3-2 \\ 5-3 & 1-2 & 7-5 \\ 6-1 & 3-7 & 5-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Definisi 10

Kalau λ suatu skalar (bilangan) dan A= a_{ij} maka matriks λ A = λ a_{ij}.

Contoh 2.8

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3.4 & 3.3 & 3.7 \\ 3.3 & 3.0 & 3.-1 \\ 3.5 & 3.2 & 3.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 9 & 21 \\ 9 & 0 & -3 \\ 15 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.11

Bila $A_{(pxq)} = a_{ij}$ dan $B_{(qxr)} = b_{ij}$ maka perkalian A B adalah suatu matriks $C_{(pxr)} = c_{ij}$ dimana $c_{ij} = a_{i1}\ b_{1j} + a_{i2}\ b_{2j} + \ldots + a_{iq}\ b_{qj}$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, p$ dan $j = 1, 2, \ldots, r$. Syarat perkalian matriks adalah banyaknya kolom matriks pertama samadengan banyaknya baris matriks kedua.

Contoh 2.9

$$A_{(3x3)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$B_{(2x3)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

B A terdefinisi dengan ukuran (2x3)

$$B\ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.3+2.2+0.1 & 3.1+2.1+0.0 & 3.4+2.0+0.1 \\ 1.3+3.2+1.1 & 1.1+3.1+1.0 & 1.4+3.0+1.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 5 & 12 \\ 10 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2.1.3 Determinan

Setiap matriks bujur sangkar A selalu dikaitkan dengan suatu skalar yang disebut determinan matriks tersebut dan ditulis sebagai det (A) atau $|A|$.

Definisi 2.12

Barisan bilangan-bilangan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ dimana berlaku $j_i \neq j_k$ untuk $i \neq k$ (i dan $k = 1,2,\ldots,n$) serta j_i salah satu dari bilangan asli $(1, 2, \ldots, n)$ disebut permutasi.

Contoh 2.10

Sebagai contoh (2,3,1,4,5) adalah permutasi.

Definsi 2.13

Yang dimaksud dengan sebuah invers pada suatu permutasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ ialah adanya j_k mendahului j_i padahal $j_i < j_k$ (i dan $k = 1, 2, \ldots, n$).

Contoh 2.11

Misal ada permutasi (2,1,4,3) terdapat 2 inversi yaitu :

1. $j_1 = 2$ mendahului $j_2 = 1$, padahal $1 < 2$.
2. $j_3 = 4$ mendahului $j_4 = 3$, padahal $3 < 4$.

Contoh 2.12

Permutasi (4,3,1,2) banyaknya inversi ada lima yaitu :

1. $j_1 = 4$ mendahului $j_2 = 3$, padahal $3 < 4$.
2. $j_1 = 4$ mendahului $j_3 = 1$, padahal $1 < 4$.
3. $j_1 = 4$ mendahului $j_4 = 2$, padahal $2 < 4$.
4. $j_2 = 3$ mendahului $j_3 = 1$, padahal $1 < 3$.
5. $j_2 = 3$ mendahului $j_4 = 2$, padahal $2 < 3$.

Definisi 2.14

Jika banyaknya inversi suatu permutasi adalah bilangan ganjil maka disebut permutasi ganjil dan dalam hal lain disebut permutasi genap.

Contoh 2.13

Pada contoh 2.11 adalah permutasi genap, sedangkan contoh 2.12 adalah permutasi ganjil

Definisi 2.15

Misalkan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ suatu permutasi, maka tanda dari permutasi tersebut ditulis δ $(j_1, j_2,$

$\ldots, j_n)$ adalah $\delta(j_1, j_2, \ldots, j_n) = +1$, bila $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ genap, dan $= -1$ bila $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ ganjil.

Sekarang pada matriks bujur sangkar A berordo n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

terdapat hasil kali antara n elemen-elemen dari A yang masing-masing terletak pada baris yang berbeda dan kolom yang berbeda (suatu hasil kali yang mengandung hanya satu elemen dari setiap baris dan setiap kolom). Untuk memudahkan diambil suatu hasil kali dari n elemen-elemen yang barisnya telah diurutkan (boleh pula kolomnya yang diurutkan), maka setiap hasil kali antara n elemen matriks A tersebut selalu berbentuk :

(*). $a_{1j_1}, a_{2j_2}, a_{3j_3}, \ldots, a_{nj_n}$ dimana subcript j_i menunjukan kolomnya. Karena masing-masing faktor haruslah elemen-elemen yang datang dari kolom yang berbeda maka barisan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ adalah suatu permutasi. Apabila hasil kali (*) dilengkapi dengan memberikan tanda dari permutasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ tersebut maka hasil kali :

(**) $\delta\,(j_1, j_2, \ldots, j_n)\,.\,a_{1j_1}\;a_{2j_2}\;\ldots\;a_{nj_n}$ disebut hasil kali bertanda dari n elemen-elemen $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$.

Definisi 2.16

Determinan dari matriks bujur sangkar A berordo n adalah jumlah dari semua n ! hasil kali bertanda dari elemen-elemen matriks A tersebut, ditulis det (A) = $|A| = \Sigma\,\delta(j_1, j_2, \ldots, j_n).a_{1j_1}\;a_{2j_2}\;\ldots\;a_{nj_n}$.

Contoh 2.14

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ berordo } 3$$

terdapat 3 ! = 6 hasil kali :

(1). $a_{11}\;a_{22}\;a_{33}$, permutasi (1 , 2 , 3) banyak inversi 0 (+).

(2). $a_{12}\;a_{23}\;a_{31}$, permutasi (2 , 3 , 1) banyak inversi 2 (+).

(3). $a_{13}\;a_{21}\;a_{32}$, permutasi (3 , 1 , 2) banyak inversi 2 (+).

(4). $a_{13}\;a_{22}\;a_{31}$, permutasi (3 , 2 , 1) banyak inversi 3 (-).

(5). $a_{11}\;a_{23}\;a_{32}$, permutasi (1 , 3 , 2) banyak innversi 1 (-).

(6). $a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$, permutasi (2 , 1 , 3) banyak innversi 1 (-).

Jadi $\det(A) = + a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} +$
$+ a_{13}\ a_{21}\ a_{32} - a_{13}\ a_{22}\ a_{31} +$
$- a_{11}\ a_{23}\ a_{32} - a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$

Contoh 2.15

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

maka terdapat n ! = 2 !
= 2 buah perkalian

(1). $a_{11}a_{22}$, permutasi (1,2), banyaknya inversi 0 (+).

(2). $a_{12}a_{21}$, permutasi (2,1), banyaknya inversi 1 (-).

Jadi $\det(A) = + a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}$

Definisi 2.17

Yang dimaksud dengan operasi baris elementer suatu matriks A adalah sebagai berikut :

(1). Penukaran elemen baris ke-i dan elemen baris ke-j ditulis $O_{ij}(A)$.

(2). Memperkalikan elemen baris ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$ ditulis $O_i^{(\lambda)}(A)$.

(3). Menambah baris ke-i dengan λ kali baris ke-j ditulis $O_{ij}^{(\lambda)}(A)$.

Contoh 2.16

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka}$$

$$O_{12}(A) = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$O_3^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$O_{13}^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.18

Apabila dikerjakan satu kali (single) operasi elementer terhadap suatu matriks identitas I, maka matriks hasil operasi elementer itu disebut matriks elementer E.

Contoh 2.17

Matriks-matriks elementer dari I_3 misalnya :

$$O_{12}\,(I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$O_{3}^{(2)}(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$O_{13}^{(2)}(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Theorema 2.1

Jika matriks elementer E dihasilkan dengan melakukan sutu kali operasi baris tertentu pada I dan jika A adalah matriks m x n , maka hasil kali E A adlah matriks yang dihasilkan bila operasi baris yang sama ini dilakukan pada A.

Bukti :

Untuk operasi baris elementer O_{ij},

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{dan}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \;\cdots & 0 \;\cdots & 0 \;\cdots & 0 \\ 0 & 1 \;\cdots & 0 \;\cdots & 0 \;\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{baris ke-i} \\ \\ \text{baris ke-j} \\ \\ \end{array}$$

kolom ke-i   kolom ke-j

$$O_{ij}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$O_{ij}(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \;\cdots & 0 \;\cdots & 0 \;\cdots & 0 \\ 0 & 1 \;\cdots & 0 \;\cdots & 0 \;\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{baris ke-i} \\ \\ \text{baris ke-j} \\ \\ \end{array}$$

kolom ke-i   kolom ke-j

$$E\,A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = O_{ij}\ (A)$$

Untuk operasi baris elementer $O_i^{(\lambda)}$ dan $O_{ij}^{(\lambda)}$ dapat dibuktikan analog dengan cara diatas.

Contoh 2.18

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$O_{13}^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ sedangkan}$$

$$O_{13}^{(2)}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

didapat :

$$E\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= O_{13}^{(2)}(A)$$

Definisi 2.19

Apabila dikerjakan operasi elementer tunggal terhadap matriks identitas I sehingga menghasilkan matriks elementer E, operasi elementer tunggal terhadap matriks elementer E tersebut untuk menghasilkan kembali matriks identitas I disebut operasi invers elementer, dapat ditulis :

$O_{ij}(I) = E$ maka $O_{ij}(E) = I$

$O_i^{(\lambda)}(I) = E$ maka $O_i^{(\frac{1}{\lambda})}(E) = I$

$O_{ij}^{(\lambda)}(I) = E$ maka $O_{ij}^{(-\lambda)}(E) = I$

atau dengan kata lain :

Operasi elementer O_{ij} , $O_i^{(\lambda)}$, $O_{ij}^{(\lambda)}$ berpadanan dengan operasi invers elementer berturut-turut

O_{ij} , $O_i^{(\frac{1}{\lambda})}$, $O_{ij}^{(-\lambda)}$.

Contoh 2.19

$$O_{12}(I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \text{ maka}$$

$$O_{12}\ (E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$O_3^{(2)}\ (I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = E \quad \text{maka}$$

$$O_3^{(1/2)}(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$O_{13}^{(3)}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \quad \text{maka}$$

$$O_{13}^{(-3)}(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

Theorema 2.2

Setiap matriks elementer memiliki invers dan inversnya adalah juga matriks elementer.

Bukti :

Jika E adalah matriks elementer hasil operasi elementer terhadap I, dan E_o adalah matriks elementer hasil operasi invers elementer yang berpadanan terhadap I. Berdasarkan theorema 2.1 dan berdasarkan bahwa operasi elementer akan saling meniadakan dengan operasi invers elementernya maka :

$$E\ E_o = I \text{ dan } E_o\ E = I$$

sehingga E_o adalah invers matriks elementer.

Contoh 2.20

$$O_{13}^{(3)}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$$O_{13}^{(-3)}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_o$$

$$E\ E_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_o\ E$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_3$$

Definisi 2.20

Suatu matriks berordo m x n disebut matriks eselon baris jika memenuhi dua sifat berikut :

(1). Setiap baris dari k baris pertama mempunyai unsur tak nol, dimana $1 \leq k \leq m$ dan semua unsur pada m − k baris lainnya aalah nol.

(2). Unsur tak nol yang pertama dari setiap baris tak nol adalah 1 (disebut 1 utama), jika bilangan 1 utama dari baris ke-i $(1 \le i \le k)$ terletak pada kolom ke t_i maka $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$.

Contoh 2.21

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{25} & b_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

adalah suatu matriks eselon baris. Elemen-elemen b_{13}, b_{14}, b_{15}, b_{16}, b_{25}, b_{26}, b_{36} boleh sembarang bilangan.

Definisi 2.21

Pandang matriks A berordo m x n dengan elemen-elemennya bilangan riil.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tiap-tiap baris dari A dapat dipandang sebagai sebuah vektor $B_1 = [a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}]$

$$B_2 = [a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n}]$$
$$\vdots$$
$$B_m = [a_{m1},\ a_{m2},\ \ldots,\ a_{mn}]$$

dan disebut vektor-vektor baris dari matriks A. Analog dengan vektor baris vektor-vektor kolom dari A adalah : $A_1 = [a_{11},\ a_{21},\ \ldots,\ a_{m1}]$

$$A_2 = [a_{12},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{m2}]$$
$$\vdots$$
$$A_n = [a_{1n},\ a_{2n},\ \ldots,\ a_{mn}]$$

2.2 Sistem Persamaan Linier

Definisi 2.22

Persamaan linier adalah suatu persamaan berbentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ ....(2.1) dengan a_i dan b skalar. a_i disebut koefisien dan b disebut konstanta, x_i disebut variabel dengan i = 1,2,...,n. Sekumpulan harga variabel katakanlah $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2, \ldots,$ $x_n = k_n$ ini disebut solusi atau jawab dari persamaan (2.1) apabila terpenuhi :

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n = b$$

Definisi 2.23

Sistem persamaan linier simultan adalah susunan m buah persamaan linier berbentuk :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \quad \ldots\ldots(2.2)$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

dapat dituliskan sebagai perkalian matriks :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau A X = B ....(2.3)

Theorema 2.3

Setiap sistem persamaan linier tidak memiliki jawab, memiliki satu jawab, atau memiliki banyak jawab.

Bukti :

Jika A X = B adalah sistem persamaan linier, salah satu berikut ini berlaku :

(a). Sistem tidak memilik jawab.

(b). Sistem memilik satu jawab.

(c). Sistem memiliki lebih dari satu jawab.

Bukti ini lengkap jika dapat diperlihatkan bahwa sistem memiliki banyak jawab seperti pada (c). Diasumsikan bahwa A X = B memiliki lebih dari satu jawab dan misalkan X_1 dan X_2 adalah dua buah jawab. Sehingga berlaku $A\ X_1 = B$ dan $A\ X_2 = B$ pengurangan kedua persamaan memberikan $AX_1 - AX_2 = 0$ atau $A\ (X_1 - X_2) = 0$. Jika dimisalkan $X_o = X_1 - X_2$ dan misalkan k sembarang skalar, maka :

$$
\begin{aligned}
A\ (X_1 + k\ X_o) &= A\ X_1 + A\ (k\ X_o) \\
&= A\ X_1 + k\ (A\ X_o) \\
&= B + k.0 \\
&= B + 0 \\
&= B
\end{aligned}
$$

Jadi $X_1 + k\ X_o$ adalah jawab dari $A\ X = B$, karena terdapat banyak pilihan untuk k maka $A\ X = B$ memiliki banyak jawab.

Untuk sifat (a) atau sistem persamaan linier $A\ X = B$ tidak memilik jawab, bila $r(A) < r(A,B)$. Bila $r(A) = r(A,B)$ sistem persamaan linier $A\ X = B$ akan memiliki minimal satu jawab. Sistem akan mempunyai jawab tunggal bila $r(A) = n$ dengan n adalah jumlah variabel atau jumlah persamaan pada $A\ X = B$. Untuk mengetahui banyaknya rank dapat dilakukan dengan mengubah matriks n x (n+1) sistem persamaan linier ke bentuk matriks eselon dengan melakukan operasi baris elementer. Banyak baris tidak nol adalah banyaknya rank.

Contoh 2.22

$$\begin{aligned} X + Y - Z &= 1 \\ 2X + 3Y + aZ &= 3 \\ X + aY + 3Z &= 2 \end{aligned}$$

Tentukan nilai a agar sistem :

(a). Tak mempunyai jawab.

(b). mempunyai lebih dari satu jawab.

(c). mempunyai jawab tunggal.

Sistem persamaan dalam bentuk matriks lengkap n x (n+1)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 4-(a-1)(a+2) & 1-(a-1) \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 & -a+2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & 2-a \end{array}\right]$$

Jika koefisien Z pada persamaan ketiga tidak nol, maka ada satu jawab. Jadi $a \neq 2$ dan $a \neq -3$.

Dalam hal a = 2 persamaan ketiga adalah 0 = 0 dan sistem mempunyai lebih dari satu jawab. Dalam hal a = -3 persamaan ketiga adalah 0 = 5 dan sistem tidak mempunyai jawab.

Theorema 2.4

Jika A matriks berordo n x n yang memiliki invers, maka untuk senbarang matriks B berordo n x 1 sistem persamaan A X = B memiliki satu jawab yaitu $X = A^{-1} B$.

Bukti :

Karena $A (A^{-1} B) = B$ maka $X = A^{-1} B$ adalah jawab dari A X = B. Untuk memperlihatkan bahwa ini satu-satunya jawab, diasumsikan X_o adalah jawab yang lain dan jika X_o jawab maka akan ditunjukan $X_o = A^{-1} B$. Karena X_o adalah jawab, maka $A X_o = B$. Mengalikan kedua sisi dengan A^{-1} diperoleh $X_o = A^{-1}B$, jadi $X_o = X$.

Berdasarkan theorema 2.4, maka untuk selanjutnya pembahasan hanya menyangkut sistem persamaan linier dengan matriks koefisien bujur sangkar dan memiliki invers ($D \neq 0$).