BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 Teori Permainan

2.1.1 Pendahuluan

Nyata sekali bahwa teori permainan selalu berurusan dengan proses pengambilan keputusan dibawah suatu konflik. Tujuan dari teori ini adalah memberikan bekal strategi yang baik bagi seorang pemain sedemikian sehingga ia akan mendapatkan peluang yang cukup untuk memaksimalkan keuntungan dan atau meminimalkan kerugian.

Ada empat hal yang perlu diperhatikan dalam suatu permainan, yakni banyaknya pemain, jumlah aljabar semua hasil atau taruhan (pay off), banyaknya strategi dan banyaknya langkah yang ada.

Berdasarkan banyaknya pemain, suatu permainan bisa terdiri dari n orang dengan n = (1,2,...), sehingga untuk permainan yang terdiri dari 2 orang biasa disebut sebagai permainan dua orang.

Berdasarkan jumlah taruhan atau pay off, permainan bisa terdiri dari permainan dengan jumlah taruhan nol dan permainan dengan jumlah taruhan tidak nol. Permainan dengan jumlah taruhan nol biasa disebut dengan *zero sum game*, yakni permainan dimana kemenangan dari pemenang persis sama dengan kekalahan dari yang kalah.

Berdasarkan banyaknya strategi, permainan bisa berupa permainan dengan banyaknya strategi berhingga dan permainan dengan banyaknya strategi tak hingga.

Sedangkan berdasarkan banyaknya langkah, permainan terdiri dari permainan 1 langkah atau permainan n langkah dengan $n > 1$.

2.1.2 Permainan 2 Orang Dengan Jumlah Taruhan Nol

Dalam permainan 2 orang, pemain I (P_1) mempunyai m strategi dan pemain II (P_2) mempunyai n strategi. Kita pergunakan persegi panjang yang terdiri dari m baris dan n kolom dengan m bilangan bulat positif ($i = 1,2,...,m$) dan n bilangan bulat positif ($j = 1,2,...,n$). Pada titik yang merupakan interseksi dari baris ke-i dan kolom ke-j kita tulis a_{ij}.

Nilai a_{ij} adalah elemen matriks yang menyatakan besarnya taruhan yang dibayarkan oleh P_2 ke P_1. Seluruh elemen a_{ij} membentuk apa yang disebut sebagai matriks taruhan dalam permainan yang juga biasa disebut sebagai permainan persegi panjang. Perhatikan ilustrasi berikut :

$$
\begin{array}{cc|cccccc}
 & & & & Y & & & \\
 & P_1 \diagdown P_2 & y_1 & y_2 & \cdots & y_j & \cdots & y_n \\
\hline
 & x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
 & x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
X & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & x_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & x_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{array}
$$

Pada permainan 2 orang dengan jumlah taruhan nol, apabila strategi telah diambil oleh masing-masing pemain maka jika P_1 mendapatkan taruhan sebesar a_1 maka P_2 akan mendapat taruhan sebesar a_2 sehingga $a_1 + a_2 = 0$.

Strategi Optimal bagi P_1 adalah memilih langkah ke-i $(i = 1,2,\ldots,m)$ agar mendapatkan taruhan yang semaksimal mungkin. Dan strategi optimal bagi P_2 didapat dengan memilih langkah ke-j $(j = 1,2,\ldots,n)$ yang meminimalkan kerugian.

Dalam menentukan strategi optimal, masing-masing pemain dapat mengunakan strategi murni atau strategi campuran bergantung pada ada tidaknya titik pelana pada matriks taruhannya. (Pembahasan mengenai titik pelana akan diuraikan pada sub sub-bab berikutnya).

Bila "X" menyatakan perkalian kartesius dari $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ sehingga

$X \times Y = \{x_1y_1,\ldots,x_1y_n,\ldots,x_my_1,\ldots,x_my_n\}$, maka permainan 2 orang dengan jumlah taruhan nol dapat dinotasikan dengan tripel $G = (X,Y,M)$, dimana X dan Y masing-masing adalah ruang strategi bagi P_1 dan P_2. Dan M adalah fungsi resiko yang didefinisikan pada $X \times Y$ dari pasangan (x,y), dimana $x \in X$, $y \in Y$.. Dengan kata lain $X \times Y$ menyatakan pembayaran dari P_2 ke P_1.

2.1.3 Strategi Murni Optimal

Tujuan utama menyelesaikan permainan adalah menentukan strategi optimal. Dengan memandang bilangan bulat positif $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$ masing-masing sebagai strategi murni bagi P_1 dan P_2 pada permainan persegi panjang dengan matriks taruhan berukuran $m \times n$ sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

maka, bila P_1 memilih baris ke-1 ia akan mendapat taruhan paling sedikit minimum dari elemen-elemen yang berada pada baris ke-1, yaitu :

$$\min_j \; a_{1j} \qquad\qquad j = 1,2,\ldots,n$$

Apabila P_1 memilih baris ke-i $(i = 1,2,\ldots,m)$ maka P_1 akan mendapat taruhan paling sedikit minimum dari elemen-elemen pada baris ke-i. Jadi didapat :

$$\min_{j} a_{ij} \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

Strategi optimal bagi P_1 adalah menentukan i ($i = 1,2,\ldots,m$) yang memaksimalkan perolehan. Jadi P_1 berharap mendapat taruhan paling sedikit :

$$\text{maks}_{i} \min_{j} a_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,m \\ j = 1,2,\ldots,n \end{array}$$

P_1 dikatakan melaksanakan kriteria maksimum dari minimum dan disingkat dengan kriteria maksimin.

Sebaliknya P_2 akan menjalankan kriteria minimum dari maksimum (minimaks) sebagai jalan untuk meminimalkan derita (kerugian).

Apabila P_2 memilih kolom pertama (strategi murni 1) pada permainan persegi panjang diatas, maka ia akan menderita kerugian paling banyak maksimum dari elemen-elemen yang berada pada kolom 1. Jadi kerugian bagi P_2 :

$$\text{maks}_{i} \; a_{i1} \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

Bila P_2 memilih kolom ke-j ($j = 1,2,\ldots,n$) maka P_2 akan menderita kerugian paling banyak maksimum dari elemen-elemen kolom ke-j. Jadi kerugian bagi P_2 :

$$\text{maks}_{i} \; a_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

Strategi Optimal bagi P_2 adalah memilih j ($j = 1,2,\ldots,n$) sehingga kerugian yang diderita seminimal mungkin. Jadi P_2 berharap menderita kerugian paling banyak :

$$\min_j \max_i a_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots,m \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Karena cara minimaks selalu mengambil harga (perolehan) maksimum, sedangkan cara maksimin selalu mengambil harga minimum maka harga minimaks akan selalu lebih besar atau sama dengan harga maksimin, jadi :

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots,m \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Apabila dicapai $\max_i \min_j a_{ij} = V = \min_j \max_i a_{ij}$, maka V sebagai harga sekutu disebut sebagai titik pelana *(saddle point)*. Permainan ini berakhir dengan masing-masing pemain mempunyai strategi murni yang optimal. Harga dari permainan ini adalah V, yang berarti P_1 akan memperoleh taruhan sebesar V dan P_2 akan memperoleh taruhan sebesar -V (kerugian sebesar V).

Contoh 2.1.3.1 :

Misal kita mempunyai matriks taruhan dari permainan dua orang X dan Y dengan tabel perolehan untuk X sebagai berikut :

$$\begin{array}{cc|cccc} & & & Y & & \\ & & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline & x_1 & -5 & 3 & 1 & 20 \\ X & x_2 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ & x_3 & -4 & -2 & 0 & -5 \end{array}$$

X mempunyai 3 strategi yang tersedia dan Y mempunyai 4 strategi yang tersedia, maka untuk i = 1,2,3 dan j

= 1,2,3,4 diperoleh :

$$\left.\begin{array}{l} \underset{y_j}{\text{min}} \ (x_1,y_j) = -5 \\ \underset{y_j}{\text{min}} \ (x_2,y_j) = \ \ 4 \\ \underset{y_j}{\text{min}} \ (x_3,y_j) = -5 \end{array}\right\} \ \underset{x_i}{\text{maks}} \ \underset{y_j}{\text{min}} \ (x_i,y_j) = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x_i}{\text{maks}} \ (x_i,y_1) = \ \ 5 \\ \underset{x_i}{\text{maks}} \ (x_i,y_2) = \ \ 5 \\ \underset{x_i}{\text{maks}} \ (x_i,y_3) = \ \ 4 \\ \underset{x_i}{\text{maks}} \ (x_i,y_4) = 20 \end{array}\right\} \ \underset{y_j}{\text{min}} \ \underset{x_i}{\text{maks}} \ (x_i,y_j) = 4$$

Dari penjabaran diatas dapat ditarik kesimpulan bahwa X akan menjadikan x_2 sebagai strategi murni optimal baginya dan Y akan memilih y_3 sebagai strategi opitmalnya, dan keduanya tidak akan mundur dari situ.

Karena $\underset{x_i}{\text{maks}} \ \underset{y_j}{\text{min}} \ (x_i,y_j) = 4 = \underset{y_j}{\text{min}} \ \underset{x_i}{\text{maks}} \ (x_i,y_j)$ maka permainan ini mempunyai titik pelana 4. Harga permainan V = 4, yang berarti Y akan memberikan taruhan sebesar 4 kepada X diperoleh melalui strategi (x_2,y_3).

2.1.4 Strategi Campuran Optimal

Apabila dalam permainan persegi panjang tidak didapati titik pelana, maka strategi optimal akan ditentukan dengan menggunakan strategi campuran. Perhatikan permainan persegi panjang dengan matriks taruhan berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bilangan-bilangan bulat positif i = 1,2,...,m dan j = 1,2,...,n masing-masing adalah strategi murni bagi P_1 dan P_2.

Misal p_i adalah peluang untuk memilih strategi pada baris ke-i. dan

q_j adalah peluang untuk memilih strategi pada baris ke-j,

maka :

- Strategi campuran untuk P_1 adalah m tupel X = $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ dimana untuk strategi x_i mempunyai peluang p_i, $p_i \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.
- Strategi campuran untuk P_2 adalah n tupel Y = $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ dimana untuk strategi y_j mempunyai peluang q_j, $q_j \geq 0$ dan $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Himpunan pasangan strategi-strategi tersebut secarasimbol dinyatakan sebagai :

$$S_m = \{ (x_1,x_2,\ldots,x_m) \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \}$$

$$S_n = \{ (y_1,y_2,\ldots,y_n) \mid q_j \geq 0, \sum_{i=j}^{n} q_j = 1 \}$$

Dalam permainan ini tiap pemain juga menentukan strateginya masing-masing untuk menyelesaikan permainan (didapatnya harga permainan yang optimal).

Strategi murni yang diterapkan P_1 pada permainan persegi panjang (dengan titik pelana) juga dapat dipandang sebagai penerapan strategi campuran $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ dengan $p_k = 1$ dan $p_i = 0$ untuk $i \neq k$.

Bila pada matriks taruhan diatas, P_1 memilih baris ke-1 dengan peluang p_1, baris ke-2 dengan peluang p_2 dan seterusnya hingga baris ke-m dengan peluang p_m, maka harapan perolehan bagi P_1 jika P_2 memilih :

kolom ke-1 : $a_{11}\ x_1 + a_{21}\ x_2 + \ldots + a_{m1}\ x_m$

kolom ke-2 : $a_{12}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{m2}\ x_m$

$\vdots$

kolom ke-n : $a_{1n}\ x_1 + a_{2n}\ x_2 + \ldots + a_{mn}\ x_m$

Akan tetapi jika P_1 memilih baris ke-1 dengan peluang p_1, baris ke-2 dengan peluang p_2 dan seterusnya hingga baris ke-m dengan peluang p_m, dan P_2 secara sekaligus memilih kolom ke-1 dengan peluang q_1, kolom ke-2 dengan peluang q_2 hingga kolom ke-n dengan peluang q_n maka ekspektasi bagi P_1 adalah :

$$\begin{aligned} E(X,Y) = \; & a_{11}\ x_1y_1 + a_{21}\ x_2y_1 + \ldots + a_{m1}\ x_my_1 \\ & + a_{12}\ x_1y_2 + a_{22}\ x_2y_2 + \ldots + a_{m2}\ x_my_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{1n}\ x_1y_n + a_{2n}\ x_2y_n + \ldots + a_{mn}\ x_my_n \end{aligned}$$

Jadi secara umum apabila P_1 menggunakan strategi campuran $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dan P_2 menggunakan strategi campuran $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ maka ekspektasi matematik dari P_1 diberikan oleh :

$$E(X,Y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ x_i\ y_j$$

Apabila untuk $X^* \subset S_m$ dan $Y^* \subset S_n$ berlaku :

$$E(X,Y^*) \leq E(X^*,Y^*) \leq E(X^*,Y)$$

maka dikatakan :

X^* : strategi campuran optimal bagi P_1

Y^* : strategi campuran optimal bagi P_2

$E(X^*,Y^*)$: harga permainan (perolehan bagi P_1)

(X^*,Y^*) : solusi permainan (strategi titik pelana)

Dengan menggunakan X^* sebagai strateginya P_1 berharap memperoleh taruhan paling sedikit $E(X^*,Y^*)$ tanpa memperhatikan apa yang dilakukan oleh P_2. Dan P_2 menggunakan strategi Y^* dengan harapan mendapat taruhan sebanyak $-E(X^*,Y^*)$ (derita sebesar $E(X^*,Y^*)$).

Contoh 2.1.4.1 :

Permainan 2 × 2 dengan tabel perolehan untuk P_1 sebagai berikut :

$$\begin{array}{cc|cc} & & \multicolumn{2}{c}{P_2} \\ & & y_1 & y_2 \\ \hline P_1 & x_1 & 1 & 3 \\ & x_2 & 7 & -5 \end{array}$$

Pada permainan ini jika digunakan strategi murni yang maksimin dan minimaks maka tidak akan ditemukan titik pelana sehingga strategi optimal tidak akan didapat.

P_1 menggunakan strategi campuran $X = (x_1, x_2)$ maka harapan perolehan bagi P_1 jika :

P_2 memilih y_1 : $f_1 = x_1 + 7x_2$ ....(1)

P_2 memilih y_2 : $f_2 = 3x_1 - 5x_2$ ....(2)

Karena strategi P_1 tidak bergantung pada strategi P_2, maka pers.(1) sama dengan pers.(2) $(f_1 = f_2)$.

Jadi dengan mengingat $x_2 = 1 - x_1$ didapat :

$$x_1 + 7(1-x_1) = 3x_1 - 5(1-x_1)$$

$$x_1 + 7 - 7x_1 = 3x_1 - 5 + 5x_1$$

$$-14x_1 = -12$$

$$x_1 = 6/7$$

$$x_2 = 1/7$$

Jadi strategi optimal untuk P_1 adalah $X^* = (6/7, 1/7)$. Dengan cara yang sama akan didapat strategi optimal untuk P_2, yakni $Y^* = (4/7, 3/7)$. Sedangkan harga permainan (perolehan bagi P_1) adalah :

$$E(X^*, Y^*) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i\, y_j$$

$$= 1 \cdot 6/7 \cdot 4/7 + 3 \cdot 6/7 \cdot 3/7 + 7 \cdot 1/7 \cdot 4/7 - 5 \cdot 1/7 \cdot 3/7$$

= 91/49

= 1 6/7

2.2 Statistika Pengantar

2.2.1 Ruang Sampel

Definisi 2.2.1.1

Kumpulan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan statistika disebut ruang sampel.

Ruang sampel yang biasanya dinotasikan dengan huruf S, identik dengan populasi dalam penelitian statistika. Tiap hasil dalam ruang sampel disebut anggota ruang sampel atau titik sampel.

Pada percobaan pelemparan 2 mata uang secara sekaligus akan didapat ruang sampel dengan $2^2 = 4$ titik sampel, yakni $S = \{ (m,m),(m,b),(b,m),(b,b) \}$. Dengan cara yang sama, untuk pelemparan n mata uang secara sekaligus didapat 2^n titik sampel dan pada pelemparan n buah dadu akan didapat 6^n titik sampel. Pada percobaan-percobaan tersebut, ruang sampel terdiri dari m hal (m titik sampel) yang berkemungkinan sama, dengan nilai kemungkinan $\frac{1}{m}$ pada tiap-tiap titik sampel.

Terdapat juga percobaan yang menghasilkan titik-titik sampel yang tidak berkemungkinan sama, akan tetapi jumlah nilai kemungkinan dari semua titik sampelnya tetap harus sama dengan 1.

Contoh 2.2.1.1 :

Suatu kotak berisikan 6 bola putih dan 4 bola hitam, jika secara acak diambil 4 bola dari kotak tersebut, maka akan didapat ruang sampel dengan 5 titik sampel yang tidak berkemungkinan sama dan masing masing dengan nilai kemungkinan sebagai berikut :

- semua putih; $\binom{6}{4} \Big/ \binom{10}{4}$
- semua hitam; $\binom{4}{4} \Big/ \binom{10}{4}$
- 1 putih 3 hitam; $\binom{6}{1}\binom{4}{3} \Big/ \binom{10}{4}$
- 2 putih 2 hitam; $\binom{6}{2}\binom{4}{2} \Big/ \binom{10}{4}$
- 3 putih 1 hitam; $\binom{6}{3}\binom{4}{1} \Big/ \binom{10}{4}$

Jika ruang sampel dipandang sebagai himpunan semesta, maka kejadian (event) merupakan himpunan bagian (subset) dari ruang sampel.

Pada contoh diatas, kejadian pengambilan 4 bola dengan warna sama adalah A = { (semua putih), (semua hitam) } dengan nilai kemungkinan $\binom{6}{4} \Big/ \binom{10}{4}$ + $\binom{4}{4} \Big/ \binom{10}{4}$.

Jika A dan B adalah dua kejadian sebarang, maka berlaku; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Pada dua kejadian yang saling lepas (disjoint), $A \cap B \neq \emptyset$, sehingga $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dan secara umum $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Jika $A_1, A_2, \dots, A_n$ merupakan sekatan ruang sampel S (kejadian saling lepas dan lengkap) maka : $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(S) = 1$. Sehingga jika C(A) merupakan komplemen dari kejadian A, maka P(C(A)) = 1- P(A).

2.2.2 Variabel Random

Suatu percobaan pelemparan 3 mata uang secara berturut-turut, didapat ruang sampel S = {(m,m,m),(m,m,b),(m,b,m),(b,m,m),(m,b,b),(b,m,b),(b, b,m),(b,b,b)}. Jika hendak diketahui banyaknya muka (m) yang terjadi pada tiap-tiap titik sampel, maka secara berturut-turut didapat harga yang bernilai riil 3,2,2,2,1,1,1 dan 0. Bilangan-bilangan tersebut dapat dipandang sebagai nilai yang diperoleh oleh suatu perubah random X, yang dalam hal ini menyatakan banyaknya "muka" yang muncul.

Definisi 2.2.2.1 :

Suatu percobaan E dengan ruang sampel S. Fungsi X yang memberikan pada setiap $s \in S$ suatu bilangan riil disebut variabel random.

Jadi pada percobaan di atas didapat X(m,m,m) = 3, X(m,m,b) = 2, X(b,b,m) = 1,...,X(b,b,b) = 0. R_x = (0,1,2,3) disebut ruang hasil.

Jika nilai yang mungkin dari variabel random

X (ruang hasil R_x) berhingga atau tak hingga tetapi terbilang ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ atau $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots; x_i \in R$) maka X disebut variabel random diskrit.

Jadi variabel random pada percobaan diatas merupakan variabel random diskrit karena mempunyai R_x yang berhingga (0,1,2,3).

Jika ruang hasil dari X mempunyai nilai yang tak hingga dan tak terbilang maka X disebut variabel random kontinu.

2.2.3 Distribusi Kemungkinan

Percobaan pada 2.2.2 diatas mempunyai nilai kemungkinan $\frac{1}{8}$ pada setiap titik sampel s. Dan harga dari kemungkinan P(X=x) dengan x = 0,1,2,3 dapat digambarkan :

x	0	1	2	3
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

Terlihat bahwa untuk semua nilai x yang mungkin, didapat jumlah nilai kemungkinan sama dengan 1.

Definisi 2.2.3.1 :

Himpunan dengan elemen pasangan bilangan (x_i,P(X = x_i)), i = 1,2,...,n disebut distribusi kemungkinan atau disingkat distribusi X.

Seringkali peluang suatu variabel random X dinyatakan dalam bentuk fungsi nilai numerik x, yakni f(x). Jadi f(x) = P(X = x). f(x) ini juga disebut "fungsi kemungkinan", yakni distribusi dari variabel random diskret X. Sehingga untuk semua hasil x yang mungkin akan memenuhi :

1. $f(x) \geq 0$ 3. $P(X = x) = f(x)$

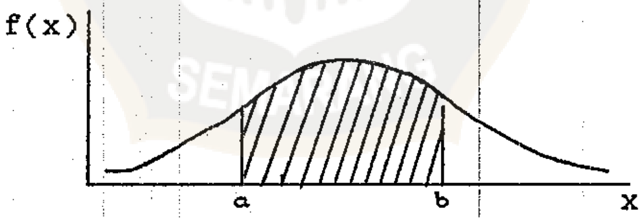
2. $\sum_{x} f(x) = 1$

Contoh 2.2.3.1 :

3 mata uang dilempar sekaligus, maka jika X adalah variabel random dengan nilai x menyatakan hasil "muka", maka fungsi kemungkinannya adalah :

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x}}{2^3}, \quad x = 0,1,2,3$$

Sedangkan untuk distribusi kemungkinan dari variabel random kontinu, biasanya f(x) disebut fungsi padat kemungkinan atau fungsi densitas.



Gambar 2.2.3.1

Pada gambar 2.2.3.1 diatas, luas daerah antara kurva dan sumbu x yang dihitung atas semua rentangan harga X dimana f(x) didefinisikan, adalah 1. Luas tersebut menyatakan besarnya peluang. Sehingga peluang X yang mempunyai nilai antara a dan b adalah daerah yang diarsir.

$$P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Jadi f(x) disebut fungsi densitas dari variabel random X yang didefinisikan pada semua bilangan riil R, bila memenuhi :

1. $f(x) \geq 0$,$\forall$ $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $P(a < x < b) = \int_{b}^{a} f(x)\,dx$

Contoh 2.2.3.2 :

Variabel random X dengan fungsi densitas ;

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 \quad , -1 < x < 2$$
$$= 0 \quad , \text{untuk } x \text{ lainnya}$$

besar peluang antara 0 hingga 1 adalah :

$$P(0 < x \leq 1) = \int_{0}^{1} \frac{1}{3}x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{9}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{9}$$

dan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{3}x^2\,dx = \frac{1}{9}x^3 \Big|_{-1}^{2} = 1$

2.2.4 Dalil Bayes

Definisi 2.2.4.1 :

Nilai kemungkinan bersyarat kejadian A jika kejadian B diketahui ditulis P(A | B), dan ditentukan oleh $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) \neq 0$.

Nilai kemungkinan pada hipotesa H yang hanya berdasarkan anggapan peneliti disebut nilai kemungkinan a priori. Sedangkan nilai kemungkinan yang dihitung setelah dilakukan percobaan disebut nilai kemungkinan a posteriori.

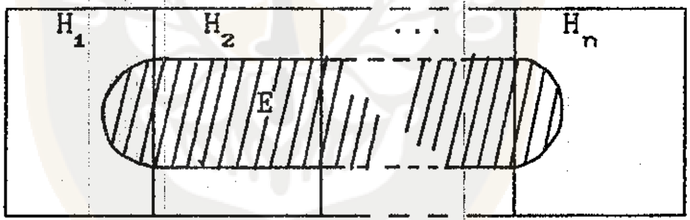
Dalil Bayes

Misalkan $H_1, H_2, \ldots, H_n$ adalah kejadian-kejadian yang saling lepas (disjoint) dan lengkap, yakni $H_i \cap H_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$ dan $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = S$, dan untuk E yang merupakan kejadian pada S dengan $P(E) \neq 0$; maka :

$$P(H_i | E) = \frac{P(H_i) \cdot P(E | H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(E | H_i)} \quad \text{untuk } i = 1,2,\ldots,n$$

Bukti :

Perhatikan illustrasi berikut :



$$E = (E \cap H_1) \cup (E \cap H_2) \cup \ldots \cup (E \cap H_n)$$

$$P(E) = P(E \cap H_1) + P(E \cap H_2) + \ldots + P(E \cap H_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(E \cap H_i)$$

Berdasarkan definisi 2.2.4.1 diatas;

$P(H_i \cap E) = P(E \cap H_i) = P(H_i) \cdot P(E | H_i)$, didapat

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(E | H_i)$$

Jadi $P(H_i | E) = \dfrac{P(H_i \cap E)}{P(E)}$

$$= \frac{P(H_i) \cdot P(E \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(E \mid H_i)}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Contoh 2.2.4.1 :

2 kotak yang sama persis berisi bola putih dan hitam. Kotak I : 2 putih, 3 hitam dan kotak II : 3 putih, 1 hitam. Telah diambil 2 bola yang ternyata 1 putih dan 1 hitam dari salah satu kotak secara acak, maka nilai kemungkinan pengambilan berasal dari kotak I dan kotak II adalah sebagai berikut :

E : kejadian pengambilan 2 bola (1 putih dan 1 hitam)

H_1: hipotesa kotak I terambil

H_2: hipotesa kotak II terambil.

Kemungkinan a priori : $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$

$$P(E \mid H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(E \mid H_2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(H_i \mid E) = \frac{P(H_i) \cdot P(E \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P(E \mid H_i)} \text{ untuk } i = 1,2$$

Nilai kemungkinan a posteriori :

$$P(H_1 \mid E) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{6}{11}$$

$$P(H_2 | E) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{5}{11}$$

Terlihat bahwa jumlah nilai kemungkinan a priori sama dengan jumlah nilai kemungkinan a posteriori, yakni $\sum_{i=1,2} P(H_i) = \sum_{i=1,2} P(H_i | E) = 1.$