BAB III

STRUKTUR UMUM PERMAINAN STATISTIKA

3.1 Pendahuluan

Definisi 3.1.1 :

Permainan G dalam bentuk normal disajikan dengan tripel (X,Y,M), dimana X dan Y masing-masing adalah ruang strategi murni bagi P_1 dan P_2 dan M adalah fungsi pembayaran yang didefinisikan pada $X \times Y$ dari pasangan (x,y), $x \in X$, $y \in Y$.

Definisi 3.1.2 :

Permainan $G = (X,Y,M)$ disebut permainan berhingga jika X dan Y keduanya mempunyai elemen-elemen yang berhingga.

Definisi 3.1.3 :

Permainan $G_2 = (X_2,Y_2,M_2)$ adalah reduksi dari permainan $G_1 = (X_1,Y_1,M_1)$, ditulis $G_2 \; r \; G_1$ jika dipenuhi :

1) $X_2 = X_1$ dan terdapat fungsi $g : Y_1 \longrightarrow Y_2$ sedemikian sehingga $M_1(x,y) = M_2(x,g(y))$, untuk semua $x \in X_1$ dan $y \in Y_1$. Atau
2) $Y_2 = Y_1$ dan terdapat fungsi $f : X_1 \longrightarrow X_2$ sedemikian sehingga $M_1(x,y) = M_2(f(x),y)$, untuk semua $x \in X_1$ dan $y \in Y_1$.

Definisi 3.1.4 :

Permainan G dan G^* adalah ekivalen jika terdapat berhingga barisan permainan $G_o, G_1, \ldots, G_n$, dimana $G_o = G$ dan $G_n = G^*$, dan untuk $i = 1,2,\ldots,n$ berlaku G_{i-1} r G_i atau G_i r G_{i-1}.

Pandang permainan yang disajikan dalam bentuk tripel $G = (X,Y,M)$. Jika P_1 memilih $x_o \in X$ sebagai strateginya, maka ia akan mendapat taruhan paling sedikit $\Lambda_G(x_o) = \inf_{y\in Y} M(x_o,y)$, sehingga harga perolehan terkecil dari G adalah :

$$\lambda_G^* = \sup_{x\in X} \Lambda_G(x) = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} M(x,y).$$

Demikian juga jika P_2 memilih $y_o \in Y$ sebagai strateginya, maka ia akan membayar paling banyak $Y_G(y_o) = \sup_{x\in X} M(x,y_o)$, sehingga harga pembayaran terbesar dari G adalah :

$$\upsilon_G^* = \inf_{y\in Y} Y_G(y) = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} M(x,y).$$

Theorema 3.1.1 :

Jika $G = (X,Y,M)$ permainan, maka untuk setiap $x_o \in X$ dan $y_o \in Y$ berlaku : $\Lambda_G(x_o) \le Y_G(y_o)$ dan $\lambda_G^* \le \upsilon_G^*$

Bukti :

Untuk sebarang $x_o \in X$ dan $y_o \in Y$, berlaku :

* $\inf_{y\in Y} M(x_o,y) \le M(x_o,y_o) \le \sup_{x\in X} M(x,y_o)$

Jadi $\Lambda_G(x_o) \le Y_G(y_o)$

* $\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} M(x,y) \le \sup_{x\in X} M(x,y_o), \ \forall\, y_o \in Y$

$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} M(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} M(x,y)$

Jadi $\lambda_G \leq \upsilon_G$

Definisi 3.1.5 :

Pada permainan $G = (X,Y,M)$, jika $\lambda^*_G = \upsilon^*_G = \upsilon_G$, maka υ_G disebut harga permainan optimal dari G.

Definisi 3.1.6 :

Pada permainan $G = (X,Y,M)$, jika υ_G adalah harga permainan dari G maka strategi terbaik bagi P_1 adalah memilih $x_o \in X$ yang memenuhi $\Lambda_G(x_o) = \upsilon_G$, dan strategi terbaik bagi P_2 adalah memilih $y_o \in Y$ yang memenuhi $Y_G(y_o) = \upsilon_G$.

Dengan memandang ξ sebagai suatu distribusi kemungkinan (fungsi kemungkinan) yang didefinisikan atas X, maka berlaku definisi berikut :

Definisi 3.1.7 :

Distribusi kemungkinan (diskrit) ξ atas X adalah fungsi numerik non-negatif ξ yang didefinisikan pada X sedemikian sehingga $\xi(x) = \emptyset$ kecuali untuk sejumlah terbilang dari $x \in X$, dan $\sum_{x \in X} \xi(x) = 1$.

Definisi diatas juga berlaku bagi fungsi kemungkinan η yang didefinisikan atas Y.

Definisi 3.1.8 :

Pandang permainan $G = (X,Y,M)$. $\Gamma = (\Xi,H,M)$ adalah permainan dimana Ξ,H terdiri dari distribusi kemungkinan ξ, η yang masing-masing didefinisikan atas X dan Y, dan $M(\xi,\eta) = \sum_{x,y} M(x,y)\ \xi(x)\ \eta(y)$. Maka Γ disebut perluasan campuran dari permainan *G*.

Penggunaan simbol fungsi resiko M pada *G* dan Γ semata-mata hanya untuk menunjukkan bahwa Γ adalah perluasan campuran *G*.

Definisi 3.1.9 :

Jika $\Gamma = (\Xi, H, M)$ adalah perluasan campuran dari $G = (X,Y,M)$, maka $x \in X$, $y \in Y$ disebut strategi-strategi murni dari *G*, dan $\xi \in \Xi$, $\eta \in H$ disebut strategi-strategi campuran dari *G*.

Definisi 3.1.10 :

$G = (X,Y,M)$ adalah permainan dengan $\Gamma = (\Xi, H, M)$ sebagai perluasan campurannya. Jika Γ mempunyai harga permainan υ_Γ, maka harga permainan bagi *G* adalah $\upsilon = \upsilon_\Gamma$ dan strategi terbaik bagi Γ juga merupakan strategi terbaik bagi *G*.

Definisi 3.1.11 :

$G = (X,Y,M)$ adalah permainan dengan $\Gamma = (\Xi, H, M)$ sebagai perluasan campurannya. Jika terdapat $\xi_o \in \Xi$ sehingga $\Lambda_\Gamma(\xi_o) = \lambda^*_\Gamma$ maka ξ_o dikatakan sebagai strategi maksimin bagi P_1. Dan jika terdapat $\eta_o \in H$ sehingga $Y_\Gamma(\eta_o) = \upsilon^*_\Gamma$ maka η_o dikatakan sebagai strategi minimaks bagi P_2.

Jadi jika pada perluasan Γ mempunyai harga permainan optimal, maka ξ_o dan η_o masing-masing disebut sebagai strategi terbaik bagi P_1 dan P_2.

Contoh 3.1.1 :

Pada Matching Pennies dengan matriks permainan dari G adalah $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\Gamma = (\Xi, H, M)$ dimana $\xi = (\alpha, 1-\alpha) \in \Xi$ dan $\eta = (\beta, 1-\beta) \in H$, $0 \le \alpha, \beta \le 1$.

$$M(\xi,\eta) = \sum_x \sum_y M(x,y)\,\xi(x)\,\eta(y)$$
$$= \alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta) - \alpha(1-\beta) - \beta(1-\alpha)$$
$$= 1 - 2\alpha - 2\beta + 4\alpha\beta$$

maka :

$$\Lambda_\Gamma(\xi) = \min\,(M(\xi,1),\, M(\xi,2)) = \min\,(2\alpha - 1,\, 1 - 2\alpha)$$
$$\lambda^*_\Gamma = \Lambda_\Gamma(1/2) = 0$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$Y_\Gamma(\eta) = \text{maks}\,(2\beta - 1,\, 1 - 2\beta)$$
$$\upsilon^*_\Gamma = Y_\Gamma(1/2) = 0.$$

Jadi pada Matching Pennies mempunyai harga permainan 0, dengan masing-masing pemain mempunyai strategi terbaik, yakni memilih sisi muka dan sisi belakang yang masing-masing mempunyai probabilitas 1/2.

3.2 Harga Permainan

Theorema 3.2.1 :

Setiap permainan berhingga pasti mempunyai nilai

/ harga permainan dan masing-masing pemain sekurang-kurangnya mempunyai satu strategi campuran terbaik.

Untuk membuktikan theorema ini, maka sebelumnya akan sedikit dibahas mengenai hyperplane dan himpunan konveks sebagai berikut.

S_n adalah ruang berdimensi n yang terdiri dari vektor-vektor $\bar{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ dimana masing-masing s_i adalah bilangan riil.

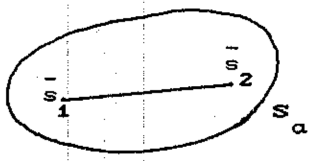
Jika $\bar{s}$ dan $\bar{t}$ adalah dua vektor sebarang pada S_n dengan $\bar{s} \neq \bar{t}$, dan sebarang bilangan λ, maka himpunan titik-titik yang berada pada $\lambda\bar{s} + (1-\lambda)\bar{t}$ disebut garis yang memuat $\bar{s}$ dan $\bar{t}$, dan jika dipenuhi $0 \leq \lambda \leq 1$ maka himpunan bagian dari garis ini akan merupakan garis segmen yang menghubungkan $\bar{s}$ dan $\bar{t}$.

Untuk sebarang vektor $\bar{u} \neq \bar{e}$ dimana $\bar{e}$ adalah vektor nol ($\bar{e} = (0,0,\ldots,0)$) dan untuk sebarang kontanta c, maka himpunan semua vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $\bar{u} \cdot \bar{x} = c$ disebut hyperplane.

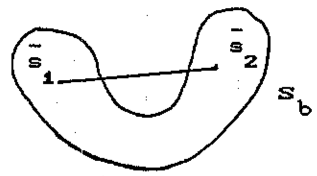
Jika himpunan S dan T serta hyperplane $\bar{u} \cdot \bar{x} = c$ pada S_n sedemikian sehingga $\bar{u} \cdot \bar{x} \geq c$ untuk $\bar{x} \in S$ dan $\bar{u} \cdot \bar{x} \leq c$ untuk $\bar{x} \in T$, maka hyperplane $\bar{u} \cdot \bar{x} = c$ dikatakan memisahkan (separate) S dan T.

Himpunan bagian S dari S_n ($S \subset S_n$) disebut konveks jika setiap dua titik sebarang $\bar{s}_1$ dan $\bar{s}_2$ dari S maka semua segmen garis yang menghubungkan

$\bar{s}_1$ dan $\bar{s}_2$ berada dalam S, yaitu $\lambda\bar{s}_1 + (1-\lambda)\bar{s}_2 \in S$, untuk $\emptyset \le \lambda \le 1$. Contoh dari himpunan konveks adalah garis, hyperplane, lingkaran, bola, dll.



S_a konveks



S_b tidak konveks

Untuk sebarang himpunan R, R^* adalah himpunan dari titik-titik $\bar{r}^*$ yang merupakan pusat berat dari himpunan berhingga titik-titik pada $R=(\bar{r}_1,\bar{r}_2,\ldots,\bar{r}_k)$ sehingga $\bar{r}^*$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\bar{r}^* = \lambda_1\bar{r}_1 + \lambda_2\bar{r}_2 + \ldots + \lambda_k\bar{r}_k$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \bar{r}_i \text{ , dimana}$$

$$\lambda_i \ge \emptyset,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \bar{r}_i \in R,\ i = 1,2,\ldots,k,\ k = 1,2\ldots$$

Jadi R^* adalah himpunan konveks yang memuat R. Lagi pula dengan memperhatikan :

$$\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i\bar{r}_i = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \right] + \lambda_{k+1}\bar{r}_{k+1} \text{ , } \quad \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \ne \emptyset$$

Kombinsasi linier ini menunjukkan bahwa untuk sebarang himpunan konveks yang memuat R pasti juga memuat R^*. Jadi R^* adalah himpunan konveks terkecil yang memuat R. R^* disebut konveks hull dari R. Sebagai contoh, konveks hull dari dua titik adalah penggal garis yang menghubungkan kedua titik tersebut, dan konveks hull dari lingkaran adalah lingkaran dan titik-titik interiornya.

Sekarang akan dibuktikan theorema 3.2.1 diatas.

Bukti :

Pandang G sebagai permainan berhingga sebarang. Dan $A = \| a_{ij} \|$ dengan $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$ sebagai matriks taruhan dari G.

Akan ditunjukkan bahwa $\Gamma = (\Xi, H, M)$ yang merupakan perluasan campuran dari G akan mempunyai harga permainan optimal, dan masing-masing pemain mempunyai strategi terbaik pada Γ. Ξ terdiri dari $\bar{\xi} = (\xi(1), \xi(2),\dots,\xi(m))$ pada S_m yang memenuhi $\xi(i) \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^{m} \xi(i) = 1$. Sedangkan H terdiri dari $\bar{\eta} = (\eta(1), \eta(2),\dots,\eta(n))$ pada S_n yang memenuhi $\eta(j) \geq 0$ dan $\sum_{j=1}^{n} \eta(j) = 1$. Dan $M(\bar{\xi},\bar{\eta}) = \sum_{\bar{i},\bar{j}} a_{ij}\, \xi(i)\eta(j)$.

Ambil S^* sebagai konveks hull dari n titik $\bar{c}_1, \bar{c}_2,\dots,\bar{c}_n$ pada S_m yang merupakan koordinat kolom dari matriks A, jadi $\bar{c}_j = (a_{1j}, a_{2j},\dots,a_{mj})$.

(1) $M(\bar{\xi},\bar{\eta}) = \sum_i \sum_j \xi(i)\, \eta(j)\, a_{ij}$

$= \sum_i \xi(1) (\sum_j \eta(j)\, a_{ij})$

$$= \xi(1)\,[\eta(1)\,a_{11} + \eta(2)\,a_{12} + \ldots + \eta(n)\,a_{1n}] \; +$$

$$\xi(2)\,[\eta(1)\,a_{21} + \eta(2)\,a_{22} + \ldots + \eta(n)\,a_{2n}] \; +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; +$$

$$\xi(m)\,[\eta(1)\,a_{m1} + \eta(2)\,a_{m2} + \ldots + \eta(n)\,a_{mn}]$$

$$= (\xi(1)\;\xi(2)\ldots\xi(m)) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(1) \\ \eta(2) \\ \ldots \\ \eta(n) \end{bmatrix}$$

$$= (\xi(1)\;\xi(2)\ldots\xi(m))\,[\;\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \;\ldots\; \bar{c}_n\;] \begin{bmatrix} \eta(1) \\ \eta(2) \\ \ldots \\ \eta(n) \end{bmatrix}$$

$$= \bar{\xi} \cdot \sum_{i=1}^{n} \eta(j)\,\bar{c}_j = \bar{\xi}\cdot\bar{s}$$

Karena $\bar{s} = \sum_{i=1}^{n} \eta(j)\,\bar{c}_j \in S^*$ dan $\bar{\eta} \in H$, maka dapat dinyatakan bahwa Γ ekivalen dengan $\Gamma_1 = (\Xi, S^*, M_1)$ dimana $M_1(\bar{\xi},\bar{s}) = \bar{\xi}\cdot\bar{s}$.

Untuk menunjukkan bahwa Γ_1 mempunyai harga permainan optimal, maka sebagaimana definisi 3.1.3 haruslah dicapai $\lambda^*_{\Gamma_1} = \upsilon^*_{\Gamma_1} = \upsilon_{\Gamma_1}$ sebagai harga permainan optimal. Berdasarkan theorema 3.1.1 didapat $\lambda^*_{\Gamma_1} \leq \upsilon^*_{\Gamma_1}$, sehingga tinggal membuktikan bahwa :

(2) $\upsilon^*_{\Gamma_1} \leq \lambda^*_{\Gamma_1}$

Telah didapat :

(3) $Y_{\Gamma_1}(\bar{s}) = \underset{\bar{\xi}\in\Xi}{\text{maks}}\,(\bar{\xi}\cdot\bar{s}) = \text{maks}\,(s_1, s_2, \ldots, s_m)$

(4) $\upsilon^*_{\Gamma_1} = \min_{\bar{s}\in S^*} Y_{\Gamma_1}(\bar{s}) = Y_{\Gamma_1}(\bar{s}_o)$, dimana $\bar{s}_o \in S^*$.

Untuk menunjukkan (2), cukup dengan mendapatkan suatu $\bar{\xi}_o \in \Xi$ sedemikian sehingga untuk semua $\bar{s} \in S^*$ berlaku :

(5) $\upsilon^*_{\Gamma_1} = \bar{\xi}_o \cdot \bar{s}$

Dari sini akan didapatkan bukti bahwa :

$\upsilon^*_{\Gamma_1} \le \inf_{\bar{s}} \bar{\xi}_o \cdot \bar{s} = \Lambda_{\Gamma_1}(\xi_o) \le \lambda^*_{\Gamma_1}$

Ambil T yang terdiri dari semua titik-titik $\bar{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in S_m$, dimana $t_i < \upsilon^*_{\Gamma_1}$ untuk $i = 1,2,\ldots,m$. Dan T adalah himpunan konveks yang tidak berinterseksi dengan S^*. Berdasarkan (3) dan (4), untuk sebarang titik $\bar{s} \in S^*$ mempunyai paling sedikit satu koordinat yang lebih besar dari $\upsilon^*_{\Gamma_1}$.

Sebuah theorema mengenai hyperplane memberi kesimpulan bahwa "Jika S dan T keduanya himpunan konveks yang tidak memiliki titik persekutuan, maka akan mempunyai hyperplane pemisah".

Berdasarkan kesimpulan tersebut, maka akan terdapat hyperplane $\bar{a}\cdot\bar{x} = c$ yang memisahkan S^* dan $\tilde{T}$ dan memenuhi $\bar{a}\cdot\bar{x} \ge c$ untuk $\bar{x} \in S^*$ dan $\bar{a}\cdot\bar{x} \le c$ untuk $\bar{x} \in \tilde{T}$, dimana $\tilde{T}$ adalah penutup *(closure)* dari T.

Ambil $\bar{\delta}_i \in S_m$, dimana koordinat ke-i adalah 1 dan koordinat lainnya Ø. Untuk semua $\bar{s}_o$, $\bar{s}_o - \bar{\delta}_i \in \tilde{T}$ berlaku : $\bar{a}\cdot\bar{s}_o = c \ge \bar{a}\cdot(\bar{s}_o - \bar{\delta}_i) = \bar{a}\cdot\bar{s}_o - \bar{a}\cdot\bar{\delta}_i$

$$\emptyset \geq - \bar{a}.\bar{\delta}_i$$

Jadi $\bar{a}.\bar{\delta}_i \geq \emptyset$, sehingga $a_i \geq \emptyset$ untuk $i = 1,2,\ldots,m$.

Ambil $\bar{\xi}_o = \bar{a} \Big/ \sum_{i=1}^{m} a_i$ dan $\upsilon = c \Big/ \sum_{i=1}^{m} a_i$

Karena $a_i \geq \emptyset$ maka $\xi_o(i) \geq \emptyset$ dan $\sum_{i=1}^{m} \xi_o(i) = 1$, sehingga $\bar{\xi}_o \in \Xi$, dan

(6) $\bar{\xi}_o.\bar{s} \geq \upsilon$, untuk $\bar{s} \in S$ dan $\bar{\xi}_o.\bar{t} \leq \upsilon$, untuk $\bar{t} \in \tilde{T}$.

Dipilih titik $\bar{t}^* = (\upsilon^*_{\Gamma_1}, \upsilon^*_{\Gamma_1}, \ldots, \upsilon^*_{\Gamma_1}) \in \tilde{T}$ sehingga,

(7) $\bar{\xi}_o.\bar{t} = \upsilon^*_{\Gamma_1} \leq \upsilon$

Jadi berdasarkan (6) dan (7) dapat disimpulkan bahwa, untuk $\forall\, \bar{s} \in S$ berlaku :

$\bar{\xi}_o.\bar{s} \geq \upsilon \geq \upsilon^*_{\Gamma_1}$ sebagaimana (5).

Dengan demikian didapat $\lambda^*_{\Gamma_1} \leq \upsilon^*_{\Gamma_1}$ dan $\upsilon^*_{\Gamma_1} \leq \lambda^*_{\Gamma_1}$ sehingga $\lambda^*_{\Gamma_1} = \upsilon^*_{\Gamma_1} = \upsilon_{\Gamma_1}$ adalah harga dari permainan *G*, $\bar{\xi}_o$ dan $\bar{s}_o$ masing-masing sebagai strategi (campuran) bagi P_1 dan P_2. Bukti selesai.

3.3 Ruang Sampel Pada Permainan Statistika

Ruang sampel menggambarkan semua hasil yang mungkin dari suatu pecobaan yang dilakukan oleh statistikawan.

Z Sebagai ruang hasil dari suatu percobaan dengan tidak selamanya bermaksud sama dengan ruang hasil R_x sebagaimana uraian 2.2.2, dihubungkan dengan sebuah ruang parameter Ω dengan anggota ω, dan sebuah fungsi p yang didefinisikan pada $Z \times \Omega$, sehingga untuk ω tertentu didapat p_ω sebagai distribusi kemungkinan pada Z, yaitu p_ω adalah fungsi non-negatif yang didefinisikan pada Z dimana $p_\omega(z) = \emptyset$ kecuali pada himpunan terbilang *(countable set)*, dan $\sum_{z \in Z} p_\omega(z) = 1$, sebagaimana definisi 3.1.7.

Definisi 3.3.1 :

Pandang Z dan Ω sebagai dua himpunan yang tidak kosong, dan p sebagai fungsi yang didefinisikan pada $Z \times \Omega$ sedemikian sehingga untuk $\omega \in \Omega$ tertentu, p_ω adalah distribusi kemungkinan pada Z, maka tripel $\mathcal{Z} = (Z,\Omega,p)$ disebut ruang sampel.

Definisi diatas lebih jelas memberi pengertian mengenai ruang sampel. Dan kejadian S sebagai suatu himpunan dalam ruang sampel pada kenyataannya merupakan himpunan bagian dari Z.

Untuk sebarang $\omega \in \Omega$ dan sebarang $S \subset Z$, nilai kemungkinan untuk kejadian S adalah :

$$P_\omega(S) = \sum_{z \in S} p_\omega(z)$$

Pada permainan statistika, $\omega \in \Omega$ merupakan unsur penyusun strategi murni bagi alam, oleh karenanya ruang Ω akan berkorespondensi dengan X pada permainan yang disajikan dalam bentuk normal $G = (X,Y,M)$.

Untuk sebarang $\omega \in \Omega$, harga dari fungsi p_ω dinotasikan dengan $p_\omega(z) = p(z \mid \omega)$, dan $\mathcal{P}_\Omega = \{p_\omega : \omega \in \Omega\}$.

Untuk setiap $S \subset Z$ dan setiap $\omega \in \Omega$, berlaku:

a) $0 \le P_\omega(S) \le 1$

b) Jika $S \subset T$, maka $P_\omega(S) \le P_\omega(T)$

c) $P_\omega(S) + P_\omega(C(S)) = 1$, dimana $C(S)$ komplemen S.

d) $P_\omega(S \cup T) \le P_\omega(S) + P_\omega(T)$, jika S dan T saling lepas , maka $P_\omega(S \cup T) = P_\omega(S) + P_\omega(T)$.

3.4 Variabel Random Pada Permainan Statistika

Dikarenakan pertimbangan biaya, waktu dan sebab lain, seorang peneliti seringkali tidak mengamati elemen-elemen pada Z secara langsung, akan tetapi ia lebih suka mengamati sebagai suatu fungsi berharga vektor yang didefinisikan pada Z.

Sebagai contoh, pada percobaan pelemparan mata uang, statistikawan mungkin tidak mengamati hasil pelemparan yang sebenarnya yang berupa barisan "muka" dan "belakang", akan tetapi ia mengamati fungsi f, dimana $f(z)$ menunjukkan banyaknya "muka" yang muncul. Atau ia mengamati fungsi g, dimana $g(z)$ menunjukkan banyaknya run pada barisan hasil percobaan.

Contoh lain, pada percobaan pencatatan temperatur. Mungkin statistikawan tidak menggunakan hasil $z(t)$ yang menunjukkan keadaan temperatur pada saat t, akan tetapi ia memakai fungsi h, dimana

$$h(z) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} z(t)\, dt$$

yang menunjukkan temperatur pada interval (t_1, t_2).

Fungsi-fungsi f, g dan h pada contoh diatas disebut variabel random.

Definisi 3.4.1 :

Pandang $\mathcal{Z} = (Z,\Omega,p)$ sebagai ruang sampel. Maka suatu fungsi yang didefinisikan pada Z disebut variabel random.

f adalah variabel random. f membangun suatu ruang sampel baru $\mathcal{X} = (X,\Omega,q)$, dimana X adalah daerah hasil dari f, dan q_ω adalah distribusi kemungkinan dari f yang disebabkan oleh p_ω. (Kelas distribusi kemungkinan dari q_ω untuk setiap $\omega \in \Omega$ dinotasikan dengan Q_Ω). Maka dapat dilihat bahwa pemilihan variabel random f adalah ekivalen dengan pemilihan ruang sampel $\mathcal{X}$, hingga akhirnya ekivalen untuk pemilihan dari suatu percobaan yang hasilnya merupakan elemen-elemen pada X.

Definisi 3.4.2 :

Pandang $\mathcal{Z} = (Z,\Omega,p)$ sebagai ruang sampel. f adalah variabel random berharga vektor yang didefinisikan pada Z. Untuk $\forall\ \omega \in \Omega$, jika deret $\sum_{z \in Z} |f(z)|\ p_\omega(z)$ konvergen, maka $E_\omega(f) = \sum_{z \in Z} f(z)\ p_\omega(z)$ disebut ekspektasi (pengharapan) dari f yang diberikan oleh ω, dan $|f(z)| = \sqrt{f_1^2(z) + f_2^2(z) + \ldots + f_k^2(z)}$. $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_k(z)$ adalah komponen dari vektor $f(z)$.

Theorema 3.4.1 :

Pandang $\mathcal{Z} = (Z, \Omega, p)$ sebagai ruang sampel. f adalah variabel random yang didefinisikan pada Z, dan φ adalah fungsi berharga vektor dengan daerah asal definisi *(domain)* merupakan daerah hasil *(range)* B dari f. Maka untuk setiap $\omega \in \Omega$ berlaku :

$$E_\omega(\varphi \circ f) = \sum_{b \in B} \varphi(b)\ q_\omega(b)$$

dimana q_ω adalah distribusi kemungkinan dari f yang diberikan oleh ω

Bukti :

$$\begin{aligned} E_\omega(\varphi \circ f) &= \sum_{z \in Z} \varphi(f(z))\ p_\omega(z) \\ &= \sum_{b \in B} \varphi(b) \sum_{\{z : f(z) = b\}} p_\omega(z) \\ &= \sum_{b \in B} \varphi(b)\ q_\omega(b) \end{aligned}$$

Theorema ini menunjukkan bahwa sebarang fungsi dari harga-harga yang dihasilkan oleh f dapat dihitung ekspektasinya. Jika φ merupakan fungsi karakteristik dari himpunan $S \subset X$, maka dimaksudkan

$\varphi(f(z)) = 1$ jika $f(z) \in S$ dan $\varphi(fz)) = \emptyset$ jika $f(z) \notin S$.