# MATERI DASAR

## 2.1. Proses Stasioner

Definisi 2.1. :

> Proses $x(t)$ disebut stasioner dalam arti tegas bila sifat-sifat statistiknya invarian terhadap pergeseran titik awal.
>
> Ini berarti bahwa proses $x(t)$ dan $x(t+c)$ mempunyai statistik yang sama untuk sebarang c.

Dari definisi terlihat bahwa kepadatan tingkat ke-n proses stasioner dalam arti tegas harus sedemikian sehingga :

$$f(x_1, \ldots x_n;\ t_1, \ldots t_n) = f(x_1, \ldots x_n;\ t_1+c, \ldots t_n+c)$$

Dari bentuk di atas, maka $f(x;t) = f(x;t+c)$ untuk sebarang c. Karena itu kepadatan tingkat pertama $x(t)$ tidak tergantung pada t atau independen dengan t.

$$f(x;t) = f(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}1)$$

Sehingga mean dari proses $x(t)$ adalah konstan.

Sebagai bukti :

Misal : $x(t_1)$ dan $x(t_2)$ akan mempunyai mean sama

$$E\{x(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x;t_1)\ dx$$

$$E\{x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x;t_2)\ dx$$

Misal : $t_2 = t_1 + \epsilon$, maka

$$E\{x(t_2)\} = E\{\ x(t_1+\epsilon)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x_1;t_1+\epsilon)\ dx$$

$$E\{x(t_1+\epsilon)\} = \int_{-\infty} x\, f(x;t_1)\, dx = E\{(x;t_1) = \eta$$

terbukti.

Dengan pemikiran yang sama :

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_1 + c, t_2 + c) \quad .(2\text{-}2)$$

Ini membawa kesimpulan bahwa fungsi kepadatan tingkat kedua hanya tergantung pada selisih waktu :

$$t_1 - t_2 = \tau$$

Demikian

Diambil $c = -t_2$ dari (2-2) diperoleh :

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_1 - t_2) = f(x_1, x_2; \tau).$$

## 2.2. Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik $\Phi_x(w)$ atau $\Phi(w)$ dari variabel random x adalah transformasi faurier dari fungsi kepadatannya f(x) (dengan pembalikan di dalam tandanya) dan digunakan untuk menyederhanakan operasi tertentu yang menyangkut x, misalnya untuk evaluasi moment dari x, untuk evaluasi kepadatan g(x), untuk menyederhanakan operasi konvolusi diantara dua kepadatan menjadi operasi penggandaan dari transformasinya.

Definisi 2.2. :

Fungsi karakteristik dari variabel random x diberikan dengan :

Ini adalah harga harapan dari fungsi kompleks dari x.

$$e^{jwx} = \cos wx + j \sin wx$$

Dengan demikian harga harapan di atas misal x continus adalah

$$\Phi(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} f(x)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}4)$$

dan jika x bertipe diskret dengan harga $x_k$, maka

$$\Phi(w) = \sum_k e^{jwxk} P\{x = x_k\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}5)$$

Jika x bertipe lattice dengan harga $c_k$, maka :

$$\Phi(w) = \sum_k e^{jwc_k} P\{x = c_k\}$$

adalah periodik dengan periode $^{2\pi}/C$

Fungsi karakteristik kedua dari variabel random x diberikan :

$$\Psi(w) = \ln \Phi(w) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}6)$$

Catatan bahwa :

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \text{ ,oleh karena itu } \Psi(0) = 0 \quad (2\text{-}7)$$

dan jika $f(x) \geq 0$ diperoleh :

$$|\ \Phi(w)\ | = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{jwx}\, dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Dengan demikian $|\ \Phi(w)| \leq 1$ ................ (2-8)

menarik untuk diperhatikan, bahwa jika $w \neq 0$,maka

$$|\ \Phi(w)\ | < 1$$

kecuali jika x adalah tipe lattice yaitu jika untuk suatu $w_1$,diperoleh $|\ \Phi(w)\ | = 1$, maka x nilai-nilainya membentuk suatu progres aritmatik.

diperoleh :

$$E\{e^{jwy}\} = E\{e^{jw(ax+b)}\} = e^{jwb}\,E\{e^{jwax}\}$$

Tetapi nilai harapannya sama seperti (2-3) dengan w diperluas menjadi aw yaitu sama dengan $\Phi_x(aw)$.

Oleh karena itu $\Phi_y(w) = e^{jwb}\,\Phi_x(aw)$ .........(2-9)

2.2.1. Momen

Definisi 2.3

Momen variabel variabel randum x didefinisikan sebagai

$$mk = E\{x^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx \qquad k=0,1...$$

untuk $k = 0$ maka $m_o = 1$

$k = 1$ maka $m_1 = E\{x\} = \eta$

$k = 2$ maka $m_2 = E\{x^2\}$

Sedang momen sentral disekitar m didefinisikan sebagai :

$$\mu k=E\{(x-m)^k\} = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^k f(x)dx$$

Jika diberikan dua variabel random x dan y maka momen gabungan tingkat k+r = n didefinisikan sebagai

$$\mu kr = E\{x^k y^r\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^r\, f(x,y)dxdy$$

Jadi $m_{10} = \eta x$, $m_{01} = \eta y$ adalah momen tingkat pertama dan $m_{20} = E\{x^2\}$, $m_{11} = E\{xy\}$ $m_{02} = E\{y^2\}$ adalah momen tingkat kedua.

## 2.3. Titik Poisson

Untuk menunjukkan titik-titik $t_i$ yang merupakan titik-titik Poisson, dapat ditentukan dari sifat-sifat

1. Jumlah $n(t_1, t_2)$ titik-titik $t_i$ dalam interval $(t_1,t_2)$ dengan panjang $t = t_2 - t_1$, adalah variabel random Poisson dengan parameter $\lambda t$.

$$P\{n(t_1,t_2) = k\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}10)$$

2. Bila interval $(t_1,t_2)$ dan $(t_3,t_4)$ saling asing maka variabel random $n(t_1,t_2)$ dan $n(t_3,t_4)$ independen.

## 2.4. Distribusi Poisson

Misal x variabel random bertipe diskret adalah berdistribusi Poisson dengan parameter a, bilamana x bernilai bulat dan memiliki sifat :

$$P\{x = k\} = \frac{e^{-a} \cdot a^k}{k!}, \; k = 0,1,2\ldots \quad \ldots\ldots\ldots (2\text{-}11)$$

Fungsi karakteristik dari variabel random x adalah diberikan dengan :

$$\Phi(w) = E\{e^{jwx}\}$$

Untuk variabel random x bertipe diskret yang nilai-nilainya dinyatakan dengan $x_k$ fungsi karakteristiknya

$$\Phi(w) = \sum_k e^{jwxk} P\{x = x_k\}$$

maka :

$$\Phi(w) = e^{a(e^{jw}-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}12)$$

dan mean, variansi diberikan dengan

$$E(x) = a \quad \sigma^2 = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}13)$$

Jika variabel random x dan y adalah independent dan berdistribusi Poisson dengan parameter $a_1$ dan $a_2$, maka jumlahannya :

$$\tau = x + y$$

adalah juga berdistribusi Poisson dengan parameter :

$$a = a_1 + a_2$$

Dengan demikian fungsi karakteristik dari variabel random $c_x$ diberikan oleh :

$$E\{e^{jwcx}\} = \Sigma \frac{e^{-a} a^k}{k!} e^{jckw} = \exp a(e^{jwc} - 1) \qquad \text{..........................} \quad (2\text{-}14)$$

Pandang n variabel random independent.

$$x_1, \ldots, x_n$$

Pandang bahwa jika variabel random tersebut bertipe nol-satu dengan :

$$P\{x_i = 1) = p_i \quad P\{x_i = 0\} = q_i = 1 - p_i \quad i = 1, .., n$$

dan jika untuk setiap i

$$p_i \leq 1$$

maka jumlahannya :

$$x = x_1 + \ldots + x_n$$

adalah sebuah variabel random berdistribusi Poisson dengan parameter :

$$a = p_1 + \ldots + p_n$$

Kesimpulan di atas berlaku dengan syarat

Dari pernyataan di atas dapat disederhanakan dengan memakai fungsi karakteristik. Fungsi karakteristik dari $x_i$ adalah :

$$\Phi(w) = p_i\, e^{jw} + q_i$$

untuk $p_i \leq 1$ diperoleh :

$$e^{p_i(e^{jw} - 1)} \simeq 1 + p_i(e^{jw} - 1) =$$

$$p_i e^{jw} + q_i = \Phi(w)$$

Dengan demikian variabel random nol-satu $x_i$ adalah mendekati distribusi Poisson dengan parameter $p_i$. Ini tak mengherankan, karena dalam (2-11) peluang x melebihi 1 adalah diberikan oleh :

$$P\ \{x > 1\} = 1 - e^{-a} - ae^{-a}$$

dan ini adalah order/tingkat dari $a^2$

Jika variabel random $x_i$ adalah independent, fungsi karakteristik dari jumlahnya adalah hasil kalinya.

$$\Phi(w) = \Phi_i(w) \ \ldots\ldots\ \Phi_n(w) =$$

$$e^{(p_i + \ldots + p_n)(e^{jw} - 1)}$$

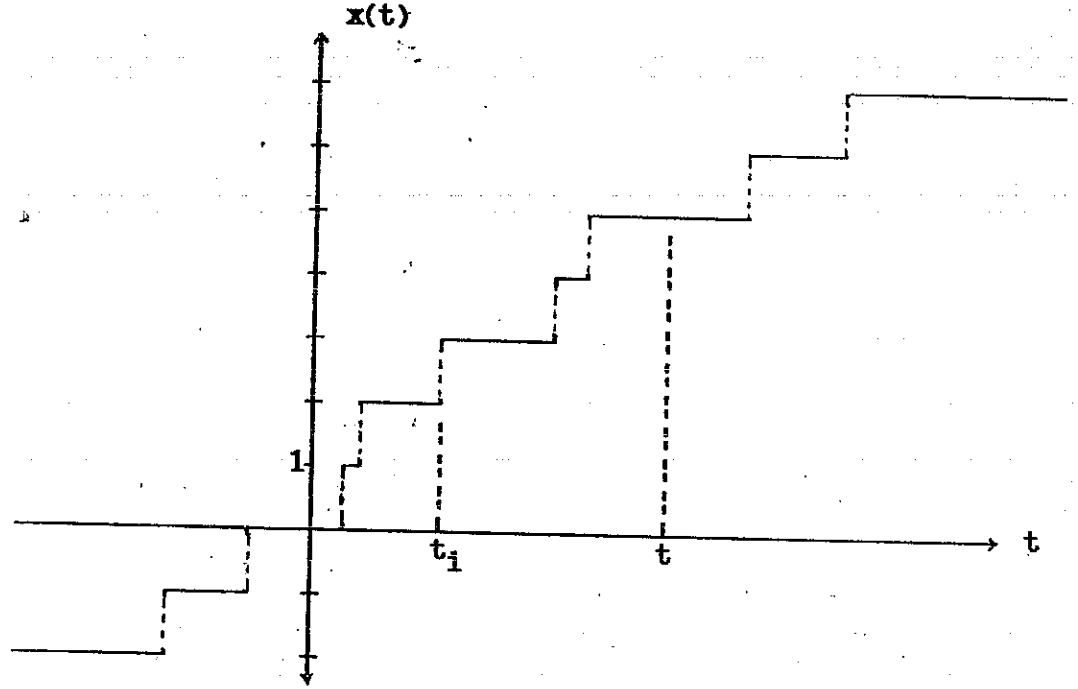
## 2.5. Proses Poisson

Proses Poisson didefinisikan suatu proses keadaan diskret yang terdiri dari keluarga fungsi tangga naik dalam interval dengan panjang t sama dengan :

$$\frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$

dan titik itu dalam interval terbuka adalah independent.

Sekarang akan didefinisikan x(t) sebagai berikut : Diasumsikan bahwa $x(0) = 0$ dan $x(t_1) - x(t_2)$ sama dengan penjumlahan dari titik-titik dalam interval $(t_2, t_1)$.




Gambar. (2-1)

Dengan jelas, x(t) adalah suatu proses Poisson dengan memperhatikan gabungan fungsi di atas.

Keterangan gambar :

berbentuk suatu tangga (Gb 2-1) dengan tiap langkah bertambah satu untuk tiap titik random $t_i$. Untuk tiap t, x(t) sama dengan jumlahan titik-titik dalam interval (0, t). Dengan demikian x(t) adalah variabel random berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda t$.

### 2.5.1. Statistik dari x(t) untuk keadaan seragam

Diberikan $t_a$ dan $t_b$ variabel random

$$x(t_a) - x(t_b) \quad t_a > t_b$$

adalah berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda(t_a - t_b)$:

$$P\{x(t_a) - x(t_b) = k\} = e^{-\lambda(t_a - t_b)} \frac{[\lambda(t_a - t_b)]^k}{k\,!}$$

Oleh karena itu :

$$E\{x(t_a) - x(t_b)\} = \lambda(t_a - t_b) \ldots\ldots\ldots (2\text{-}15)$$

$$E\{[x(t_a) - x(t_b)]^2\} = \lambda^2(t_a-t_b)^2 + \lambda(ta-tb) (2\text{-}16)$$

Jika $t_a > t_b > t_c > t_d$, maka variabel random $x(t_a) - x(t_b)$ dan $x(t_c)-x(t_d)$ adalah independent (jumlahan titik-titik dalam interval berimpit) karena itu :

$$E\{[x(t_a)-x(t_b)][x(t_c)-x(t_d)]\}=\lambda^2(t_a-t_c)(t_a-t_d) \ldots\ldots (2\text{-}17)$$

$t_d$ $t_b$ $t_c$ $t_a$

Gambar 2-2

Jika $t_a > t_c > t_b > t_d$ maka interval $(t_b\ ;\ t_a)$ dan $(t_d\ ;\ t_c)$ berimpit (Gb. 2-2), karena itu dengan subtitusi :

$$x(t_a) - x(t_b) = \left[x(t_a) - x(t_c)\right] + \left[x(t_c - x(t_b)\right]$$

$$x(t_c) - x(t_d) = \left[x(t_c) - x(t_b)\right] + \left[x(t_b) - x(t_d)\right]$$

Dari persamaan (2-16) dan (2-17) diperoleh :

$$E\left[\left[x(t_a) - x(t_b)\right]\left[x(t_c) - x(t_d)\right]\right] = \lambda^2(t_a - t_b)(t_c - t_d) + \lambda(t_c - t_b) \quad \ldots (2\text{-}18)$$

Perlu diperhatikan bahwa $t_c - t_b$ adalah panjang dari bagian interval berimpit $(t_b, t_a)$ dan $(t_d, t_c)$.

### 2.5.1.1. Mean dan Autokorelasi x(t)

Apabila notasi mean dan autokorelasi dari $x(t)$ adalah $E(x(t)\}$ dan $R(t_1, t_2)$, maka akan ditentukan :

$$E\{x(t)\} = \lambda t \ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}19)$$

$$R(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2) = \begin{cases} \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \geq t_2 \\ \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \leq t_2 \end{cases} \quad (2\text{-}20)$$

Berdasarkan persamaan (2-18) dengan subtitusi $t_a = t$, $t_b = 0$, **maka akan diperoleh :**

$$(2\text{-}15)\quad E\left[\, x(t_a) - x(t_b) \right] = \lambda(t_a - t_b)$$

$$E\left[\, x(t) - x(0) \right] = \lambda(t - 0)$$

$$E\left[\, x(t) \,\right] = \lambda t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2\text{-}19)$$

Untuk membuktikan persamaan (2-20) adalah dengan memandang persamaan (2-18) dengan subtitusi $t_a = t_1$, $t_c = t_2$, $t_b = t_d = 0$ untuk $t_1 \geq t_2$ dan subtitusi $t_a = t_2$, $t_c = t_d = 0$ untuk $t_1 \leq t_2$.

$$E\left[\left[x(t_a) - x(t_b)\right]\left[x(t_c) - x(t_d)\right]\right] = \lambda^2(t_a - t_b)(t_c - t_d) + \lambda(t_c - t_b)$$

$$E\left[\left[x(t_1)-x(0)\right]\left[x(t_2)-x(0)\right]\right] = \lambda^2(t_1-0)(t_2-0)+\lambda(t_c-0)$$

$$E\left[x(t_1)\; x(t_2)\right] = \lambda^2\, t_1 t_2 + \lambda\, t_2$$

$$E\left[\left[x(t_a) - x(t_b)\right]\left[x(t_c) - x(t_d)\right]\right] = \lambda^2(t_a - t_b)(t_c - t_d) + \lambda(t_c - t_b)$$

$$E\left[\left[x(t_2)-x(0)\right]\left[x(t_1)-x(0)\right]\right] = \lambda^2(t_2-0)(t_1-0)+\lambda(t_1-0)$$

$$E\left[x(t_2)\,x(t_1)\right] = \lambda^2 t_2 t_1 + \lambda t_1 \ldots\ldots\ldots \quad t_1 \leq t_2$$

Jadi $R(t_1,t_2) = E\left\{x(t_1)x(t_2)\right\}$ $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$

$$= \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 \ldots\ldots\ldots \quad t_1 \geq t_2$$
$$\lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 \ldots\ldots\ldots \quad t_1 \leq t_2$$

(2-20)

## 2.5.1.2. Keadaan Tak Seragam x(t)

Jika titik-titik random $t_1$ tak seragam mempunyai fungsi kepadatan $\lambda(t)$, maka proses $x(t)$ mempunyai mean $\lambda t$ dalam interval $(t_1, t_2)$ sama dengan :

$$E\left[x(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\ dt$$

Karena proses Poisson $x(t)$ berlaku dalam interval $(0,t)$ maka mean $x(t)$ keadaan tak seragam menjadi :

$$E\left[x(t)\right] = \int_0^t \lambda(\tau)\ d\tau \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}21)$$

Untuk $t_1 > t_2$ bisa ditentukan autokorelasi

$$R(t_1,t_2) = \int_0^{t_2} \lambda(t)\ dt \left[\ 1 + \int_0^{t_1} \lambda(t)\ dt\right] \ldots \quad (2\text{-}22)$$

Untuk $t_1 < t_2$

$$R(t_1,t_2) = \int_0 \lambda(t)\,dt \left[ 1 + \int_0 \lambda(t)\,dt \right] \;\ldots\; (2\text{-}23)$$

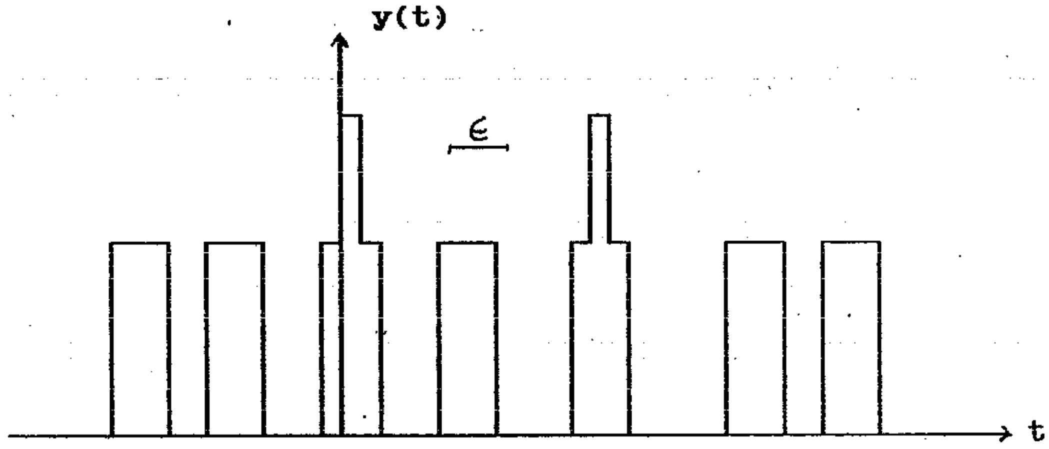
### 2.5.2. Increment Poisson

Dengan memandang x(t) sebuah proses Poisson dan diberikan konstanta $\epsilon \geq 0$ kita definisikan proses baru

$$y(t) = \frac{x(t+\epsilon) - x(t)}{\epsilon} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2\text{-}24)$$

Andai k adalah jumlahan dari titik-titik dalam interval $(t,\ t+\epsilon)$ maka dengan jelas y(t) sama dengan $k/\epsilon$.

Perhatikanlah gambar di bawah ini :




Sehingga :

$$P\left[\, y(t) = k/\epsilon \,\right] = \frac{e^{-\lambda\epsilon}(\lambda\epsilon)^k}{k!} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2\text{-}25)$$

$$E\left[y(t)\right] = \frac{1}{\epsilon}\, E\left[x(t+\epsilon)\right] - \frac{1}{\epsilon} E\left[x(t)\right] = \lambda \quad (2\text{-}26)$$

Untuk menentukan autokorelasi $R(t_1,t_2)$ dari y(t) dapat

Jika $t_1 > t_2 + \epsilon$ , maka interval $(t_1+\epsilon\ ,t_1)$ dan $(t_2+\ \epsilon,t_2)$ saling lepas, karena itu persamaan (2-17) menjadi :

$$E\left[\epsilon^2 y(t_1)\ y(t_2)\right] = \lambda^2\epsilon^2$$

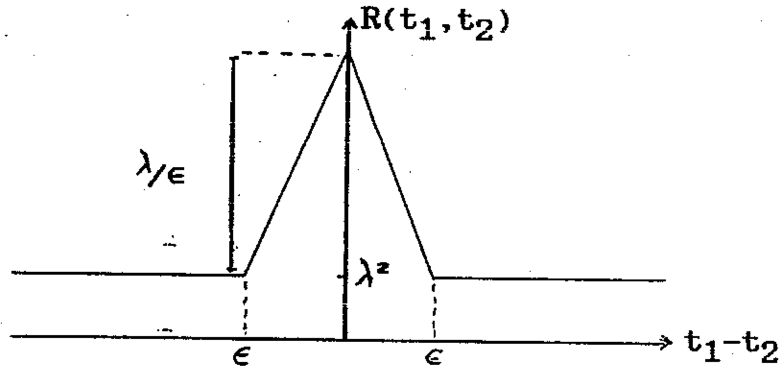
Jika $t_2 < t_1 < t_2 + \epsilon$, maka interval berimpit dengan $-\lambda(t_1-t_2)$, lihat gambar di bawah ini :


Karena itu persamaan (2-18) menjadi :

$$E\left[\epsilon^2 y(t_1)\ y(t_2)\right] = \lambda^2\epsilon^2 + \lambda\left[\epsilon - (t_1 - t_2)\right]$$

Untuk $t_1 < t_2$ didapat hasil yang sama. Dengan demikian

$$R(t_1,t_2) = \begin{cases} \lambda^2 & |t_1-t_2| > \epsilon \\ \lambda^2 + \dfrac{\lambda}{\epsilon} - \dfrac{\lambda|t_1-t_2|}{\epsilon^2} & |t_1-t_2| < \epsilon \end{cases} \quad .(2\text{-}27)$$



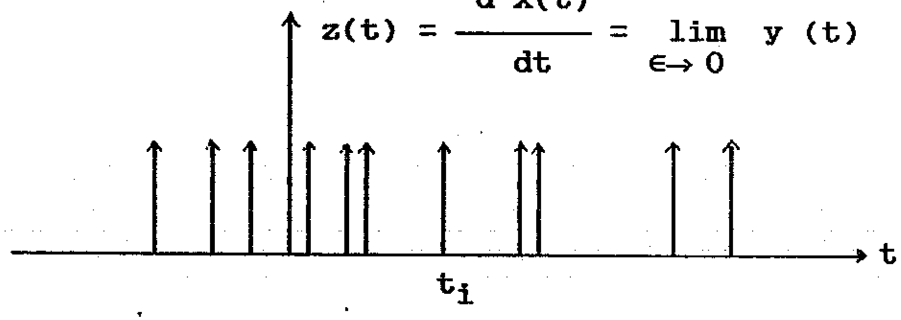

Gb. 2-4

Dari gambar 2-4 didapatkan grafik $R(t_1,\ t_2)$ sebagai fungsi dari $|t_1-t_2|$. Fungsi ini adalah jumlahan dari segitiga itu menunjukkan impulse $\delta(t_1 - t_2)$.

### 2.5.3. Impulse Poisson

Dengan $t_i$ titik-titik random dalam satuan waktu, kita bentuk proses stochastic :

$$z(t) = \sum_i \delta(t-t_i)$$




Proses ini konsisten barisan dari impulse seperti pada gambar di atas pada titik-titik $t_i$

$$z(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \to 0} y\,(t)$$

dimana x(t) dan y(t) fungsi-fungsi yang didefinisikan di sub bab sebelumnya.

Akan ditunjukkan bila z(t) stasioner, jika mean kita lambangkan $\eta_z$ dan autokortelasi dengan $R_{zz}$ maka mean

$$\eta_z = \lambda \quad \ldots (1) \text{ dan autokorelasi}$$

$$R_{zz}(\tau) = \lambda^2 + \delta(\tau) \quad \ldots\ldots (2)$$

Bukti :

$$\eta_{z(t)} = \eta_{x'(t)} = L\,[x(t)]$$

karena $z(t) = x'(t)$ dan $\eta_{x(t)} = \lambda\, t$, maka

$$\eta_{z(t)} = \lambda$$

Untuk membuktikan persamaan (2) lihat persamaan (2-20) sama dengan :

$$R(t_1,\ t_2) = \begin{cases} \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 \ \ldots\ldots\ldots & t_1 \geq t_2 \\ \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 \ \ldots\ldots\ldots & t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

Sekarang persamaan (2-20) disederhanakan

$$R(t_1,\ t_2) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2$$

$$= \lambda t_1 + \lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1 \lambda (t_2 - t_1)$$

$$R_{xx}(t_1,t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min (t_1,t_2)$$

karena $z(t) = x'(t)$ maka :

$$R_{xz}(t_1,t_2) = \frac{\delta R_{xx}(t_1,t_2)}{t_2} = \lambda^2 t_1 + \lambda u(t_1 - t_2)$$

$$R_{zz}(t_1,t_2) = \frac{\delta R_{xx}(t_1,t_2)}{t_1} = \lambda^2 + \lambda \delta(t_1 - t_2)$$

Sedemikian hingga $R_{zz}(\tau) = \lambda^2 + \lambda \delta(\tau)$

$$R_{xx'}(t_1,t_2) = \frac{\delta R_{xx}(t_1,t_2)}{\delta t_2}$$

$$R_{x'x'}(t_1,t_2) = \frac{\delta R_{xx'} t_1,t_2)}{\delta t_2}$$