BAB III

GRUP

3.1. GRUP

Definisi : 3.1.1.

Suatu himpunan G yang tidak kosong beserta suatu operasi biner * pada G membentuk suatu grup bila dan hanya bila memenuhi sifat-sifat berikut :

(1) Operasi biner * pada G bersifat assosiatif , yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ maka $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(2) G terhadap operasi biner * mempunyai elemen identitas, yaitu ada $e \in G$ sedemikian hingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$.

(3) Setiap elemen G mempunyai invers terhadap operasi biner * dalam G, yaitu untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. e adalah elemen identitas dari G.

Jika himpunan G terhadap operasi biner * membentuk suatu grup, maka grup ini dinyatakan dengan notasi (G;*). Jika grup (G;*) memenuhi sifat bahwa :

(4) Operasi biner * pada G bersifat komutatif yaitu untuk setiap $a, b \in G$ maka $a * b = b * a$. Maka grup (G;*) disebut grup abelian (grup komutatif).

Contoh :

Himpunan bilangan bulat $Z = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$ terhadap operasi penjumlahan +.

(a) Sifat tertutup dipenuhi yaitu hasil penjumlahan bilangan bulat bersifat tertutup.

(b) Sifat assosiatif dipenuhi yaitu penjumlahan bilangan-bilangan bulat bersifat assosiatif.

(c) Z terhadap operasi + mempunyai elemen identitas yaitu 0, sebab untuk setiap $a \in Z$ maka $a + 0 = 0 + a = a$.

(d) Setiap elemen Z mempunyai invers terhadap operasi + yaitu setiap $a \in Z$ ada $a^{-1} = -a \in Z$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

(e) Sifat komutatif dipenuhi pula, yaitu untuk setiap $a,b \in Z$ maka $a + b = b + a$.

Jadi Z terhadap operasi + merupakan suatu grup dan ditulis (Z;+) suatu grup abelian.

Banyaknya elemen suatu grup G ditulis dengan notasi "n(G)" dan disebut order dari grup G. Suatu grup yang banyak elemennya tak berhingga (infinite) disebut grup tak berhingga (grup infinite), sedang suatu grup yang banyaknya elemen berhingga disebut grup berhingga (grup finite).

Theorema : 3.1.1. Sifat Kanselasi

(G;*) suatu grup, maka untuk setiap $a,b,c \in G$, berlaku

i. jika $a * b = a * c$ maka $b = c$.

ii. jika $b * a = c * a$ maka $b = c$.

Bukti :

Jika $a \in G$ dan G suatu grup maka ada $a^{-1} \in G$ sedemikian hingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ dengan e adalah elemen identitas dari (G;*).

Menurut ketentuan i. jika $a * b = a * c$ kedua ruasnya dioperasikan a^{-1} dari kiri maka

$$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$$

$\Longrightarrow$ $(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$ karena sifat assosiatif ,

$\Longrightarrow$ $e * b = e * c$ karena $a^{-1} * a = e$,

$\Longrightarrow$ $b = c$

Jadi jika $a * b = a * c$ maka $b = c$

Menurut ketentuan ii. jika $b * a = c * a$ kedua ruasnya dioperasikan a^{-1} dari kanan maka

$$(b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1}$$

$\Longrightarrow$ $b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1})$ karena sifat assosiatif ,

$\Longrightarrow$ $b * e = c * e$ karena $a * a^{-1} = e$,

$\Longrightarrow$ $b = c$.

Jadi terbukti jika $b * a = c * a$ maka $b = c$.

Theorema : 3.1.2.

(G;*) suatu grup, maka berlaku

i. elemen netral e dari G adalah tunggal.

ii. invers dari suatu elemen G adalah tunggal.

Bukti :

(i) Misal e dan f kedua-duanya elemen netral dari G sedemikian sehingga

$$e * a = a * e = a \quad \text{untuk setiap } a \in G$$

dan

$$f * a = a * f = a \quad \text{untuk setiap } a \in G$$

Maka $e * f = f$ (karena e elemen netral dari G) dan

$e * f = e$ (karena f elemen netral dari G).

Jadi $f = e * f = e$, sehingga $e = f$.

Jadi terbukti bahwa elemen netral dari G adalah tunggal terhadap operasi biner $*$.

(ii) Misalkan selain a^{-1} ada invers lainnya dari a, $a \in G$ misalkan b. Ini berarti bahwa $b * a = e$

Karena juga $a^{-1} * a = e$ maka $b * a = a^{-1} * a$.

Dari sifat kanselasi didapat $b = a^{-1}$.

Jadi terbukti bahwa invers dari suatu elemen G adalah tunggal terhadap operasi biner $*$.

Theorema : 3.1.3.

Jika S adalah sembarang himpunan yang tidak kosong maka himpunan dari semua pemetaan-pemetaan invertible dalam M(S) adalah suatu grup terhadap operasi komposisi pemetaan.

Bukti:

Misalkan S himpunan yang tidak kosong, $\alpha, \beta \in M(S)$ dan α, β keduanya invertible. Pertama akan dibuktikan bahwa terhadap operasi komposisi pemetaan-pemetaan invertible dalam M(S) tertutup. Karena α dan β invertible maka α dan β satu-satu dan onto. Jika α

dan β satu-satu dan onto (dari theorema 2.1.1 (a) dan (c)) maka $\beta\circ\alpha$ satu-satu dan onto. Oleh karena $\beta\circ\alpha$ satu-satu dan onto maka $\beta\circ\alpha$ adalah invertible. Jadi terbukti bahwa jika α, β pemetaan-pemetaan invertible dalam M(S) (terhadap operasi komposisi) maka $\beta\circ\alpha$ pemetaan invertible dalam M(S). Jadi terhadap operasi komposisi ,pemetaan-pemetaan invertible dalam M(S) tertutup. Kedua terhadap operasi komposisi, pemetaan-pemetaan invertible dalam M(S) bersifat assosiatif.

Akan dibuktikan bahwa $\gamma\circ(\beta\circ\alpha) = (\gamma\circ\beta)\circ\alpha$ untuk setiap α, β, γ pemetaan-pemetaan invertible dalam M(S). Menurut definisi persamaan-persamaan pada pemetaan :

$$[\gamma\circ(\beta\circ\alpha)](x) = [(\gamma\circ\beta)\circ\alpha](x)$$

untuk setiap $x \in$ S. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}[\gamma\circ(\beta\circ\alpha)](x) &= \gamma\,((\beta\circ\alpha)(x))\\ &= \gamma\,(\beta(\alpha(x)))\\ &= (\gamma\circ\beta)(\alpha(x))\\ &= [(\gamma\circ\beta)\circ\alpha\,](x)\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap α,β,γ pemetaan-pemetaan invertible dalam M(S) maka $\gamma\circ(\beta\circ\alpha) = (\gamma\circ\beta)\circ\alpha$. Selanjutnya ketiga ditunjukkan bahwa pemetaan-pemetaan invertible dalam M(S) terhadap operasi $\circ$ mempunyai elemen identitas. Yaitu elemen identitasnya adalah ι_S karena $\iota_S\circ\alpha = \alpha\circ\iota_S = \alpha$ untuk setiap α elemen pemetaan invertible dalam M(S).

Dan terakhir akan dibuktikan bahwa setiap pemetaan invertible dalam M(S) mempunyai invers terhadap operasi $\circ$ pada M(S). Yaitu misal α adalah pemetaan invertible dalam M(S) yaitu $\alpha : S \longrightarrow S$ onto dan satu-satu maka ada invers α yaitu $\alpha^{-1} : S \longrightarrow S$ onto dan satu-satu sedemikian sehingga $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = \iota_S$ dimana $\iota_S : S \longrightarrow S$ satu-satu dan onto. Karena diketahui bahwa hasil dua komposisi merupakan pemetaan-pemetaan invertible dalam M(S).

Jadi terbukti bahwa himpunan semua pemetaan-pemetaan invertible dalam M(S) adalah grup terhadap operasi komposisi pemetaan.

Definisi : 3.1.2.

Jika (G;*) suatu grup, $a \in G$ dan m bilangan bulat positif, maka

$a^m = a * a * a * \ldots * a$ sebanyak m faktor dan

$a^{-m} = (a^{-1})^m = a^{-1} * a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1}$ sebanyak m faktor.

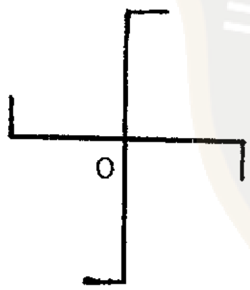
Definisi : 3.1.2.

Grup (G;*) disebut grup cyclic bila dan hanya bila ada elemen $a \in G$ sedemikian hingga setiap elemen $y \in G$, $y = a^m$ dengan m bilangan bulat, elemen $a \in G$ disebut penghasil (generator) dari G.

Definisi : 3.1.3.

Jika G suatu grup dan $a \in G$, periode dari a adalah bilangan bulat positif terkecil m sedemikian hingga $a^m = e$, e adalah elemen identitas. Jika tak ada bilangan bulat positif demikian, maka dikatakan bahwa a berperiode tak terhingga. Periode a ditulis p(a).

Contoh :



Misalkan $R(0,90^\circ)$ adalah rotasi dengan pusat O dan sudut putaran 90° searah dengan arah putaran jarum jam.

Jika $R(0,90^\circ) = R$ maka $R(0,180^\circ) = R^2$, $R(0,270^\circ) = R^3$ dan $R(0,360^\circ) = R^4 = I$ yaitu suat rotasi identitas.

R^2 adalah operasi $R \circ R$, $R^3 = R^2 \circ R$ dan $R^4 = R^3 \circ R$.

Dipandang himpunan $T = \{I, R, R^2, R^3\}$. Maka T terhadap operasi komposisi merupakan suatu grup. Grup T adalah grup cyclic dengan generator R.

Periode setiap elemennya adalah $p(I) = 1$, $p(R) = 4$, $p(R^2) = 2$ dan $p(R^3) = 4$.

3.2 GRUP PERMUTASI

Definisi : 3.2.1.

Permutasi dari himpunan yang tidak kosong S adalah suatu pemetaan satu-satu dari S onto S.

Contoh :

Ditentukan suatu permutasi α dari himpunan $\{1,2,3,4\}$ dengan ketentuan

$$\alpha(1) = 2 \; , \; \alpha(2) = 3 \; , \; \alpha(3) = 1 \text{ dan } \alpha(4) = 4$$

maka permutasi α yaitu

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Karena suatu pemetaan dari S ke S adalah satu-satu dan onto jika dan hanya jika invertible maka permutasi-permutasi dari S adalah sama dengan elemen-elemen invertible dalam M(S). Dan karena himpunan elemen-elemen invertible dalam M(S) telah dibuktikan dalam theorema 3.1.3 adalah suatu grup terhadap operasi komposisi maka himpunan permutasi-permutasi dari S adalah juga suatu grup terhadap operasi komposisi.

Definisi : 3.2.2.

JIka S adalah suatu himpunan terbatas $\{ 1, 2, \ldots , n \}$ maka himpunan semua permutasi-permutasi dari S disebut grup symmetric pada S, dan dinotasikan dengan Sym(S).

Group Sym(S) biasanya dinotasikan dengan S_n , dan elemen-elemennya disajikan dengan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & . & . & . & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

baris pertama terdiri bilangan bulat positip 1,2,...,n, dan baris dibawahnya merupakan image (bayangan) dari himpunan bilangan positip oleh suatu pemetaan α .

Elemen identitas dari S_n adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ 1 & 2 \ldots n \end{pmatrix} .$$

Invers dari suatu elemen didapat dengan menukar baris-barisnya, sebagai contoh :

Invers dari

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ ialah } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Komposisi dari permutasi sama dengan komposisi dari pemetaan, sebagai contoh

misal

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ dan } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pengoperasian $\alpha \circ \beta$ dilakukan sebagai berikut:

Pada β, $1 \longrightarrow 3$ dan dilanjutkan α, $3 \longrightarrow 1$ maka hasil $\alpha \circ \beta$ pada kolom pertama $1 \longrightarrow 1$.

Hasil pada kolom kedua dari $\alpha \circ \beta$ adalah β, $2 \longrightarrow 4$ dilanjutkan α, $4 \longrightarrow 3$ hasilnya adalah $2 \longrightarrow 3$.

Hasil pada kolom ketiga dari $\alpha \circ \beta$ adalah β, $3 \longrightarrow 1$ dilanjutkan α, $1 \longrightarrow 2$ hasilnya adalah $3 \longrightarrow 2$.

Hasil pada kolom keempat dari $\alpha \circ \beta$ adalah β, $4 \longrightarrow 2$ dilanjutkan α, $2 \longrightarrow 4$ hasilnya adalah $4 \longrightarrow 4$.

Theorema : 3.2.1.

Order dari S_n adalah n !

Bukti :

Permasalahannya adalah menghitung banyaknya elemen dari S_n adalah sama dengan menghitung banyaknya cara yang dapat ditempati dari bilangan bulat $1, 2, \ldots, n$ pada blank-blank yang ditunjukkan dibawah ini (penempatan dari setiap bilangan bulat dilakukan hanya sekali)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \_ & \_ & \ldots & \_ \end{pmatrix}$$

Jika dimulai dengan memilih blank dari kiri, maka ada n kemungkinan penempatan bilangan pada blank pertama. ada n − 1 kemungkinan penempatan bilangan pada blank kedua, ada n − 2 kemungkinan penempatan bilangan pada blank ketiga dan seterusnya

Berdasarkan kaidah penggandaan, jumlah cara penempatan guna mengisi n blank menjadi $n.(n-1) \ldots 2.1 = n!$

Jadi banyaknya elemen S_n adalah n !

Contoh :

Elemen-elemen dari S_3 adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

S_1 mempunyai order 1 ; S_2 mempunyai order 2, S_3 mempunyai order 3.

Elemen-elemen dari S_n sering ditulis dengan mengunakan notasi cycle. Jika S adalah suatu himpunan dan $a_1, a_2, \ldots, a_k \in S$, maka $(a_1 a_2 \ldots a_k)$ menyatakan permutasi dari S dengan

$$a_1 \longrightarrow a_2 , \quad a_2 \longrightarrow a_3 , \quad \ldots , \quad a_{k-1} \longrightarrow a_k , \quad a_k \longrightarrow a_1 ,$$

dan

yang lainnya $x \longrightarrow x$ untuk setiap $x \in S$.

Permutasi tersebut diatas disebut dengan cycle atau k-cycle. Jika a adalah elemen dari S, maka 1-cycle (a) merupakan permutasi identitas dari S.

Contoh :

$$(1 \quad 2 \quad 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(1 \quad 2 \quad 4) (3 \quad 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$(1) = (2) = (1) (2) (3)$

$(1\ 2\ 4) (3) (5) = (1\ 2\ 4)$

$(1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 3\ 4\ 1) = (3\ 4\ 1\ 2) = (4\ 1\ 2\ 3)$

$(1\ 2\ 4)$ merupakan elemen dari S_n untuk $n \geq 4$,

$(1\ 2\ 4) (3)$ merupakan elemen dari S_4 , dan

$(1\ 2\ 4) (3) (5)$ merupakan elemen dari S_5.

3.3 SUBGRUP

Definisi : 3.3.1.

(G;*) suatu grup. H disebut subgrup dari G bila dan hanya bila $H \subset G$ dan (H;*) merupakan suatu grup.

Contoh :

Terhadap operasi penjumlahan himpunan bilangan bulat kelipatan 5 adalah subgrup dari himpunan bilangan bulat.

Lemma : 3.3.1.

Misal G terhadap operasi biner $*$ adalah suatu grup dan misalkan H merupakan subgrup dari G

(a) Jika f adalah elemen identitas dari H dan e adalah elemen identitas dari G, maka f = e.

(b) Jika $a \in H$, maka invers dari a dalam H adalah sama dengan invers dari a dalam G.

Bukti :

(a) Jika f adalah elemen identitas dari H, maka $f * f = f$. Dan dimisalkan, jika f^{-1} adalah invers dari f dalam G,maka :

$$(f * f) = f$$

$$\Longrightarrow \quad f^{-1} * (f * f) = f^{-1} * f$$

$$\Longrightarrow \quad (f^{-1} * f) * f = e \quad \text{karena e elemen identitas G,}$$

$$\Longrightarrow \quad e * f = e$$

$$f = e$$

(b) Diasumsikan bahwa $a \in H$. Dan dimisalkan a^{-1} merupakan invers dari a dalam G dan misalkan c merupakan invers a dalam H. Maka $a * c = c * a = f$, demikian juga $a * c = c * a = e$ (telah dibuktikan dalam (a)). Menurut theorema 3.1.2 (ii) invers dari suatu elemen dalam G adalah tunggal, oleh karena itu a^{-1} tunggal. Jadi $c = a^{-1}$.

Terbukti bahwa jika $a \in H$ maka invers dari a dalam H adalah sama dengan invers dari a dalam G.

Theorema : 3.3.1.

$(G;*)$ suatu grup, $H \subset G$ dan $H \neq \emptyset$.

H adalah subgrup dari G bila dan hanya bila

(i) untuk setiap $a,b \in H$ maka $a * b \in H$ dan

(ii) untuk setiap $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$.

Bukti :

Pertama, dibuktikan jika H subgrup dari G maka

(i) untuk setiap $a,b \in H$ maka $a * b \in H$ dan

(ii) untuk setiap $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$.

H subgrup dari G maka $(H;*)$ suatu grup. Berarti untuk setiap $a,b \in H$ maka $a * b \in H$ (H tertutup terhadap operasi biner $*$).

Setiap elemen H terhadap operasi biner $*$ harus mempunyai invers didalam H. Berarti jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$. Jadi (i) dan (ii) dipenuhi.

Kedua, dibuktikan jika untuk setiap $a,b \in H$ berlaku $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$ maka H subgrup dari G.

Untuk membuktikan H subgrup dari G atau H suatu grup, tinggal menunjukkan bahwa H terhadap operasi biner $*$ bersifat assosiatif dan mempunyai elemen identitas e dalam H.

$H \subset G$ dan ($G;*$) suatu grup maka G terhadap operasi biner $*$ bersifat assosiatif, demikian pula dalam H berlaku pula sifat assosiatif itu.

Diambil $a \in H$, menurut (ii) maka $a^{-1} \in H$.

$a \in H$ dan $a^{-1} \in H$, menurut (i) maka $a * a^{-1} \in H$.

Karena $a * a^{-1} = e$ maka $e \in H$. Terbukti.

Diasumsikan bahwa G adalah grup permutasi pada himpunan S, dan T adalah subset dari S.

Jadi

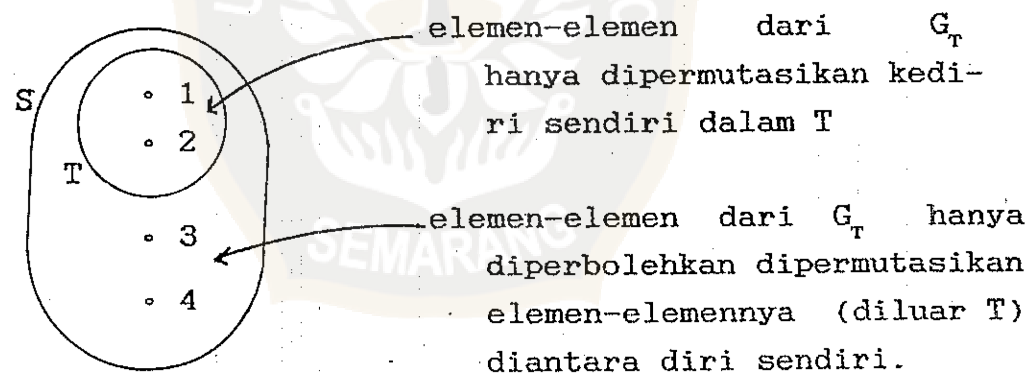
$$G_T = \{ \alpha \in G : \alpha(t) = t \text{ untuk setiap } t \in T \}$$

Dikatakan bahwa elemen-elemen dari G_T membiarkan T elemenwise invariant.

Contoh :

Misal $S = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, $G = Sym(S) = S_4$, dan $T = \{ 1, 2 \}$ maka

$$G_T = \{ (1)(2)(3)(4) , (1)(2)(3\ 4) \}$$
$$= \{ (1) , (3\ 4) \}.$$



Jika α adalah permutasi dari S , dan T adalah subset dari S , maka $\alpha(T)$ merupakan himpunan dari semua elemen-elemen $\alpha(t)$ untuk setiap $t \in T$.

Jadi

$$G_{(T)} = \{ \alpha \in G : \alpha(T) = T \}$$

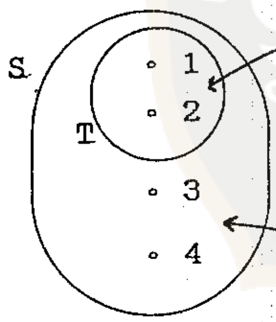
Jadi jika $\alpha \in G_{(T)}$ maka α hanya diperbolehkan mempermutasikan elemen-elemen dari T diantara diri sendiri, tetapi tidak membawa elemen-elemen dari T keluar dari T. Dikatakan bahwa elemen-elemen dari $G_{(T)}$ membiarkan T invariant.

Contoh :

Misalkan $S = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, $G = Sym(P) = S_4$, dan $T = \{1, 2 \}$. Maka

$G_{(T)} = \{(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ ,\ (1\ 2)\ (3)\ (4),\ (1)\ (2)\ (3\ \ 4),\ (1\ 2)\ (3\ 4)\ \}$.

$G_{(T)} = \{\ (1)\ ,\ (1\ 2)\ ,\ (3\ 4)\ ,\ (1\ 2)\ (3\ 4)\ \}$.



Elemen-elemen dari $G_{(T)}$ hanya diperbolehkan dipermutasikan elemen-elemennya (dalam T) diantara diri sendiri.

Elemen-elemen dari $G_{(T)}$ hanya diperbolehkan dipermutasikan elemen-elemennya (diluar T) diantara diri sendiri.

Theorema : 3.3.2.

Jika G adalah grup permutasi pada S, dan T adalah subset dari S, maka G_T dan $G_{(T)}$ adalah subgrup dari G.

Juga G_T adalah subgrup dari $G_{(T)}$

Bukti :

(a) Akan dibuktikan bahwa G_T adalah subgrup dari G. Pertama, karena G memiliki elemen netral ι, juga ada dalam G_T , karena jika $\iota \in G$ dan ι : $t \longrightarrow t$ untuk setiap $t \in T$ maka $\iota \in G_T$. Jadi G_T tidak kosong.

Kedua, akan dibuktikan jika $\alpha,\beta \in G_T$ maka $\alpha \circ \beta \in G_T$.

Diasumsikan jika $\alpha,\beta \in G_T$, $\alpha(t) = t$ dan $\beta(t) = t$ maka

$$(\alpha \circ \beta)(t) = \alpha(\beta(t)) = \alpha(t) = t$$

untuk setiap $t \in T$. Jadi $\alpha \circ \beta \in G_T$.

Dan selanjutnya akan dibuktikan jika $\alpha \in G_T$ maka $\alpha^{-1} \in G_T$ yaitu jika $\alpha \in G_T$ dan $t \in T$ maka

$$\alpha(t) = t$$

$$\alpha^{-1}(\alpha(t)) = \alpha^{-1}(t)$$

$$(\alpha^{-1} \circ \alpha)(t) = \alpha^{-1}(t)$$

$$t = \alpha^{-1}(t)$$

karena $\alpha^{-1}(t) = t$ untuk setiap $t \in T$ maka $\alpha^{-1} \in G_T$.

Jadi jika $\alpha \in G_T$ maka $\alpha^{-1} \in G_T$.

Jadi terbukti bahwa G_T adalah subgrup dai G.

(b) Akan dibuktikan bahwa $G_{(T)}$ adalah subgrup dari G . Pertama, karena G memiliki elemen netral ι, juga ada dalam $G_{(T)}$, karena jika $\iota \in G$ dan ι : $T \longrightarrow T$ maka $\iota \in G_{(T)}$. Jadi $G_{(T)}$ tidak kosong.

Kedua, akan dibuktikan jika $\alpha,\beta \in G_{(T)}$ maka $\alpha \circ \beta \in G_{(T)}$.

Diasumsikan jika $\alpha,\beta \in G_{(T)}$, $\alpha(T) = T$ dan

$\beta(T) = T$ maka

$$(\alpha \circ \beta)(T) = \alpha(\beta(T)) = \alpha(T) = T$$

Oleh karena $(\alpha \circ \beta)(T) = T$. Jadi $\alpha \circ \beta \in G_{(T)}$.

Selanjutnya akan dibuktikan jika $\alpha \in G_{(T)}$ maka $\alpha^{-1} \in G_{(T)}$ yaitu jika $\alpha \in G_{(T)}$ maka

$$\alpha(T) = T$$
$$\alpha^{-1}(\alpha(T)) = \alpha^{-1}(T)$$
$$(\alpha^{-1} \circ \alpha)(T) = \alpha^{-1}(T)$$
$$\iota(T) = \alpha^{-1}(T)$$
$$T = \alpha^{-1}(T)$$

Oleh karena $\alpha^{-1}(T) = T$ maka $\alpha^{-1} \in G_{(T)}$.

Jadi terbukti bahwa $G_{(T)}$ adalah subgrup dari G.

(c) Akan dibuktikan bahwa G_T adalah subgrup dari $G_{(T)}$. Diasumsikan bahwa $\alpha \in G_T$, maka $\alpha(t) = t$ untuk setiap $t \in T$. Karena $\alpha(T)$ adalah himpunan dari semua elemen-elemen $\alpha(t)$ untuk setiap $t \in T$ jadi $\alpha(T) = T$, sedemikian sehingga juga $\alpha \in G_{(T)}$. Jadi jika $\alpha \in G_T$ maka $\alpha \in G_{(T)}$ sehingga $G_T \subset G_{(T)}$. Juga G_T terhadap operasi komposisi pemetaan merupakan grup. Jadi jika $G_T \subset G_{(T)}$ dan $(G_T;\circ)$ merupakan grup maka G_T subgrup dari $G_{(T)}$ (menurut definisi 3.3.1).

Jadi terbukti bahwa G_T adalah subgrup dari $G_{(T)}$.