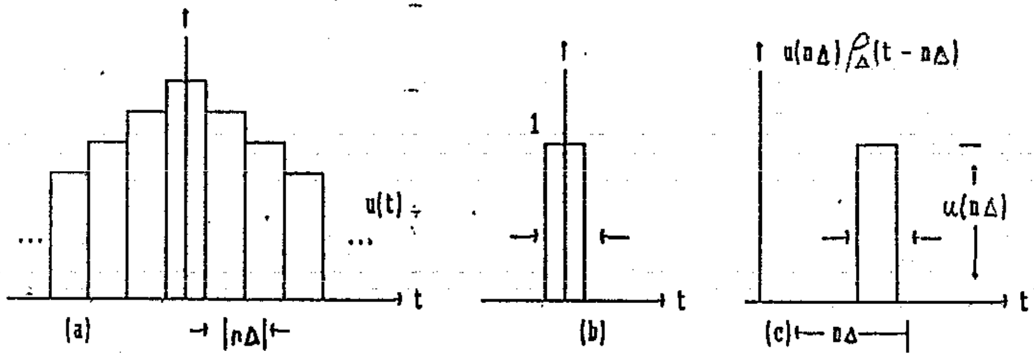
MATERI PENUNJANG

3.1. Fungsi Impuls dan Konvolusi

3.1.1. Fungsi Impuls Satuan

Suatu fungsi sebarang u(t) dengan suatu deret impuls seperti ditunjukkan dalam gambar :



Gb.3.1.1(a)Hampiran u(t) melalui deret pulsa Gb.3.1.1(b) Pulsa satuan Gb.3.1.1(c) Pulsa tergeser dan berskala

Penjelasan Gambar :

a). Deret impuls pulsa dengan banyaknya pulsa n, akan dicari suatu luas untuk fungsi u(t).

b). $\rho_{\Delta}(t)$ adalah pulsa yang tingginya satu dan lebarnya .

c). Pulsa yang tergeser sejauh $n\Delta$ dan besarnya pulsa yang tergeser adalah $u(n\Delta)\,\rho_{\Delta}(t-n\Delta)$.

$$u(t) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta)\, \rho_\Delta(t-n\Delta)$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta)\, \rho_\Delta(t-n\Delta)$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta) \left[\frac{1}{\Delta}\, \rho_\Delta(t-n\Delta) \right] \Delta$$

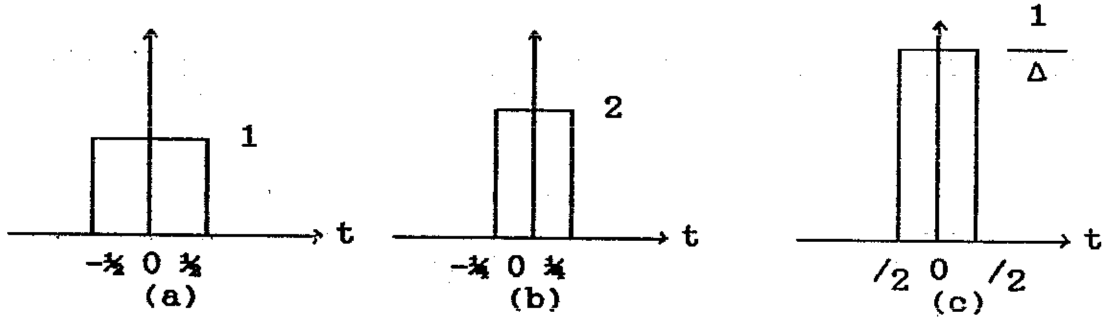
$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau$$

maka $\delta(t-\tau) = \lim\limits_{\Delta \to 0} \dfrac{1}{\Delta}\, \rho_\Delta(t-n\Delta)$ dengan $\tau = n\Delta$

atau setara dengan

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta}\, \rho_\Delta(t) \quad \text{dimana} \quad \tau = 0 \qquad (3\text{-}2)$$

Proses pengambilan limit dari δ (t) secara skematis ditunjukkan dalam gambar :



Gb.3.1.2. Penyempitan pulsa-pulsa dari luas satuan.

Penjelasan gambar :

a). Suatu pulsa dari luas satu satuan untuk b). Suatu pulsa dari luas satu satuan untuk $\delta t)$ makin kecil diambil untuk $t = ¼$ dan $t = -¼$.

c). Suatu pulsa satu satuan diambil untuk t mendekati nol, t diambil $\Delta/2$ dan $-\Delta/2$ dan $\delta(t)$ bernilai $1/\Delta$.

Dari gambar di atas dapat ditarik kesimpulan/definisi bahwa fungsi impuls $\delta(t)$ yaitu :

Definisi 3.1. :

a). $\delta(t) = 0$ untuk $t = \infty$ atau $t \neq 0$

b). $\delta(t)$ tak terdefinisikan untuk $t = 0$

c). $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \; dt = 1$

Maksud dari definisi di atas adalah bila t diambil cukup besar dan $t \neq 0$ maka luasan untuk $\delta(t) = 0$, tetapi bila t diambil $t = 0$, maka $\delta(t)$ tak terdefinisikan, tetapi bila diambil untuk suatu luasan dengan batas-batas dari sampai ∞ maka integral dari $\delta(t)$, akan tetapi bernilai satu (satu satuan luas).

Fungsi impuls/delta $\delta(t)$, secara kasar dapat dikatakan merupakan suatu pulsa yang mempunyai amplitud tak terbatas dan lamanya (duration) nol.

3.1.2. Konvolusi

Konvolusi adalah suatu cara khusus untuk menciri-kan hubungan masukan-keluaran dari sistem linier yang tak ubah waktu. Tinjau response impuls $h(t)$ diberikan seba-

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistem Linier}} \longrightarrow h(t)$$

Jika kita gunakan suatu impuls dengan pulsa k, maka berdasarkan sifat linier dari sistem adalah :

$$k\ \delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistem Linier}} \longrightarrow k\ h(t)$$

karena sistem tak ubah waktu maka :

$$k\ \delta(t-t_o) \longrightarrow \boxed{\text{Sistem Linier}} \longrightarrow k\ h(t-t_o)$$

Untuk mencari response (tanggapan) sistem terhadap suatu masukan sebarang u(t), maka kita nyatakan u(t) sebagai rentetan fungsi impuls (dengan menggunakan hampiran luasan bagi u(t) seperti pada sub bab 3.1.1) yaitu :

$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta)\left[\frac{1}{\Delta}\, p_{\Delta}(t-n\Delta)\right] \qquad (3\text{-}3)$$

subtitusi : $\frac{1}{\Delta}\, p_{\Delta}(t - n\Delta) = \delta(t- n\Delta)$ maka

$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta)\ \delta(t-n\Delta)\Delta$$

$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta)\ \delta(t-n\Delta)\Delta \ldots\ldots. \qquad (3\text{-}4)$$

Untuk mencari tanggapan (response) terhadap sistem impuls dari masukan dan keluaran yaitu :

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistem Linier}} \longrightarrow h(t))$$

karena sistem tak ubah waktu, maka :

$$\xrightarrow{u(t_o)\delta(t-t_o)} \boxed{\text{Sistem Linier}} \xrightarrow{u(t_o)h(t-t_o)}$$

Ambil $t_o = \Delta$ didapat :

$$\xrightarrow{\Delta u(\Delta)\ \delta(t-\Delta)} \boxed{\text{Sistem Linier}} \xrightarrow{\Delta u(\Delta)h(t-\Delta)}$$

diambil secara umum untuk $t_o = n\Delta$ maka :

$$\xrightarrow{\Delta u(n\Delta)\delta(t-n\Delta)} \boxed{\text{Sistem Linier}} \xrightarrow{\Delta u(\Delta)h(t-\Delta)\ =y(t)}$$

tanggapan (response) keseluruhan y(t) merupakan jumlahan dari tanggapan masing-masing yaitu :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u\ (n\Delta)\ h(t-n\Delta)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u\ (n\Delta)\ h(t-n\Delta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3\text{-}5)$$

bila diambil $\Delta \longrightarrow 0$ dan jumlah impulsnya bertambah $n \longrightarrow \infty$ sehingga $(n\Delta)$ menjadi variabel kontinue .

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u\ (\tau)\ h(t-\tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u\ (\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau$$

sehingg didapat suatu definisi.

Definisi 3.2.

Konvolusi dari dua fungsi u(t) dan h(t) adalah :

$$y(t) = u(t) * h(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}6)$$

tanda "*" artinya "dikonvolusi dengan"

3.1.3. Hubungan antara Tanggapan Tangga dan tanggapan Impuls

Tanggapan tangga dari suatu sistem linier yang ditunjukkan oleh $g(t)$ adalah keluaran yang dihasilkan dari masukan fungsi tangga $\xi(t)$.

Fungsi tangga satuan didefinisikan:

$$\xi(t) = 1 \qquad t \geq 0$$

$$\xi(t) = 0 \qquad t < 0$$

Secara perlambang, jika $H(.)$ menyatakan transformasi yang dilakukan oleh sistem linier, maka :

$$g(t) = H[\xi(t)]$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}7)$$

Karena $\xi(t) = 0$ untuk $t<0$, maka (3-7) dapat dituliskan sebagai impuls

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, d\tau \quad \ldots (3\text{-}8)$$

Persamaan (3-8) menyatakan bahwa tanggapan tangga dari sistem linier adalah integral dari tanggapan impuls. Secara umum (3-8) berlaku untuk masukan sebarang. Jika y(t) adalah tanggapan yang dihasilkan dari suatu masukan sebarang u(t), maka tanggapan yang dihasilkan dari $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, dt$ adalah $\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, dt$.

Tanggapan tangga g(t) ini dapat digunakan untuk mencirikan hubungan masukan-keluaran dari sistem linier. Tinjaulah konvolusi dari suatu masukan sebarang u(t) dengan tanggapan impuls h(t), yaitu :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \quad (3\text{-}9)$$

Integrasikan pembagian (3-9) dan gunakan (3-8), diperoleh :

$$y(t) = -u(\tau)\, g(t-\tau)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du(\tau)}{d\tau}\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du(\tau)}{d\tau}\, g(t-\tau)\, d\tau \quad \ldots(3\text{-}10)$$

asalkan bahwa u(t) dan g(t) adalah nol pada $t = \infty$

3.2. Tanggapan Frekuensi Sistem-sistem Waktu Kontinu

Tanggapan frekuensi dari sebuah sistem waktu-kontinu ditentukan oleh tanggapan impuls terhadap masukan e^{jwt}. Keluaran dari sebuah sistem linier yang berparameter tetap hanyalah amplitudo dan fase-fasenya yang termodifikasi oleh fungsi sistem H(jw) yang pada umumnya bernilai kompleks. Dengan |H(jw)| disebut amplitudo atau besar tanggapan dan argumen [H(jw)] adalah tanggapan fase.

Misalkan kita mempunyai sebuah sistem yang dilukiskan oleh persamaan diferensial

$$(b_n D^n + b_{n-1} D^{n-1} + \dots + b_1 D^1 + 1) \mid y(t) \mid =$$

$$| a_m D^m + a_{m-1} D^{m-1} + \dots + a_o | \mid u(t) \mid \quad \dots\dots\dots\dots (3\text{-}11)$$

Untuk suatu masukan $u(t) = e^{jwt}$ kita ketahui bahwa $H(jw)e^{jwt}$ adalah pemecahan tunak yang unik terhadap masukan $u(t) = e^{jwt}$,

$$H(jw) = \frac{a_o + a_1 jw + \dots + a_m (jw)^m}{1 + b_1 jw + \dots + b_n (jw)^n} \quad \dots\dots\dots (3\text{-}12)$$

Dengan perkataan lain, kita ketahui bahwa $y(t) = H(jw)e^{jwt}$, dengan $H(jw)$ yang diberikan oleh (3-12) memenuhi (3-11).

$$(b_n D^n + \dots + b_1 D + 1) \left[\frac{a_0 + a_1 jw + \dots + a_m (jw)^m}{1 + b_1 jw + \dots + b_n (jw)^n} e^{jwt} \right]$$

$$= \frac{a_0 + a_1 jw + \dots + a_m (jw)^m}{1 + b_1 jw + \dots + b_n (jw)^n} \left[b_n (jw)^n + b_{n-1} (jw)^{n-1} + \dots + 1 \right] = e^{jwt}$$

$$= \left[a_0 + a^1 jw + \dots a^m (jw)^n \right] e^{jwt}$$

$$= \left[a^m D^m + a^{m-1} D^{m-1} + \ldots a^0 \right] \left[e^{jwt} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}13)$$

Selanjutnya ini adalah satu-satunya pemecahan khususnya. Oleh karena itu $H(jw)\, e^{jwt}$ adalah pemecahan impuls terhadap masukan $u(t) = e^{jwt}$. Persamaan (3-12) ini memungkinkan kita untuk menghitung $H(jw)$ secara langsung dari model persamaan diferensial.

Perlu diingat bahwa fungsi-fungsi tanggapan frekuensi didefinisikan hanya untuk sistem-sistem tak ubah-waktu.

3.3. Transformasi Fourier

Teorema 3.1. :

Suatu fungsi $f(t)$ yang tak periodik dapat dinyatakan dengan suatu transformasi Fourier, yaitu :

$$F(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-jwt}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}14)$$

dimana $f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(jw)\, e^{jwt}\, dt$

dengan menganggap fungsi $f(t)$ periodik dengan periode tak terhingga.

Bukti :

Tinjau deret eksponensial

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Cn\, e^{jwt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}15)$$

dimana $Cn = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-jnwot}\, dt$

dan $w_o = 2\pi/T$

ambil $T = \infty$, maka untuk $\lim\limits_{T \to \infty} 2\pi/T = w_o$, w_o akan

bernilai sangat kecil sehingga dinyatakan dengan w_o

sehingga :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} = \frac{w_o}{2\pi}$$

akhirnya frekuensi sekarang harmonik n w_o haruslah menunjukkan variabel frekuensi umum yang menggambarkan spektrum kontinu.

Dengan kata lain n harus menjadi tak terhingga untuk w_o mendekati nol sehingga perkaliannya terbatas didapat

$$nw_o = w$$

maka :

$$CnT = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

Ruas kanan ini adalah fungsi dari w (bukan dari t) kemudian dinyatakan dengan F(jw) sehingga :

$$F(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

demikian untuk mencari f(t)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Cn\, e^{jnwot} \cdot \frac{T}{T} = \sum_{-\infty}^{\infty} Cn\, T\, e^{jnwot} \cdot \frac{1}{T}$$

subtitusi

$$Cn\ T = F(jw); \quad nw_o = w \ , \quad \frac{1}{T} = \frac{w_o}{2\pi}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(jw)\, e^{jwt}\, \frac{w_o}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(jw)\, e^{jwt}\, w_o$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(jw)\, e^{jwt}\, dw \; .... \text{(terbukti)}$$

Selanjutnya digunakan simbol untuk F(jw) dengan £{ }, sedangkan untuk f(t) dengan $£^{*}$\{ \} sebagai transformasi balik.

Hubungan pasangan transformasi Fourier adalah untuk f(t) diketahui terdapat satu F(jw) dan untuk F(jw) yang diketahui terdapat suatu f(t).

3.4. Sifat-siat Transformasi Fourier

3.4.1. Simetris

Teorema 3.2. :

Suatu fungsi variabel t, f(t) dengan hubungan transformasi F(jw) berlaku $2\pi f(-w)$ memiliki hubungan transformasi F(jt).

Bukti :

Dengan menggunakan teorema 3.1. diambil f(t) yaitu :

$$f(t) = \frac{}{2\pi} \int_{-\infty}^{} F(jw)\ e^{jwt}\ dw$$

digandakan dengan 2π dan subtitusi $t = -t$ diperoleh :

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jw)\ e^{-jwt}\ dw$$

$$2\pi f(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt)\ e^{-jwt}\ dt = \mathcal{F}\{F(jt)\}$$

$2\pi f(-w) \Leftrightarrow F(jt)$ terbukti.

3.4.2. Kelinieran

Teorema 3.3. :

Suatu transformasi Fourier adalah operasi linier jika fungsi $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ memiliki hubungan tansformasi $F_1(jw)$ fan $F_2(jw)$ maka untuk a,b sebarang berlaku :

$$af_1(t) + bf_2(t) \longleftrightarrow aF_1(jw) + bF_2(jw). \quad (3\text{-}16)$$

Bukti :

Dengan menggunakan teorema 3.1. diketahui bahwa pasangan transformasi $f(t)$ adalah $F(jw)$, yaitu:

$$f(t) \longleftrightarrow F(jw)$$

ambil $f_1(t)$ dan $f_2(t)$, dan sebarang konstanta a, b maka :

$$a\ f_1(t) + b\ f_2(t) = a\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-jwt}\ dt + b\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\ e^{-jwt}dt$$

$$= a\ F_1(jw) + b\ F_2(jw) \quad \text{(terbukti)}$$

3.4.3. Konvolusi

3.4.3.1. Konvolusi waktu

Teorema 3.4. :

Jika suatu fungsi variabel t yaitu x(t) dan h(t)

H(jw) maka berlaku :

x(t) * h(t) memiliki hubungan transformasi

$$Y(jw) = X(jw) \,.\, H(jw) \quad \text{.....................} \quad (3\text{-}17)$$

Bukti :

Dengan menggunakan definisi 3.2 yaitu integral konvolusi kemudian dikenakan transformasi Fourier dengan menggunakan teorema 3.1.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t - \tau)\, d\tau$$

$$E\left[\, y(t) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t - \tau)\, d\tau \right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)\, e^{-jwt}\, dt \right] d\tau$$

maka $a = t - \tau$ sehingga $da = dt$, $t = a + \tau$.

$$E\left[y(t) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(a)\, e^{jw(a+\tau)}\, da \right] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-jw\tau}\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(a) e^{-jwa}\, da$$

$$Y(jw) = X(jw) \,.\, H(jw) \qquad \text{(terbukti)}$$

Teorema 3.5. :

Jika suatu fungsi dengan variabel t, f(t) dan g(t) memiliki hubungan transformasi yaitu F(jw) dan G(jw), maka untuk f(t) . g(t) memiliki hubungan transformasi

$$\frac{F(jw) * G(jw)}{2\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}18)$$

Bukti :

Dengan menggunakan teorema 3.1 yaitu bila F(jw) diketahui, maka f(t) dapat ditentukan dan sebaliknya.

Tinjau transformasi dari $\dfrac{F(jw) * G(jw)}{2\pi}$ didapat :

$$£^{*}\left[\frac{F(jw) * G(jw)}{2\pi}\right] = \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwt}\ F(jw)\ G(jw-ju)du\ dw$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(jw) \int_{-\infty}^{\infty} G(jw-ju)e^{-jwt}\ du\ dw$$

misal x = w − u, dx = dw dan w = x +u diperoleh :

$$£^{*}\left[\frac{F(jw) * G(jw)}{2\pi}\right] = \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(ju) \int_{-\infty}^{\infty} G(jx)e^{j(x+u)t} dx\ du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(ju)e^{jut}\ du \ . \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(jx)\, e^{jxt}\, dx$$

$$= f(t)\ .\ g(t) \text{ terbukti.}$$