2.1. Turunan Parsiil

Di dalam pendugaan nilai-nilai parameter pupolasi statistik atau model rancangan percobaan digunakan turunan parsiil.

Definisi 2 .1 :

Turunan parsiil ke-x suatu fungsi dua variable $z = f(x,y)$, dinotasikan $\frac{\partial z}{\partial x}$ adalah turunan ke-x fungsi dua variable $z = f(x,y)$ yang mana variable selain x dipandang sebagai konstanta, dirumuskan :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Akibat definisi 2.1 :

Apabila $z = f(x,y)$ diturunkan parsiil terhadap y, variable x dipandang sebagai konstanta, dirumuskan :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Definisi *2.1* dapat diperluas untuk fungsi dengan lebih dari dua variable. Turunan parsiil ke-dua dari fungsi $z = (x,y)$ dinotasikan :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Syarat ada harga ektrim dua variable adalah :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

dengan ketentuan :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0, \text{ ekstrim minimum.}$$

Dalam menganalisa suatu rancangan percobaan perlu diketahui beberapa pengertian atau definisi-definisi mengenai data statistik. Secara singkat definisi dari data statistik disajikan sebagai berikut :

Definisi 2.2 :

Definisi : Populasi adalah keseluruhan pengamatan yang menjadi perhatian.

Definisi : Sample adalah pengamatan yang merupakan himpunan bagian dari populasi.

Definisi 2.3. :

Jika $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_N$ adalah sekelompok data yang menyusun suatu populasi berhingga berukuran N dan tidak harus semuanya berbeda, maka rata-rata populasi adalah :

$$\mu = \frac{\sum_{i=1} x_i}{N}$$

Definisi 2.4 :

Jika $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ adalah sekelompok data yang merupakan sample berhingga berukuran n dan tidak harus semuanya berbeda, maka rata-rata sample adalah :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Definisi 2.5 :

Jika $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_N$ merupakan populasi berhingga dengan ukuran N, maka varians dari populasi adalah :

Definisi 2.6 :

Jika $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ sebarang sample acak berukuran n, maka varians dari sample populasi adalah :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

2.3. Variable acak, nilai harapan, dan varians

Beberapa pengertian tentang variable yang perlu diketahui, yaitu :

1. *Variable acak*

   Yang dimaksud variable acak adalah suatu kejadian (event) yang diucapkan dalam bentuk bilangan nyata.

2. *Variable acak diskrit*

   Yang dimaksud variable acak diskrit adalah variable acak yang hanya dapat dinyatakan dengan nilai-nilai atau harga-harga terbatas jumlahnya.

3. *Variable acak kontinu*

   Yang dimaksud variable acak kontinu adalah variable acak yang mempunyai nilai atau harga berupa interval.

Definisi 2.7 :

Jika X adalah variable acak diskrit yang mengambil nilai-nilai yang berbeda $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots$ *maka* fungsi :

$$f(x) = P\ (X = x_i),\ \text{untuk } i = 1, 2, \ldots\ldots, n, \ldots.$$

Definisi 2.6 :

Jika $x_1, x_2, \ldots\ldots. x_n$ sebarang sample acak berukuran n, maka varians dari sample populasi adalah :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

2.3. Variable acak, nilai harapan, dan varians

Beberapa pengertian tentang variable yang perlu diketahui, yaitu :

1. *Variable acak*

   Yang dimaksud variable acak adalah suatu kejadian (event) yang diucapkan dalam bentuk bilangan nyata.

2. *Variable acak diskrit*

   Yang dimaksud variable acak diskrit adalah variable acak yang hanya dapat dinyatakan dengan nilai-nilai atau harga-harga terbatas jumlahnya.

3. *Variable acak kontinu*

   Yang dimaksud variable acak kontinu adalah variable acak yang mempunyai nilai atau harga berupa interval.

Definisi 2.7 :

Jika X adalah variable acak diskrit yang mengambil nilai-nilai yang berbeda $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots$ *maka* fungsi :

$$f(x) = P\,(X = x_i), \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots\ldots, n, \ldots.$$

mengambil nilai x_i.

Definisi 2.8 :

Jika X adalah variable acak diskrit dengan fungsi kepekatan peluang $f(x_i)$ maka nilai tengah atau nilai harapan (expected value) dari x didefinisikan :

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, f(x_i)$$

Definisi 2.9 :

Jika X adalah variable acak kontinu, maka $f(x)$ dikatakan sebagai fungsi kepekatan peluang dari X, jika memenuhi :

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = P(a \leq x \leq b)$$

dimana $f(x)$ merupakan elemen probabilitas (peluang yang berkaitan dengan suatu selang yang kecil dari suatu variable yang kontinu) dari $P(a \leq x \leq b)$ berarti probabilitas bahwa x terletak dalam selang a sampai b.

Definisi 2.6 :

Jika $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_r$ variable acak x berukuran r dan $f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots, f(x_r)$ adalah fungsi kepekatan peluang berserikat dari X, maka $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_r$ independen bhb :

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_r) = \prod_{i=1}^{r} f(x_i)$$

Beberapa sifat penting dari nilai harapan, antara

2. $E(ax) = aE(x)$; a = konstanta

akibatnya $E(ax^2) = a\,E(x^2)$

3. $E(\prod_{i=1}^{r} x_i) = \prod_{i=1}^{r} E(x_i)$, dimana x_i adalah variable acak yang independen

4. $E[\sum_{i=1}^{r} x_i] = \sum_{i=1}^{r} E(x_i)$.

Definisi 2.11 :

Jika x adalah variable acak maka penyebaran dari nilai-nilai x disekitar nilai harapan didefinisikan sebagai :

$$\text{Varians } (x) = \text{var } (x) = \sigma_x^2 = E[x - E(x)]^2$$

Akibat dari definisi 2.8 dan definisi.2.11, maka

$$\sigma_x^2 = E(x-\mu)^2$$

Definisi 2.12 :

Simpangan baku dari variable acak x didefinisikan sebagai akar pangkat dua dari varians (x), atau dirumuskan :

$$\sigma_x^2 = \sqrt{\text{var}(x)} = \sqrt{E(x-\mu)^2}$$

Beberapa sifat penting dari varians antara lain :

1. $\text{Var } (x) = \sigma_x^2 = E(x-\mu)^2$

$$= E(x^2) - \mu^2$$

$$= E(x^2) - [E(x)]^2$$

2. $\text{Var } (a) = \sigma_x^2 = 0$, untuk setiap a = konstanta

3. Jika a dan b adalah konstanta, maka

$$\text{var } (ax) = a^2\ \text{var}(x)$$

5. Var $(ax \pm by) = a^2 \text{ var}(x) + b^2 \text{ var}(y)$

$$= a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2$$

dimana a, b = konstanta

x, y = variable acak independen

Beberapa fungsi dari variable acak :

Jika $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_r$ adalah variable acak x berukuran r, maka fungsi dari $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i$ adalah

1. $E\left[\sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{r} a_i E(x_i)$, dimana a_i konstanta

2. $\sigma^2\left[\sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{r} a_i^2 \sigma^2(x_i)$, dimana x_i independen

Definisi 2.13 :

Variable acak x dan y dikatakan independen bhb :

$$f(x,y) = g(x)\, h(y)$$

untuk semua kemungkinan nilai-nilai x dan y .

2.4. Distribusi normal dan distribusi-distribusi yang berhubungan

2.4.1. Distribusi normal

Distribusi ini merupakan distribusiterpenting yang digunakan dalam rancangan percobaan karena banyak data atau pengukuran diasumsikan mengikuti distribusi normal.

Definisi 2.14 :

Suatu variable acak kontinu X dikatakan berdistribusi normal jika fungsi kepekatan peluangnya mempunyai bentuk

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma}\right], \quad -\sim < x < \sim$$

dengan μ dan σ^2 merupakan parameter rata-rata dan varians dari distribusi normal, yang bernilai : $-\sim < \mu < \sim$ dan $0 < \sigma^2 < \sim$

$x \sim N(\mu,\sigma^2)$ maksudnya adalah variable acak kontinu x berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varians σ^2.

$x_i \sim DNI\ (0,\sigma^2)$ maksudnnya adalah variable acak x_i berdistribusi normal independen dengan rata-rata 0 dan varians σ^2.

2.4.2 Distribusi chi-kuadrat (χ^2)

Jika s^2 adalah varians dari sample acak berukuran n yang ditarik dari suatu populasi berdistribusi normal dengan varians σ^2, maka :

$$\chi^2_{(v)} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

merupakan sebuah nilai variable acak χ^2 yang berdistribusi Chi-kuadrat $v = n-1\ db$

2.4.3. Distribusi F

Definisi 2.16 :

Jika $\chi^2_{(v_1)}$ dan $\chi^2_{(v_2)}$ adalah dua variable acak, independen χ^2, maka :

$$F_{(v_1,v_2)} = \frac{\chi^2_{(v_1)}/v_1}{\chi^2_{(v_2)}/v_2}$$

2.4.4 Distribusi t

Definisi 2.17 :

Jika Z dan $\chi^2_{(v)}$ adalah variable acak independen (normal standar dan χ^2), maka :

$$t_{(v)} = \frac{Z}{\left[\chi^2_{(v)}/v\right]^{1/2}}$$

akan berdistribusi t dengan *db* v = $n-1$

2.5. Konsep pendugaan

Dalam analisa statistik, pendugaan digunakan untuk menaksir parameter populasi yang tidak diketahui seperti mean dan varians. Untuk menaksir yang tidak diketahui ini prosedur yang biasa dilakukan adalah mengasumsikan bahwa suatu sample acak dengan ukuran n dari distribusi probabilitas yang diketahui dan menggunakan data sample tadi untuk menaksir parameter atau pendugaan.

Definisi 2.18 :

Penduga (estimator) adalah anggota variable acak dari statistik yang digunakan untuk memperkirakan parameter populasinya.

Definisi 2.19 :

Nilai duga (estimate) adalah besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari sesuatu sample.

Penduga parameter θ adalah $\hat{\theta}$ yang merupakan fungsi nilai-nilai anggota variable acak yang diamati.

2.5.1. Penduga titik

Jika sebuah variable acak x yang mengikuti distribusi tertentu dengan nilai-nilai yang diamati $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ dan nilai-nilai pengamatan mempunyai peluang yang sama untuk diperoleh, maka nilai tengahnya :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x$$

dinamakan penduga titik (point estimate) dari nilai tengah populasi μ. Penduga titik ini seringkali ditulis $\hat{\mu}$ karena merupakan penduga dari μ. Sedangkan varians sample s^2 adalah penduga dari varians populasi σ^2, atau ditulis dengan $\hat{\sigma}^2$.

2.5.1.1 Sifat-sifat penduga

Definisi 2.21 :

Statistik $\hat{\theta}$ dikatakan penduga tak bias bagi parameter θ bila $\mu_{\hat{\theta}} = E(\hat{\theta}) = \theta$.

Definisi 2.22 :

Diantara semua kemungkinan penduga tak bias bagi parameter $\hat{\theta}$, yang variansnya terkecil adalah penduga paling effisien bagi θ.

Definisi 2.23 :

2.5.1.2. Pendugaan melalui metode kuadrat terkecil

Pada dasarnya cara kuadrat terkecil bertolak dari pengertian bahwa penduga yang baik dapat diperoleh melalui rata-ratanya dengan jumlah simpangan kuadratnya bernilai paling kecil.

Definisi 2.24 :

Bila pengamatan dari nilai duga suatu variable acak x_i adalah x_1, x_2, ..., x_n dan rata-rata populasinya adalah $E(x) = \mu$, maka jumlah kuadrat simpangan masing-masing pengamatan terhadap rata-rata μ, dinotasikan :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \text{ bernilai paling kecil.}$$

Sifat metode kuadrat terkecil :

Jumlah kuadrat simpangan merupakan fungsi kuadrat, agar fungsi tersebut mempunyai nilai minimum maka turunan parsiil pertama terhadap parameter sama dengan 0 dan turunan parsiil kedua terhadap parameter μ lebih besar dari 0.

$$\frac{\partial \sum_{i}^{n} (x_i-\mu)^2}{\partial\mu} = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2}{\partial\mu^2} > 0, \text{ minimum}$$

2.5.2. Pendugaan selang

$(1-\alpha)$, maka selang $B_1 < \theta < B_2$ disebut selang kepercayaan (interval confidensi) 100 $(1-\alpha)$% untuk parameter yang tidak diketahui θ, B_1 dan B_2 disebut batas kepercayaan bawah dan batas kepercayaan atas.

Definisi 2.26 :

Bila $x \sim NID(\mu,\sigma^2)$ dimana μ dan σ^2 tidak diketahui maka atas dasar pengamatan sample acak berukuran n, selang kepercayaan $(1-\alpha)$ untuk μ adalah :

$$\mathcal{P}\left[x - t_{(\alpha/2;n-1)} \sqrt{\frac{s^2}{n}} \le \mu \le x + t_{(\alpha/2;n-1)} \sqrt{\frac{s^2}{n}} = (1-\alpha)\right]$$

dimana $B = x \pm t(\alpha/2;\ n-1) \sqrt{\frac{s^2}{n}}$ adalah batas kepercayaan terendah dan tertinggi.

2.6. Pengujian Hipotesa

Pendugaan dan pengujian hipotesa merupakan dua hal yang saling berkaitan erat dalam statistik inferensial untuk membuat keputusan dan penarikan kesimpulan. Benar atau salahnya suatu hipotesa tidak diketahui dengan pasti kecuali jika seluruh populasi diamati untuk mengetahui benar atau salah maka perlu dilakukan pengujian, yang dikenal sebagai pengujian hipotesa.

Definisi 2.27 :

Hipotesa statistik adalah pernyataan atau dugaan mengenai satu atau lebih populasi atau nilai parameter populasi.

H_1 disebut hipotesa alternatif, merupakan hipotesa tandingan dari H_0, maksudnya jika H_0 ditolak maka H_1 akan diterima.

Ada dua kemungkinan membuat kesalahan dalam proses pengujian hipotesa.

Definisi 2.30 :

Kesalahan jenis I adalah penolakan hipotesa nol (H_0) yang benar.

Definisi 2.31 :

Kesalahan jenis II adalah penerimaan hipotesa nol (H_0) yang salah.

Definisi 2.32 :

Taraf nyata dinotasikan dengan α merupakan peluang untuk menerima kesalahan jenis I.

Suatu uji dikatakan berarti bila hipotesa nol (H_0) ditolak pada taraf nyata α = 0,05 dan dikatakan amat berarti bila hipoteasa nol (H_0) ditolak pada taraf nyata α = 0,01.

Definisi 2.33 :

Taraf kepercayaan dinotasikan dengan (1-α) merupakan peluang (1-α) dalam membuat keputusan yang benar.

Langkah-langkah pengujian hipotesa :

1. Menentukan hipotesa nolnya
2. Menentukan hipotesa alternatif yang melawan dengan

4. Memilih uji statistik yang sesuai dengan hipotesa yang akan diuji kemudian menentukan daerah kritisnya
5. Menghitung nilai statistik berdasarkan datanya
6. Membuat keputusan; menolak *Ho* jika nilai statistik uji tersebut berada dalam daerah kritis,jika nilai itu berada diluar daerah kritis *Ho* diterima

2.7. Perbandingan ganda

Jika hasil pengujian *F* ialah penolakan *Ho*, maka dapat membandingkan mean masing-masing kategori, dengan metode perbandingan ganda, misalnya metode *Tukey* dan metode *Bonferroni*.

2.7.1. Metode Tukey

Pada percobaan dengan banyak observasi sama untuk tiap tritmen (perlakuan) dapat menggunakan metode Tukey untuk memperoleh selang kepercayaan bersama selisih $(\mu_i-\mu_{i'})$ untuk setiap pasang harga mean perlakuan-perlakuan itu.

2.7.1.1. Distribusi Range dari Student

Definisi 2.34 :

Misalkan Y_1, Y_2, ..., Y_r variable-variable acak yang saling independen dan berdistribusi normal dengan

dengan v *db*, maka rasio W/s disebut Range dari Student dan ditulis :

$$q(r,v) = \frac{W}{s}$$

dengan *db* pembilang r dan *db* penyebut v.

2.7.1.2. Selang Kepercayaan perbandingan ganda

Batas kepercayaan perbandingan berganda metode Tukey untuk semua pasangan perbandingan $\mu_i - \mu_i'$, dengan family taraf kepercayaan 1-α adalah sebagai berikut :

$$\hat{D} \pm T\ s(\hat{D})$$

dimana $\hat{D} = \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{i'.}$

$s^2(\hat{D}) = s^2(Y_{i.}) + s^2(Y_{i'.})$

$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\ q(1-\alpha;r,v)$

2.7.2. Metode Bonferroni

Metode perbandingan ganda Bonferroni dapat digunakan dalam analisis variansi meskipun ukuran sample tidak sama.

Definisi 2.33 :

Kontras yang ditunjukkan dengan L didefinisikan sebagai kombinasi linier mean taraf faktor μ_i dimana koeffisien c_i sama dengan nol, ditulis :

$$L = \sum_{i=1}^{r} c_i\mu_i,\ \text{dimana} \sum_{i=1}^{r} c_i = 0$$

Ketidaksamaan Bonferroni untuk g kontras dengan taraf untuk semua kontras L_i adalah:

$$\hat{L}_i \pm B\ s(L_i),\ i=1,2,\ldots\ldots,q$$

dimana $B = t(1-\alpha/2q;\ n_T - r)$; n_T = jumlah ukuran sample seluruhnya, r = banyaknya populasi yang diselidiki, $\hat{L}_i$ = penduga tak bias dari L adalah $\hat{L} = \sum^{r} c_i \bar{Y}_i$; $s^2(\hat{L})$ = penduga tak bias dari varians adalah $s(\hat{L}) = RKS \sum^{r} \frac{c_i^2}{n_i}$

2.8. Rancangan Percobaan

2.8.1. Pengertian beberapa istilah

a. *Percobaan (experiment)*

Ialah suatu usaha yang terencana untuk mengungkapkan fakta-fakta baru, atau menguatkan, atau membantah hasil-hasil yang sudah ada sebelumnya.

b. *Rancangan Percobaan (Experiment Design)*

Merupakan seperangkat pengetahuan yang mempelajari bentuk-bentuk rancangan, cara memilih dan membuat rancangan tersebut juga mencakup prosedur analisa statistik dari data hasil percobaan, hingga pengambilan keputusan yang sah.

c. *Unit Percobaan (Experiment Unit)*

Ialah satu atau sekumpulan materi percobaan yang diamati yang dikenakan perlakuan dengan replikasi tunggal.

d *Sesatan Percobaan (Experiment Error)* pula.

e. *Faktor*

ialah variable independen yang menjadi obyek dalam suatu penelitian

f. *Taraf Faktor (factor Level)*

Ialah nilai-nilai atau klasifikasi-klasifikasi dari pada sebuah faktor.

g. *Perlakuan (Treatment)*

Ialah macam-macam prosedur yang pengaruhnya diukur dibandingkan satu sama lain.

h. *Pengacakan (Randomization)*

Merupakan suatu cara untuk membuat korelasi antar kekeliruan (sesatan) sekecil-kecilnya dan juga merupakan cara menghilangkan bias.

i. *Analisa Varians (Analysis of Varians)*

Ialah suatu prosedur atau metode yang memungkinkan untuk menguji nilai rata-rata sekaligus, dengan menggunakan variasi total dari data yang ada menjadi komponen-komponen.

2.8.2. Tujuan dan kegunaan rancangan percobaan

Tujuan rancangan percobaan adalah untuk mendapatkan atau mengumpulkan informasi sebanyak-banyaknya yang diperlukan dan berguna dalam melakukan penyelidikan dari persoalan-persoalan yang dibahas, meskipun demikian dalam hendaknya digunakan rancangan yang sederhana dan percobaan dilakukan dengan seeffisien mungkin, artinya perlu dipikirkan atau diperhatikan penggunaan tenaga, waktu, beaya, dan bahan percobaannya.

2.8.3. Asumsi tentang model pada rancangan percobaan

a. Normalitas atau Kenormalan

Data percobaan sebelum dianalisa harus memenuhi asumsi normalitas, yaitu kesimpulan data hasil percobaan tersebut mampunyai atau berdistribusi normal.

b. Homogenitas varians

Populasi diasumsikan mempunyai varians yang sama agar menduga dan menguji dapat berlangsung. Kesamaan varians, dengan hipotesa :

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots\ldots = \sigma_k^2$$

ditempuh berdasarkan sample acak berukuran n yang masing-masing telah diambil dari populasi ke-i ($i = 1, 2, , k$) yang berdistribusi normal.

c. Independen

Asumsi mengenai faktor sesatan ε_{ij} untuk ANAVA biasanya diambil $\varepsilon_{ij} \sim DNI(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Ini berarti, kecuali mempunyai rata- rata sama dan varians yang homogen, juga berdistribusi normal dan tidak berkorelasi, jadi bersifat independen.

ini menunjukkan bahwa rancangan percobaan dirancang berdasarkan pola aditif, sehingga ANAVA hanya valid jika diterapkan terhadap data yang bersifat aditif.

2.8.4. Langkah-langkah membuat rancangan percobaan :

1. Menentukan mengenai adanya suatu masalah
2. Membuat suatu pernyataan yang jelas mengenai masalah tersebut
3. Memilih variable independen (biasa disebut faktor atau perlakuan) yaitu faktor-faktor yang dapat menyebabkan terjadinya masalah diatas.Kemudian menentukan taraf (tingkat, level) dari faktor yang ditentukan itu.
4. Melaksanakan sebuah percobaan yang ilmiah yaitu menentukan variable dependen atau yang biasa disebut response, yaitu variable (karakteristik yang akan diukur)
5. Menentukan ruang inferensi, yaitu menentukan batas-batas didalam mana hasil percobaan/penelitian akan berlaku
6. Memilih unit percobaan (satuan percobaan) secara acak.
7. Penentuan randomisasi dari perlakuan -perlakuan pada satuan-satuan percobaan
8. Membuat analisa statistik (ANAVA - Analisa Variansi) yang berkoresponden dengan rancangan itu sendiri untuk

9. Mengambil kesimpulan.