2.1. Konsep Dasar Teori Antrian

Sistem antrian dapat digambarkan sebagai kedatangan pendatang - pendatang untuk dilayani, menunggu untuk dilayani jika pelayanan tidak dengan segera dilaksanakan dan jika telah menunggu untuk dilayani kemudian meninggalkan sistem sesudah selesai pelayanan.

6 karakteristik dasar yang menetapkan sistem antrian. Antara lain :

2.1.1. Sumber Masukan

2.1.2. Pola Kedatangan

2.1.3. Pola Pelayanan

2.1.4. Disiplin Antrian

2.1.5. Kapasitas Sistem

2.1.6. Tingkat Pelayanan

2.1.1. Sumber Masukan

Sumber Masukan adalah kumpulan orang atau barang dari mana satuan - satuan datang atau dipanggil untuk pelayanan.

Salah satu karakteristik dari sumber masukan adalah ukurannya, yaitu total jumlah pelanggan - pelanggan yang membutuhkan pelayanan dari waktu ke waktu. Ukuran dapat diasumsikan

2.1.2. Pola Kedatangan

Pola Kedatangan merupakan suatu distribusi dari suatu rata - rata laju kedatangan yaitu rata - rata jumlah kedatangan persejumlah unit waktu atau rata - rata waktu antar kedatangan. Salah satu faktor penting dari pola kedatangan yaitu kemungkinan bahwa pendatang masuk ke dalam sistem lebih dari satu pada suatu waktu.

Didalam hal ini , input atau masukan ini dikatakan terjadi dalam bulk, yaitu masukan ke dalam suatu sistem dengan kedatangan lebih dari satu secara serentak.

2.1.3. Pola Pelayanan

Pola Pelayanan merupakan suatu distribusi dari suatu rata- rata laju pelayanan, yaitu rata - rata jumlah pelanggan yang dilayani per sejumlah unit waktu, atau sebagai waktu yang dibutuhkan untuk melayani seorang pelanggan.

2.1.4. Disiplin Antrian

Disiplin Antrian adalah suatu cara memilih

Served" atau disebut juga "First in, First out" (FIFO) yaitu yang datang lebih dahulu dilayani lebih dahulu. Bentuk disiplin antrian yang lain, antara lain : "Last in , First out" (LIFO) yaitu yang terakhir masuk lebih dahulu dilayani. "Service in Random Order" (SIRO) yaitu seleksi untuk pelayanan didasarkan pada peluang secara random dan tidak bergantung pada waktu kedatangan. Dan "Priority Service"(PS) dimana pelanggan dengan prioritas yang lebih tinggi dipilih untuk pelayanan terlebih dahulu dibandingkan yang berprioritas lebih rendah dengan mengabaikan waktu kedatangan ke dalam sistem.

2.1.5. Kapasitas Sistem

Kapasitas sistem adalah suatu batasan fisik terhadap jumlah pelanggan di dalam sistem antrian yaitu pelanggan yang berada di dalam antrian ditambah dengan pelanggan yang sedang menerima pelayanan.

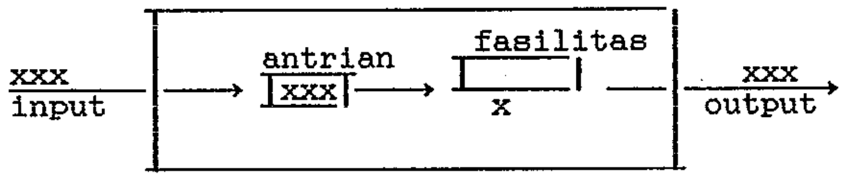
Dengan adanya kapasitas sistem antrian maka disaat antrian mencapai panjang tertentu untuk selanjutnya tidak ada lagi pendatang diijinkan

Tingkat pelayanan merupakan tahapan - tahapan untuk melaksanakan suatu pelayanan di dalam suatu sistem antrian.

Tingkat pelayanan dapat merupakan tingkat pelayanan tunggal (single stage) atau pelayana bertingkat (multistage).

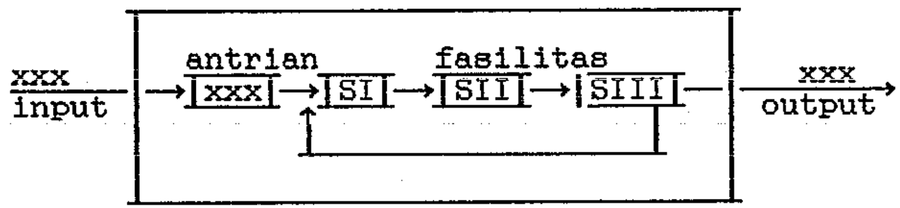
Berdasarkan tingkat pelayanan dan jumlah saluran pelayanan, maka dapat dibentuk bermacam - macam bentuk sistem antrian di antaranya :

A. Single channel - Single stage

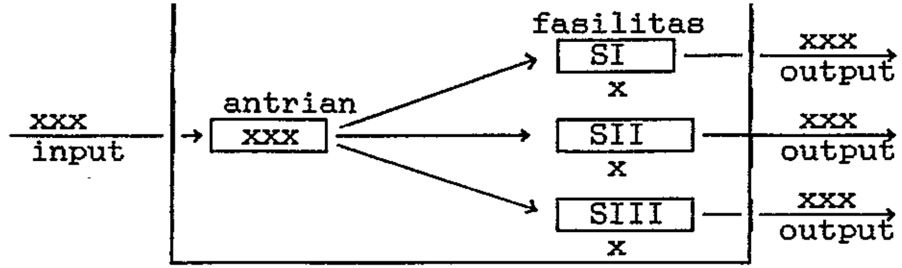


Sistem antrian

B. Single channel - Multi stage

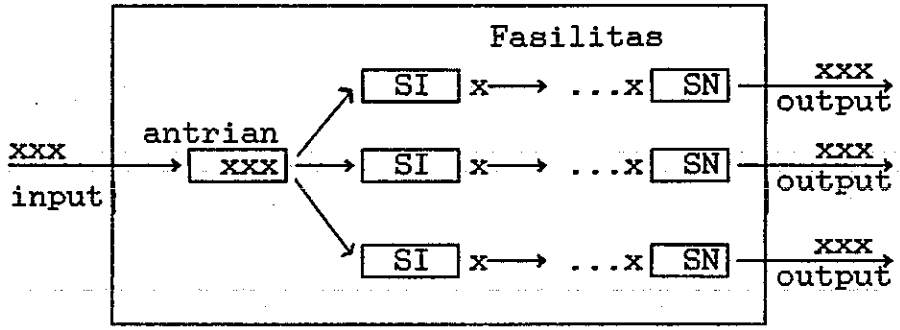


Sistem antrian



Sistem antrian

D. Multi channel - Multi stage



Sistem antrian

2.2. Distribusi dan Notasi Kendall

2.2.1. Distribusi Poisson

Distribusi Poisson adalah distribusi kemungkinan dari variabel random Poisson k, yang menentukan jumlah kedatangan atau jumlah pelayanan yang terjadi pada interval waktu tertentu. Dinotasikan sebagai :

$$P_k = P(X=k) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{untuk } k=0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{untuk k yang lain} \end{cases}$$

Sedangkan nilai ekspektasi dan varians dari X

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda$$

2.2.2. Distribusi Eksponensial

Misal T adalah suatu variabel random yang menentukan waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan. Maka T disebut mempunyai suatu distribusi eksponensial dengan parameter λ jika fungsi probabilitas densitasnya adalah

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{untuk } t \geq 0 \\ 0 & \text{untuk } t < 0 \end{cases}$$

di mana $\lambda > 0$

Sedangkan nilai ekspektasi dan varians untuk T adalah :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

2.2.3. Distribusi Erlang

Misal $T_1, T_2, \ldots, T_k$ adalah k variabel-variabel random independen waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan yang berdistribusikan eksponensial dengan parameter λ.

Maka jumlah dari $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_k$ disebut mempunyai distribusi Erlang dengan parameter λ, jika fungsi probabilitas densitasnya berbentuk :

adalah :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(T) = \frac{1}{k\lambda^2}$$

2.2.4. Notasi Kendall

Untuk menggambarkan suatu proses antrian digunakan suatu notasi yang disebut notasi Kendall.

Proses antrian digambarkan oleh suatu barisan simbol dan garis miring.

Bentuk umum : (a/b/c):(d/e/f)

di mana a : distribusi waktu antar kedatangan

b : distribusi waktu pelayanan

c : jumlah paralel saluran pelayanan

d : batas kapasitas sistem

e : bentuk disiplin antrian

f : besarnya populasi masukan

Beberapa simbol standart untuk karakteristik - karakteristik ini dapat dituliskan dalam tabel 1 di bawah ini.

Tabel 1

Kedatangan (a)	D	Deterministik
	E_k	Erlang type k (k=1,2,..)
	GI	General Independent
- Distribusi Waktu Pelayanan (b)	M	Eksponensial
	D	Deterministik
	E_k	Erlang type k
	G	General
- Jumlah Pelayanan (c)	$1,2,..,\infty$	
- Disiplin Antrian (d)	FIFO	First in, First out
	LIFO	Last in, First out
	SIRO	Service in Random Order
	PRI	Priority
	GD	General Discipline
- Batas kapasitas Sistem (e)	$1,2,..,\infty$	
- Besarnya populasi masukan (f)	$1,2,..,\infty$	

Contoh 2.2.4 :

Notasi (M/M/2);(FIFO/∞/∞) menyatakan suatu proses antrian dengan waktu antar kedatangan dan pelayanan eksponensial, dua pelayanan parallel, disiplin antrian FIFO , tidak ada batas jumlah maksimum dalam sistem dan besarnya populasi masukan tak berhingga.

Di dalam banyak situasi, hanya tiga simbol pertama yang digunakan. Dalam prakteknya tiga simbol yang masukan tak berhingga ($f = \infty$).

2.3. Fungsi Pembangkit

2.3.1. Fungsi Pembangkit

Definisi 1

Jika $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ adalah barisan bilangan riil dan jika $A(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$ ada, maka $A(Z)$ disebut fungsi pembangkit dari barisan $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Sifat-sifat Fungsi Pembangkit

Diberikan fungsi pembangkit dari $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dan $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ adalah A(Z) dan B(Z), maka :

a. Jika $c_n = k_1 a_n + k_2 b_n$ untuk setiap n, di mana k_1 dan k_2 adalah konstanta, maka

$$C(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Z^n$$
$$= k_1 A(Z) + k_2 B(Z)$$

Bukti :

$$C(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} (k_1 a_n + k_2 b_n) Z^n$$
$$C(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_1 a_n Z^n + \sum_{n=0}^{\infty} k_2 b_n Z^n$$
$$C(Z) = k_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n + k_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n Z^n$$
$$C(Z) = k_1 A(Z) + k_2 B(Z)$$

b. Jika $b_n = a_{n+k}$ maka $B(Z) = Z^{-k}A(Z) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n Z^{n-k}$

Bukti :

$$B(Z) = Z^{-k}\left[\sum_{n=-k}^{\infty} a_{n+k}\, Z^{n+k} - \sum_{n=0}^{k-1} a_n\, Z^n\right]$$

$$B(Z) = Z^{-k}\left[A(Z) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n\, Z^n\right]$$

$$B(Z) = Z^{-k} A(Z) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n\, Z^{n-k}$$

c. Jika $a_n = n^k$ dan $b_n = n^{k-1}$ untuk $k \geq 1$

maka :

$$A(Z) = Z\, B^{1}(Z)$$

$$= Z \frac{d}{dz} B(Z)$$

Bukti :

$$A(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, Z^n$$

$$A(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^k\, Z^n$$

$$A(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k\, Z^n$$

$$A(Z) = Z \sum_{n=1}^{\infty} n^k\, Z^{n-1}$$

Karena $B(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, Z^n$

$$B(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1}\, Z^n$$

dan $B^{1}(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, n^{k-1}\, Z^{n-1}$

$$B^{1}(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k\, Z^{n-1}$$

Sehingga $A(Z) = Z\, B^{1}(Z)$

$$A(Z) = Z \frac{d}{dz} B(Z)$$

d. Jika $c_n = \sum_{r=0}^{n} a_r\, b_{n-r}$, maka

$$C(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, Z^n = A(Z)\, B(Z)$$

Bukti :

$$C(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} a_r Z^r b_{n-r} Z^{n-r}$$

$$C(Z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} a_r Z^r b_{n-r} Z^{n-r}$$

$$C(Z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r Z^r \sum_{n=r}^{\infty} b_{n-r} Z^{n-r}$$

$$C(Z) = A(Z)\ B(Z)$$

Catatan :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty}$$

Fungsi pembangkit dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensi , yaitu dengan menyelesaikan persamaan korespondensi untuk fungsi pembangkit dengan menjabarkan ekspansi deretnya dan kemudian mendapatkan koefisien - koefisien { a_n }.

Contoh 2.3.1.

Tentukan f_n dimana

$$f_{n+2} - 2\, f_{n+1} + f_n = a \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

dengan syarat batas $f_0 = f_1 = 0$

Penyelesaian

Pertama - tama kalikan seluruh suku dengan Z^n dan kemudian dijumlahkan dari 0 sampai ∞ dan diperoleh :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} Z^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} Z^n + \sum_{n=0}^{\infty} f_n Z^n = a \sum_{n=0}^{\infty} Z^n$$

$$Z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} Z^{n+2} - 2\, Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} Z^{n+1} + F(Z) = \frac{a}{1-Z}$$

$$Z^{-2}\,F(Z) - 2\,Z^{-1}\,F(Z) + F(Z) = \frac{a}{1-Z}$$

$$F(Z) = \frac{aZ^2}{(1-Z)^3} \qquad (2.3.1)$$

Kemudian ekspansikan sisi kanan persamaan (2.3.1) dalam deret pangkat untuk memperoleh koefisien - koefisiennya yaitu $\{f_n\}$.

Diketahui deret geometri yang diberikan oleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z^n = \frac{1}{1-Z} \qquad \left(|Z| < 1\right)$$

Kemudian ambil derivatif kedua dari dua sisinya , sehingga diperoleh

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,Z^{n-2} = \frac{2}{(1-Z)^3}$$

Oleh karena itu

$$F(Z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{aZ^2}{2}\,n\,(n-1)\,Z^{n-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{an\,(n-1)}{2}\,Z^n$$

Maka diperoleh koefisien dari Z^n yaitu $\frac{an\,(n-1)}{2}$.

Oleh karena itu

$$f_n = \frac{an\,(n-1)}{2}$$

2.3.2. Fungsi Pembangkit Probabilitas

Definisi 2.

Jika f_n adalah suatu distribusi probabilitas dari variabel random non negatif diskrit X sehingga

$n=0$

disebut fungsi pembangkit probabilitas , karena fungsi pembangkit ini membentuk probabilitas - probabilitas $\{f_n\}$.

Selanjutnya dari

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n Z^n$$

maka

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Pr \{ X = n \} Z^n$$

$$= E [Z^n]$$

dengan $E [Z^n]$ adalah ekspektasi dari fungsi Z^n dari variabel random X.

Kemudian didapatkan bahwa

$$F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n = 1$$

dan derevatif pertama dan kedua dari F(Z) yang diberikan oleh

$$F^{1}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} n f_n Z^{n-1}$$

dan

$$F^{11}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) f_n Z^{n-2}$$

maka ekspektasi E [X] disajikan sebagai

$$E [X] = \sum_{n=0}^{\infty} n f_n = F^{1} (1)$$

Oleh karena

$$E [X (X-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) f_n = F^{11} (1)$$

Maka

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - [E(X)]^2$$
$$= F^{11}(1) + F^{1}(1) - [F^{1}(1)]^2$$

Contoh 2.3.2.

Andaikan diketahui fungsi pembangkit probabilitas sebagai :

$$F(Z) = e^{-\lambda} e^{\lambda z}$$

maka tentukanlah mean, varians, dan distribusi probabilitasnya.

Penyelesaian.

Mean , μ , dalam fungsi pembangkit probabilitas diperoleh sebagai

$$\begin{aligned} \mu &= F^{1}(1) \\ &= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda z} \Big|_{z=1} \\ &= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Sedangkan untuk menemukan variansnya digunakan momen faktorial kedua, yaitu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) f_n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 f_n - n f_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 f_n - \sum_{n=0}^{\infty} n f_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 f_n - \mu \end{aligned}$$

Sehingga varians σ^2 dapat diberikan sebagai

$n=0$

$$= F^{11}(1) + \mu - \mu^2$$

$$= e^{-\lambda}\,\lambda^2\,e^{\lambda z}\,\Big|_{z=1} + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda$$

Untuk mendapatkan distribusi probabilitas sepenuhnya disini dapat dengan cara menemukan ekspansi deret pangkat untuk F(Z), yaitu

$$F(Z) = e^{-\lambda}\,e^{\lambda z}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(\lambda z)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\,(\lambda z)^n}{n!}$$

Oleh karena itu, koefisien dari Z^n adalah $\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^n}{n!}$

maka $fn = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^n}{n!}$

merupakan suatu distribusi Poisson.

2.4 Persamaan Differensi

Andaikan suatu fungsi dari variabel bebas , x , (nilai - nilai integer dari x) dan dinotasikan sebagai Y_x.

Differensi pertama dari Y_x didefinisikan sebagai :

$$\Delta Y = Y_{x+1} - Y_x$$

Differensi keduanya didefinisikan sebagai :

$$\Delta^2 Y = \Delta\,(\Delta Y) = Y_{x+2} - Y_{x+1} - (Y_{x+1} - Y_x)$$

$$= Y_{x+2} - 2\,Y_{x+1} + Y_x$$

Dan differensi ke-nnya didefinisikan sebagai :

$$\Delta^n Y = \Delta\,(\,\Delta^{n-1}\,Y\,)$$

Didefinisikan suatu operator D menjadi :

$$D\,Y_x = Y_{x+1}$$

$$D^2\,Y_x = D\,(DY_x) = Y_{x+2}$$

$$D^n Y_x = D\,(D^{n-1}\,Y_x) = Y_{x+n}$$

Sehingga diperoleh hubungan antara Δ dan D sebagai

$$D^n = (\,\Delta + 1\,)^n$$

2.4.1. Persamaan Differensi Linier dengan Koefisien - Koefisien Konstans.

Persamaan differensi Linier derajat n dengan koefisien konstan adalah suatu persamaan differensi yang mempunyai bentuk untuk persamaan homogen (g_x dengan diganti dengan nol) ditambah suatu solusi partikular untuk persamaan (2.4.1.).

Untuk menemukan solusi untuk persamaan homogen.

Pertama - tama tulis kembali persamaan (2.4.1.) dengan menggunakan notasi operator untuk memperoleh bentuk :

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n)\, Y_x = 0 \quad (2.4.2.)$$

Asumsikan bahwa $Y_x = r^x$ adalah solusi dari (2.4.2.) dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah konstanta. Maka dengan substitusi diperoleh

$$r^{n+x} + a_1 r^{n+x-1} + \dots + a_n r^x = 0$$

atau $(r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n) r^x = 0$

Karena r^x adalah solusi dari (2.4.2.) jika r adalah solusi dari

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad (2.4.3.)$$

maka persamaan karakteristik di atas mempunyai n buah akar dengan kemungkinan - kemungkinan untuk harga akarnya - akarnya adalah :

1. Akar -akarnya berbentuk bilangan riil yang berlainan.

   Dalam hal ini r_1^x , r_2^x , ... , r_n^x adalah semua solusi persamaan (2.4.2.) . Karena penggandaan konstanta dengan solusi ini

$$Y_X = c_1 r_1^X + c_2 r_2^X + \ldots + c_n r_n^X$$

2. Beberapa akar - akarnya sama

   jika dua akar sama, misal $r_1 = r_2$, maka solusi umumnya adalah

   $$Y_X = (c_1 + c_2 X) r_1^X$$

   Jika tiga akar sama, misal $r_1 = r_2 = r_3$, maka solusi umumnya adalah

   $$Y_X = (c_1 + c_2 X + c_3 X^2) r_1^X$$

   Jika ada lebih dari tiga akar sama, maka solusi umumnya dapat dinyatakan dengan cara yang sama.

3. Beberapa akar - akarnya berbentuk bilangan komplek.

   Misal akar - akar komplek adalah

   $r_1 = \alpha + i\beta$ dan $r_2 = \alpha - i\beta$

   Jika dibentuk dalam sistem polar $r_1 = r\ e^{i\theta}$ dan $r_2 = r\ e^{-i\theta}$ dengan $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ dan $\theta = \text{arc tan } (\beta/\alpha)$ maka solusinya akan berbentuk

   $$\begin{aligned} Y_X &= c_1 r_1^X + c_2 r_2^X \\ &= c_1 r^X e^{ix\theta} + c_2 r^X e^{-ix\theta} \\ &= r^X [c_1 (\cos x\theta + i \sin x\theta) + \\ &\qquad c_2 (\cos x\theta - i \sin x\theta)] \\ &= r^X [A \cos x\theta + B \sin x\theta] \end{aligned}$$

   dengan A = c + c

$$Y_{x+2} + 6\ Y_{x+1} + 9\ Y_x = 0$$

Persamaan homogen dalam notasi operator adalah

$$(D^2 + 6D + 9)\ Y_x = 0$$

dengan mengasumsikan $Y_x = r^x$ di dalam persamaan differensi.

Maka persamaan karakteristiknya :

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

mempunyai dua akar yang sama yaitu $r_1 = r_2 = -3$

Sehingga solusi umumnya adalah

$$Y_x = c_1\ (-3)^x + c_2\ x\ (-3)^x$$

2.4.2. Persamaan Differensial - Differensi

Definisi

Diberikan $U_n\ (t)$; $n = 1,2,...$ adalah fungsi dari t yang mempunyai suatu derivatif :

$$\frac{d}{dt}\ U_n\ (t) = U_n^1\ (t)$$

Persamaan yang menyelesaikan $U_n^1\ (t)$ dan $U_n(t)$, $U_{n+1}(t)$ dan seterusnya dinamakan persamaan differensial - differensi.

2.5. Theorema Rouche

Jika fungsi - fungsi f(z) dan g(z) analitik di dalam dan pada kontur tertutup C dan jika $|\ g(z)\ | < |\ f(z)\ |$ untuk setiap z pada C, maka f(z) dan f(z) + g(z) mempunyai harga nol (akar) yang sama banyak di dalam C.

Bukti

$$Q(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)} = 1 + W(z)$$

dan $W(z) = \dfrac{g(z)}{f(z)}$

Maka

$$l_n\ (\ f(z) + g(z)\ ) = l_n\ f(z)\ Q(z)$$

$$l_n\ (\ f(z) + g(z)\ ) = l_n\ f(z) + l_n\ Q(z)$$

Sehingga

$$\frac{f^1(z) + g^1(z)}{f(z) + g(z)} = \frac{f^1(z)}{f(z)} + \frac{Q^1(z)}{Q(z)}$$

dan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f^1(z) + g^1(z)}{f(z) + g(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f^1(z)}{f(z)}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{Q^1(z)}{Q(z)}\, dz$$

atau

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg \left\{ f(z) + g(z) \right\} = \frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg f(z) + \frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg Q(z)$$

Tetapi karena

$$|\ W(z)\ | = |\ Q(z) - 1\ | \leq M < 1$$

maka setiap titik Q di bidang kompleks terletak di dalam lingkaran dengan pusat 1 dan jari - jari M < 1.

Oleh karena itu variasi arg Q di sekeliling C adalah Δ_c arg Q = 0 (C tidak melingkungi 0)

Jadi

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg \left\{ f(z) + g(z) \right\} = \frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg f(z)$$

Maka terbukti jumlah akar f(z) + g(z), sama bahwa :

$$\mu\ r^{k+1} - (\lambda + \mu)\ r + \lambda = 0$$

mempunyai dengan tepat satu akar di dalam interval (0,1).

Penyelesaian

Ambil $g(r) = r^{k+1}$ dan $f(r) = -(\lambda/\mu + 1)r + \lambda/\mu$

maka diketahui f(r) mempunyai satu akar (Nf = 1)

Karena

$$|\ g(r)\ | < |\ f(r)\ |$$

maka menurut theorema Rouche , jumlah akar f(r) + g(r) sama dengan jumlah akar f(r) di dalam interval (0,1).

Jadi

$$Nf = N_{f+g} = 1$$

2.6. Solusi Steady - State untuk Model M / M /1

Analisis dimulai dengan mencoba menemukan probabilitas state $\left\{ P_n\ (t) \right\}$ untuk model M/M/1 dengan tidak ada batasan pada kapasitas sistem dan pelanggan dilayani dengan didasarkan pada disiplin antrian FIFO.

Analisa ini dapat ditinjau melalui 3 langkah sebagai berikut ;

Langkah 1 . Persamaan differensi untuk $P_n\ (t)$

Langkah 2 . Persamaan differensial - differensi

2.6.1. Langkah 1. Persamaan differensi untuk P_n (t)

Pertama - tama ditinjau bagaimana sistem dapat mencapai state E_n pada saat t + Δt. Untuk berada dalam state E_n pada saat t + Δt, sistem akan telah berada dalam state E_n pada saat t dan selama Δt terjadi j kedatangan dan j penyelesaian pelayanan atau telah berada dalam state E_{n+j} pada saat t dan selama Δt telah menyelesaikan j+k pelayanan dan k kedatangan.

Sistem juga telah berada dalam state E_{n-j} pada saat t dan selama Δt terjadi j+k kedatangan dan k penyelesaian pelayanan.

Karena probabilitas lebih dari satu kedatangan selama Δt atau lebih dari satu penyelesaian pelayanan diberikan oleh O(Δt), maka diandaikan paling banyak hanya satu kedatangan dan / atau satu penyelesaian pelayanan terjadi selama Δt.

Sistem dapat berada dalam state E_n pada saat t dan tidak ada kedatangan ataupun penyelesaian pelayanan selama Δt atau berada dalam state E_{n-1} pada saat t dan selama Δt terjadi satu kedatangan dan tidak ada penyelesaian pelayanan, atau pada akhirnya sistem dapat berada dalam state E pada saat t dan selama sehingga dapat dituliskan bahwa

Pr { sistem berada dalam En pada saat $t + \Delta t$ }

= Pr { sistem berada dalam E_n pada saat t dan tidak ada kedatangan terjadi selama Δt dan tidak ada pelayanan diselesaikan selama Δt }

+ Pr { sistem berada dalam E_n pada saat t dan satu kedatangan terjadi selama Δt dan satu pelayanan diselesaikan selama Δt }

+ Pr { sistem berada dalam E_{n+1} pada saat t dan satu penyelesaian pelayanan terjadi selama Δt dan tidak ada kedatangan terjadi selama Δt }

+ Pr { sistem berada dalam E_{n-1} pada saat t dan satu kedatangan terjadi selama Δt dan tidak ada penyelesaian pelayanan terjadi selama Δt }

+ 0 (Δt)

Karena kedatangan dan pelayanan keduanya bebas satu sama lain dengan statenya pada t, maka

P_n [$t+\Delta t$] = P_n (t) . Pr { tidak ada kedatangan selama Δt } . Pr { tidak ada

$+ \ P_{n+1}(t) \ . \ \Pr \ \{$ ada satu penyelesaian pelayanan selama $\Delta t \ \}$ $. \ \Pr \ \{$ tidak ada kedatangan selama $\Delta t \ \}$

$+ \ P_{n-1}(t).\Pr \ \{$ ada satu kedatangan selama $\Delta t \ \}$ $. \ \Pr \ \{$ tidak ada penyelesaian pelayanan selama $\Delta t \ \}$

$+ \ 0 \ (\Delta t) \qquad (n \geq 1)$

Karena waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan didistribusikan secara eksponensial, maka tidaklah perlu untuk mengetahui berapa lama sejak kedatangan yang terakhir atau berapa lama arus pelanggan dalam pelayanan telah berada disana. Maka dapat dituliskan bahwa

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) = {} & P_n(t)[\,1-\lambda\Delta t + 0(\Delta t)]\,[\,1-\mu\Delta t + 0(\Delta t)] \\
& + P_n(t)\ [\lambda\Delta t + 0(\Delta t)]\ \ [\mu\ \Delta t + 0(\Delta t)] \\
& + P_{n+1}(t)[\,\mu\Delta t + 0(\Delta t)]\,[\,1-\lambda\Delta t + 0(\Delta t)] \\
& + P_{n-1}(t)[\,\lambda\Delta t + 0(\Delta t)]\,[\,1-\mu\Delta t + 0(\Delta t)] \\
& + 0\ (\Delta t)
\end{aligned}
$$

Gabungkan semua suku $0(\Delta t)$ dan dapatkan suku - suku dengan $(\Delta t)^2$ adalah juga $0(\Delta t)$, maka dapat ditulis :

$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)[\,1-\lambda\Delta t - \mu(\Delta t)] \ +P_{n+1}(t)\ [\mu\Delta t]$

sehingga state ini harus dinyatakan secara terpisah.

Sistem dapat berada dalam state E_o pada saat $t + \Delta t$ jika sistem berada dalam E_o pada saat t dan tidak ada kedatangan terjadi selama Δt (tidak ada pelayanan adalah mungkin karena sistem kosong) , atau sistem dapat berada dalam E_1 pada saat t dan tidak ada kedatangan tetapi ada satu penyelesaian pelayanan dalam Δt. Jika sistem berada dalam sembarang state yang lebih tinggi pada saat t, pelayanan ganda akan dibutuhkan selama Δt dan probabilitasnya adalah $0(\Delta t)$. Sehingga

$$P_o(t+\Delta t) = P_o(t)\,[\,1 - \lambda\Delta t + 0(\Delta t)\,]$$
$$+ P_1(t)\,[\,1-\lambda\Delta t + 0(\Delta t)]\,[\mu\Delta t + 0(\Delta t)] + 0(\Delta t)$$
$$= P_o(t)\,[\,1-\lambda\Delta t] + P_1(t)\,[\mu\Delta t] + 0(\Delta t) \quad (2.6.3.)$$

Maka persamaan differensi untuk model M/M/1 diberikan sebagai

$$\begin{cases} P_n(t+\Delta t) = P_n(t)[\,1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t] + P_{n+1}(t)[\mu\Delta t] \\ \qquad\qquad +P_{n-1}(t)\,[\lambda\Delta t] + 0(\Delta t) \quad (n\geq 1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.6.4.) \\ P_o(t+\Delta t) = P_o(t)[\,1-\lambda\Delta t] + P_1(t)\,[\mu\Delta t] +0(\Delta t) \end{cases}$$

2.6.2. Langkah 2. Persamaan Differensial - Differensi

$$\begin{cases} \quad + \lambda\Delta t\ P_{n-1}(t) + 0(\Delta t) \quad (n \geq 1) \\ P_o(t+\Delta t)-P_o(t) = -\lambda\Delta t\ P_o(t)+\mu\Delta t\ P_1(t)+0(\Delta t) \end{cases}$$

Jika dilakukan pembagian oleh Δt dan diambil limitnya sebagai $\Delta t \longrightarrow 0$ maka ditemukan

$$\begin{cases} \dfrac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)P_n(t)+\mu P_{n+1}(t)+\lambda P_{n-1}(t) \quad (n \geq 1) \\ \dfrac{dP_o(t)}{dt} = -\lambda\ P_o(t) + \mu\ P_1(t) \end{cases} \qquad (2.6.5)$$

Persamaan ini adalah persamaan differensial - differensi , persamaan differensial dalam t, dan differensi dalam n.

2.6.3. Langkah 3. Solusi steady state untuk P_n

Untuk memperoleh solusi steady state untuk P_n, probabilitas n pelanggan berada dalam sistem pada sembarang titik waktu sesudah steady state tercapai, diambil limit $t \longrightarrow \infty$ dari persamaan (2.6.5) sehingga diperoleh

$$\begin{cases} 0 = -(\lambda + \mu)\ P_n + \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} \qquad (n \geq 1) \\ 0 = -\ \lambda P_o + \mu P_1 \end{cases}$$

atau

$$P_{n+1} = \frac{\lambda + \mu}{\mu}\ P_n - \frac{\lambda}{\mu}\ P_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (2.6.6)$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}\ P_o$$

disebut faktor penggunaan, karena merupakan suatu ukuran dari rata - rata penggunaan fasilitas pelayanan. Hal ini didasarkan pada jumlah kedatangan yang diharapkan tiap rata - rata waktu pelayanan, sehingga sering juga disebut intensitas lalu lintas. Maka diperoleh :

$$P_o = \frac{1}{\sum_{n=o}^{\infty} \rho^n}$$

Karena $\sum_{n=o}^{\infty} \rho^n$ adalah suatu deret geometri, $1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots$, dan konvergen jika dan hanya jika $|\rho| < 1$. Maka untuk adanya suatu penyelesaian steady-state, $\rho = \lambda/\mu$ harus lebih kecil daripada 1 atau λ harus lebih kecil daripada μ. Jika $\lambda > \mu$, rata - rata laju kedatangan adalah lebih besar daripada rata - rata laju pelayanan. Sehingga ukuran sistem akan terus bertambah besar tanpa batas. Jika $\lambda = \mu$, maka solusi steady-statenya tidak ada . Karena pada saat $\lambda = \mu$ pertambahan yang terjadi tidak berhingga yaitu jumlah antriannya terus bertambah. Hal ini menjadikan pelayan lebih sulit untuk menurunkan jumlah antrian

Dengan menggunakan lambang untuk jumlahan suku - suku suatu deret ukur :

$$\sum_{n=o}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1 - \rho} \qquad (\rho < 1)$$

diperoleh $P_o = 1-\rho \quad (\rho = \lambda/\mu < 1)$ (2.6.10)

Maka solusi steady statenya adalah

$$P_n = \rho^n (1-\rho) \quad (\rho = \lambda/\mu < 1) \qquad (2.6.11)$$

b. Penyelesaian Persamaan Differensi Steady -State untuk $\{ P_n \}$ dengan Menggunakan Fungsi Pembangkit.

Fungsi Pembangkit Probabilitas , $P(Z) = \sum_{n=o}^{\infty} P_n Z^n$ (Z bilangan kompleks dengan $|Z| \leq 1$), dapat digunakan untuk menemukan P_n.

Prosedurnya meliputi cara menemukan suatu pernyataan tertutup untuk P(Z) dari persamaan (2.6.6), kemudian menemukan suatu ekspansi deret pangkat untuk mendapat $\{P_n\}$ yang merupakan koefisien - koefisien.

Untuk model M/M/1 , $\{P_n\}$ dapat diselesaikan dengan menggunakan P(Z) dengan menuliskan kembali persamaan (2.6.6) ke dalam bentuk suku - suku dalam ρ dan diperoleh

$$\begin{cases} P_{n+1} = (\rho+1)\, P_n - \rho\, P_{n-1} & (n \geq 1) \\ P_1 = \rho\, P_o & \end{cases} \qquad (2.6.12)$$

Jika kedua sisi dari persamaan (2.6.12)

$$Z^{-1} P_{n+1} Z^{n+1} = (\rho+1) P_n Z^n - \rho Z P_{n-1} Z^{n-1}$$

Jika kedua sisi dari persamaan di atas dijumlahkan dari $n = 1$ sampai ∞, didapatkan bahwa

$$Z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} Z^{n+1} = (\rho+1) \sum_{n=1}^{\infty} P_n Z^n - \rho Z \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} Z^{n-1}$$

atau

$$Z^{-1} \left[\sum_{n=-1}^{\infty} P_{n+1} Z^{n+1} - P_1 Z - P_o \right]$$

$$= (\rho+1) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n \ Z^n - P_o \right] - \rho Z \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} Z^{n-1}$$

Perlu diketahui bahwa :

$$\sum_{n=-1}^{\infty} P_{n+1} Z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} Z^{n-1} = P(Z)$$

Sehingga diperoleh

$$Z^{-1} [P(Z) - P_1 Z - P_o]$$

$$= (\rho+1) [P(Z) - P_o] - \rho Z P(Z) \qquad (2.6.13)$$

Dari persamaan (2.6.12) didapatkan bahwa $P_1 = \rho \ P_o$, oleh karena itu diperoleh bentuk

$$Z^{-1} [P(Z) - (\rho Z + 1) \ P_o] = (\rho+1) [P(Z) - P_o] - \rho Z P(Z)$$

Sehingga penyelesaian untuk $P(Z)$ adalah

$$P(Z) = \frac{P_o}{1 - Z\rho} \qquad (2.6.14)$$

Untuk menemukan P_o digunakan syarat batas bahwa $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ dengan cara sebagai berikut :

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

Maka dari persamaan (2.6.14) diperoleh :

$$P(1) = 1 = \frac{P_o}{1 - \rho}$$

atau

$$P_o = 1 - \rho \qquad (2.6.15)$$

Karona $\{P_n\}$ merupakan bentuk - bentuk probabilitas , maka $P(Z) > 0$ untuk $|Z| > 0$, oleh karena itu $P(1) > 0$. Dari persamaan (2.6.15) diketahui bahwa $P(1) = \dfrac{P_o}{1 - \rho} > 0$, oleh karena itu ρ harus lebih kecil dari 1 karena P_o adalah suatu probabilitas dan $P_o > 0$.

$$\text{Maka } P(Z) = \frac{1 - \rho}{1 - Z\rho} \qquad (\rho<1) \qquad (2.6.16)$$

Karena $\dfrac{1}{1 - Z\rho} = 1 + Z\rho + (Z\rho)^2 + (Z\rho)^3 + \ldots$ merupakan jumlahan suatu deret geometri.

Maka fungsi pembangkit probabilitasnya adalah

$$P(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho)\, \rho^n\, Z^n \qquad (2.6.17)$$

Dan koefisien dari Z^n yaitu P_n diberikan oleh

$$P_n = (1 - \rho)\, \rho^n$$

c. Penyelesaian Persamaan Differensi Steady - State untuk $\{P_n\}$ dengan Menggunakan

$a_1, a_2, \ldots \}$ sedemikian sehingga

$$D\, a_n = a_{n+1} \qquad (\text{ untuk semua } n\ )$$

Maka persamaan umum differensi linier dengan koefisien konstan

$$c_n a_n + c_{n+1} a_{n+1} + \ldots + c_{n+k} a_{n+k} = \sum_{i=n}^{n+k} c_i a_i = 0 \qquad (2.6.18)$$

dapat dituliskan sebagai :

$$\left[\sum_{i=n}^{n+k} c_i\, D^{i-n} \right] a_n = 0$$

Karena

$$D^e\, a_n = a_{n+e} \qquad (\text{untuk setiap } n \text{ dan } e)$$

Dalam suatu kejadian bahwa persamaan (2.6.18) diambil dalam bentuk

$$c_2\, a_{n+2} + c_1\, a_{n+1} + c_0\, a_n = 0 \qquad (2.6.19)$$

maka

$$(\, c_2\, D^2 + c_1\, D + c_0\,)\, a_n = 0 \qquad (2.6.20)$$

dan jika bentuk kuadrat dalam D ini mempunyai akar - akar real r_1 dan r_2 adalah benar bahwa :

$$(\, D - r_1\,)(\, D - r_2\,)\, a_n = 0$$

Karena r_1 dan r_2 adalah akar -akar persamaan (2.6.20) maka $d_1 r_1^n$ dan $d_2 r_2^n$ adalah penyelesaian untuk persamaan (2.6.19), dengan d_1 dan d_2 konstanta sembarang. Hal ini dapat dibuktikan dengan

Sebagai contoh, diberikan $a_n = d_1 r_1^n$ kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (2.6.19) sehingga diperoleh

$$c_2 \; d_1 r_1^{n+2} + c_1 \; d_1 r_1^{n+1} + c_0 \; d_1 r_1^n = 0$$

atau

$$d_1 r_1^n \; [\; c_2 r_1^2 + c_1 r_1 + c_0 \;] = 0$$

yang merupakan bentuk dari persamaan (2.6.20).

Dengan menggunakan cara yang sama , dapat ditunjukkan bahwa $d_2 r_2^n$ merupakan penyelesaian dan juga jumlahannya, $d_1 r_1^n + d_2 r_2^n$ juga merupakan penyelesaian.

Pendekatan ini dapat diterapkan secara langsung ke dalam penyelesaian persamaan differensi steady-state (2.6.6), karena bentuknya merupakan persamaan differensi linier seperti bentuk persamaan (2.6.19).

Jika D didefinisikan sebagai bentuk pengoperasian $D \; P_n = P_{n+1}$ dan jika persamaan (2.6.6) ditulis kembali sebagai

$$\mu P_{n+2} - (\lambda+\mu) \; P_{n+1} + \lambda P_n = 0 \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

Maka

$$[\; \mu \; D^2 - (\; \lambda+\mu)D + \lambda \;] \; P_n = 0 \qquad (2.6.21)$$

Dan berdasarkan syarat batas bahwa

$$P \quad = \left(\frac{\lambda}{\quad} \right) P$$

$$[\,(D-1)(\mu D-\lambda)\,]\; P_n = 0$$

Sehingga

$$P_n = d_1(1)^n + d_2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \qquad (2.6.22)$$

dimana d_1 dan d_2 ditemukan dengan menggunakan syarat - syarat batas.

Dari persamaan (2.6.22) diperoleh

$$P_1 \quad = d_1 + d_2\rho$$

dan

$$P_2 \quad = d_1 + d_2\rho^2$$

Juga dari persamaan (2.6.6) diperoleh syarat - syarat batas

$$P_1 \quad = \frac{\lambda}{\mu} P_o \quad = \rho\; P_o$$

dan

$$\begin{aligned} P_2 \quad &= \frac{\lambda + \mu}{\mu} P_1 - \frac{\lambda}{\mu} P_o \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_o \\ &= \rho^2\; P_o \end{aligned}$$

Dengan menyamakan 2 pernyataan untuk P_1 dan P_2 , secara berturutan menghasilkan 2 persamaan dengan d_1 dan d_2 konstanta yang tidak diketahui yaitu

$$\begin{cases} d_1 + d_2\,\rho = P_o\,\rho \\ d_1 + d_2\,\rho^2 = P_o\,\rho^2 \end{cases}$$

Penyelesaian persamaan ini menghasilkan

$d_1 = 0$ dan $d_2 = P_o$

yang pertama sehingga didapat

$$P_o = 1 - \rho \qquad (\rho < 1)$$

2.7. Ukuran - Ukuran Keefektifan dan Distribusi Waktu Tunggu.

2.7.1. Ukuran - Ukuran Keefektifan

Distribusi probabilitas steady-state untuk ukuran sistem dapat untuk menghitung ukuran - ukuran keefektifan diantaranya adalah ekspektasi jumlah dalam sistem dan ekspektasi jumlah dalam antrian pada saat steady-state. Ditentukan N adalah variabel random jumlah pelanggan dalam sistem pada saat steady-state dan L adalah nilai ekspektasinya.

Maka dapat dituliskan bahwa

$$L = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n (1 - \rho) \rho^n$$

$$= (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n \qquad (2.7.1)$$

Ditinjau $\sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n = \rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \ldots$$

$$= \rho (1 + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots)$$

$$= \rho \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$$

Oleh karena itu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\rho^{n-1} = \frac{d\,[\,^1/(1-\rho)\,]}{d\rho}$$

$$= \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

Maka nilai ekspektasi jumlah dalam sistem pada saat steady-state adalah :

$$L = \frac{(1-\rho)\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (2.7.2)$$

atau

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad (2.7.3)$$

Jika suatu variabel random " Jumlah dalam antrian pada saat steady-state " di notasikan dengan N_q dan nilai ekspektasi dengan L_q , maka

$$L_q = E[\,N_q\,]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\,P_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\,P_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$= L - (1 - P_0)$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$$

Maka rata - rata panjang antrian adalah

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (2.7.4)$$

atau

λ^2

Untuk mendapatkan keterangan mengenai suatu kedatangan yang harus menunggu untuk dilayani, maka digunakan suatu distribusi probabilitas waktu tunggu. Variabel random waktu tunggu sebagian besar merupakan variabel kontinu kecuali jika ada suatu probabilitas yang tidak nol yang penundaannya akan sama dengan nol, yaitu seorang pelanggan memasuki pelayanan dengan segera selama kedatangan.

ditentukan T_q adalah variabel random " waktu tunggu dalam antrian " dan W_q adalah distribusi komulatifnya.

Oleh karena itu diperoleh :

$$
\begin{aligned}
W_q(0) &= P_r \{ T_q \leq 0 \} = P_r \{ T_q = 0 \} \\
&= P_r \{ \text{sistem kosong pada saat kedatangan} \} \\
&= P_o \\
&= 1 - \rho \qquad (2.7.6)
\end{aligned}
$$

Ditentukan $W_q(t)$ adalah probabilitas waktu tunggu seorang pelanggan untuk pelayanan kurang atau sama dengan t.

Jika terdapat n unit dalam sistem selama kedatangan , maka saat pelanggan memasuki pelayanan pada suatu waktu antara 0 dan t, semua n unit harus telah dilayani dengan waktu t.

konvolusi dari n variabel random eksponensial, yaitu suatu distribusi Erlang tipe n.

Oleh karena itu dapat ditulis bahwa :

$$
\begin{aligned}
W_q(t) &= P_r\{ T_q \le t \} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[P_r\{ \text{n penyelesaian dalam waktu} \le t \mid \text{ditemukan n kedatangan dalam sistem} \} P_n \Big] + W_q(0) \\
&= (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu x}\, dx + (1-\rho) \\
&= (1-\rho)\rho \int_0^t \mu\, e^{-\mu x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu x \rho)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx + (1-\rho) \\
&= \rho(1-\rho) \int_0^t \mu\, e^{-\mu x(1-\rho)}\, dx + (1-\rho) \\
&= 1 - \rho\, e^{-\mu(1-\rho)t} \qquad (t > 0)
\end{aligned}
$$

Maka distribusi waktu tunggu dalam antrian adalah

$$
W_q(t) = \begin{cases} 1-\rho & (t = 0) \\ 1-\rho\, e^{-\mu(1-\rho)t} & (t > 0) \end{cases} \qquad (2.7.7)
$$

Dengan menggunakan distribusi probabilitas T_q, dapat dihitung ekspektasi waktu tunggu yang dinotasikan dengan W_q

$$
\begin{aligned}
W_q = E[T_q] &= \int_0^{\infty} t\, dW_q(t) \\
&= \int_0^{\infty} t\, \frac{\lambda}{\mu} (\mu-\lambda)\, e^{-(\mu-\lambda)t}\, dt \\
&= \frac{\lambda}{\mu} \int_0^{\infty} t\, (\mu-\lambda)\, e^{-(\mu-\lambda)t}\, dt
\end{aligned}
$$

dengan W(t) adalah fungsi distribusi kumulatif dan w(t) adalah fungsi densitasnya dan W adalah nilai ekspektasinya.

Maka dapat ditunjukkan

$$w(t) = (\mu - \lambda)\ e^{-(\mu - \lambda)t} \quad (t>0) \qquad (2.7.9)$$

dan

$$W = E[T] = \int_{o}^{\infty} t\ dW(t)$$

$$= \int_{o}^{\infty} t\ (\mu - \lambda)\ e^{-(\mu - \lambda)t}\ dt$$

$$E[T] = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad (2.7.10)$$

2.7.3. Hubungan antara ekspektasi panjang antrian dan ekspektasi waktu tunggu.

Untuk mendapatkan hubungan antara W_q dan W, bandingkan persamaan (2.7.8) dan (2.7.10) didapatkan bahwa

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \qquad (2.7.11)$$

Sedangkan hubungan antara L_q dan W_q, bandingkan persamaan (2.7.5) dan (2.7.8) kemudian dapatkan hubungan bahwa

$$L_q = \lambda\ W_q \qquad (2.7.12)$$

dan juga dari persamaan (2.7.3) dan (2.7.10) didapatkan bahwa

$$L = \lambda W$$

menurut proses birth-death. Di dalam teori antrian birth (kelahiran) menunjuk pada kedatangan seorang pelanggan baru di dalam sistem antrian dan death (kematian) menunjuk pada keberangkatan pelanggan yang telah selesai dilayani.

Keadaan suatu sistem pada saat t ($t \geq 0$), E_n merupakan jumlah pelanggan - pelanggan di dalam sistem antrian pada saat t. Proses birth-death ini menggambarkan secara probabilitik bagaimana E_n berubah bersamaan dengan kenaikan t dan kelahiran dan kematian individu terjadi secara random.

Perhatikan probabilitas state $P_n(t) = P_r$ {State proses yaitu E_n pada saat t} untuk sembarang proses birth-death. Proses ini merupakan suatu proses dimana perubahan seketika di dalam sistem state hanya disebabkan adanya satu kelahiran (birth) dan satu kematian (death).

Probabilitas terjadinya satu kelahiran dalam interval kecil sepanjang Δt yang berawal dengan sistem di dalam state E_n diassumsikan sebagai $\lambda_n \Delta t + O(\Delta t)$, sedangkan satu kematian diassumsikan sebagai $\mu_n \Delta t + O(\Delta t)$ ($n \geq 1$).

Untuk membentuk persamaan differensi untuk $P_n(t)$

1. Ada n satuan dalam sistem pada saat t (E_n), antara selang waktu t dan Δt tidak ada yang datang dan tidak ada yang selesai dilayani.
2. Ada (n+1) satuan dalam sistem pada saat t (E_{n+1}), antara selang waktu t dan Δt tidak ada yang datang sedangkan satu pelayanan selesai.
3. ada (n-1) satuan dalam sistem pada saat t (E_{n-1}), antara selang waktu t dan Δt datang satu satuan dan tidak ada yang selesai dilayani.
4. ada n satuan dalam sistem pada saat t (E_n) antara selang waktu t dan Δt datang satu satuan dan satu pelayanan selesai.

Kemungkinan - kemungkinan di atas dapat digambarkan dalam tabel 2 berikut ini :

Tabel 2.

Kasus	Peluang ada n unit di dalam sistem	Masukan dalam selang t s/d t + Δt		Unit yang dilayani dalam selang t s/d t + Δt		Banyaknya unit dalam antrian antara t s/d t + Δt
		banyak	Peluang	Banyak	Peluang	
1	P_n	0	$1-\lambda_n \Delta t$	0	$1 - \mu_n \Delta t$	n
2	P_{n+1}	0	$1-\lambda_{n+1} \Delta t$	1	$\mu_{n+1} \Delta t$	n
3	P_{n-1}	1	$\lambda_{n-1} \Delta t$	0	$1-\mu_{n-1} \Delta t$	n
4	P_n	1	$\lambda_n \Delta t$	1	$\mu_n \Delta t$	n

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda_n \Delta t)(1 - \mu_n \Delta t) + P_n(t)(\lambda_n \Delta t)(\mu_n \Delta t) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1} \Delta t)(1 - \lambda_{n+1} \Delta t) + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} \Delta t)(1 - \mu_{n-1} \Delta t) + O(\Delta t)$$

Untuk $n = 0$

$$P_o(t+t) = P_o(t)(1-\lambda_o \Delta t) + P_1(t)(\mu_1 \Delta t)(1-\lambda_1 \Delta t) + O(\Delta t)$$

Selanjutnya jika limit $\Delta t \longrightarrow 0$ maka $(\Delta t)^2$ dapat diabaikan dan turunan persamaan differensi didapat dengan cara membagi dengan Δt sehingga diperoleh :

Persamaan differensial - differensinya adalah :

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t)$$

$$n \geq 1 \qquad (2.8.1)$$

$$\frac{dP_o(t)}{dt} = -\lambda_o P_o(t) + \mu_1 P_1(t)$$

Jika diassumsikan sistem dalam keadaan steady-state didapat bentuk M/M/1 dan karena $P_n(t)$ tidak bergantung pada waktu maka .

$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan persaman (2.8.1) diatas berubah menjadi :

$$0 = -(\lambda_n + \mu_n)P_n + \mu_{n+1}P_{n+1} + \lambda_{n-1}P_{n-1} \qquad n \geq 1$$

μ_{n+1} μ_{n+1}

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

Dengan menggunakan iterasi pada persamaan di atas, diperoleh suatu solusi yaitu ;

$$P_2 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} P_1 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0$$

$$= \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0$$

$$= \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_1 \mu_2} \lambda_0 P_0 - \frac{\mu_1 \lambda_0}{\mu_1 \mu_2} P_0$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_1 \mu_2} P_0 + \frac{\mu_1 \lambda_0}{\mu_1 \mu_2} P_0 - \frac{\mu_1 \lambda_0}{\mu_1 \mu_2} P_0$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_1 \mu_2} P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} P_2 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} P_1$$

$$P_3 = \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_1 \mu_2} P_0 - \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_1} P_0$$

$$= \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0 + \frac{\mu_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0 - \frac{\mu_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0$$

$$= \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0 , \ldots.$$

Maka diperoleh bentuk umumnya yang dapat ditulis

$$= P_o \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$