# BAB II

# PEMETAAN DAN OPERASI

## 2.1. PEMETAAN

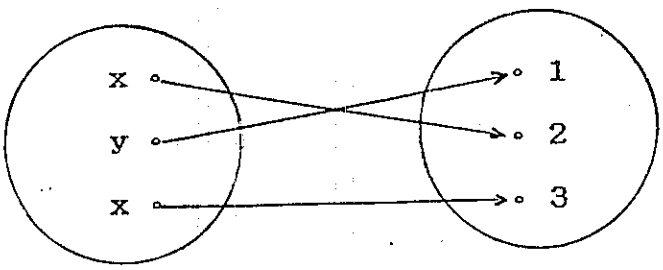
Definisi:2.1.1

Suatu pemetaan atau fungsi dari himpunan S ke himpunan T adalah relasi yang menentukan setiap elemen dari S dengan tepat satu elemen dari T. Himpunan S disebut domain dan himpunan T disebut kodomain.

$\alpha : S \longrightarrow T$ atau $S \xrightarrow{\alpha} T$ menyatakan bahwa $\alpha$ adalah pemetaan dari S ke T. Jika x adalah elemen dari S, maka $\alpha(x)$ menotasikan elemen dari T yang menyatakan $\alpha$ membawa x ke $\alpha(x)$. Elemen $\alpha(x)$ disebut image (bayangan) dari x oleh pemetaan $\alpha$.

Contoh:

Misal S = {x,y,z} dan T = {1,2,3}. Pemetaan $\alpha$ ditentukan dengan $\alpha(x) = 2$, $\alpha(y) = 1$, dan $\alpha(z) = 3$ adalah pemetaan dari S ke T adalah:




$$S \xrightarrow{\alpha} T$$

Pemetaan lain, $\beta : S \longrightarrow T$ diberikan dengan $\beta(x) = 1$, $\beta(y) = 3$, $\beta(z) = 1$.

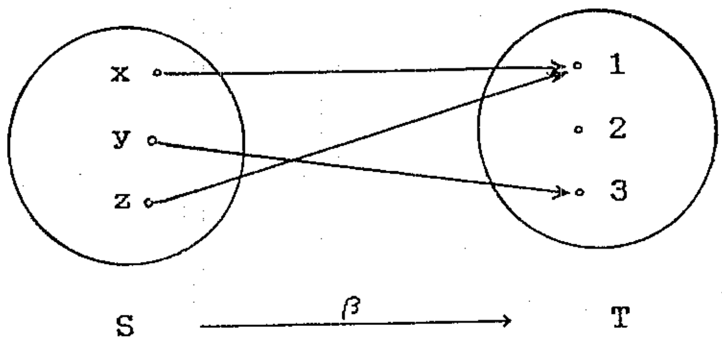
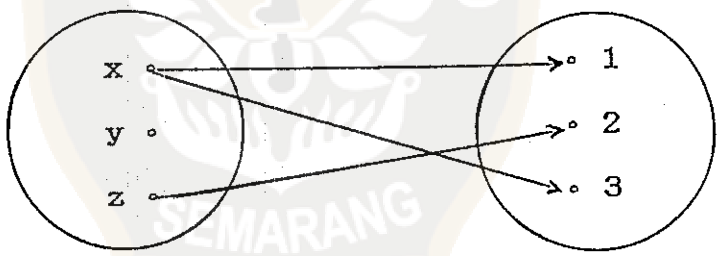



Diagram berikut bukan merupakan pemetaan dari S ke T karena dua sebab: pertama oleh karena $\alpha$ membawa x kekedua elemen berbeda di T, dan kedua tidak ada pemetaan $\alpha$ yang membawa elemen y ke elemen T.




Bukan pemetaan

Jika S himpunan sembarang, $\iota$ (iota) digunakan untuk menotasikan pemetaan identitas dari S ke S ; pemetaannya didefinisikan dengan $\iota(x) = x$ untuk setiap $x \in S$. $\iota$ pada pemetaan ini dapat dinyatakan dengan notasi $\iota_S$.

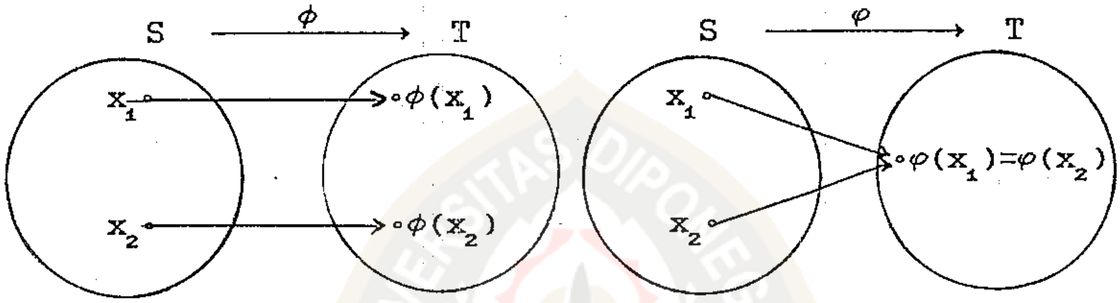
Definisi : 2.1.2.

Suatu pemetaan atau fungsi $\phi$ dari himpunan S ke himpunan T disebut satu-satu jika $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ maka $x_1 = x_2$ untuk setiap $x_1, x_2 \in S$

atau

Suatu pemetaan $\phi : S \longrightarrow T$ dikatakan satu-satu jika $x_1 \neq x_2$ maka $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in S$.

Contoh:




$\phi$ adalah 1-1 $\qquad$ $\varphi$ bukan 1-1

Pemetaan $\varphi$ pada diagram diatas bukan satu-satu sebab $x_1 \neq x_2$ tetapi $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

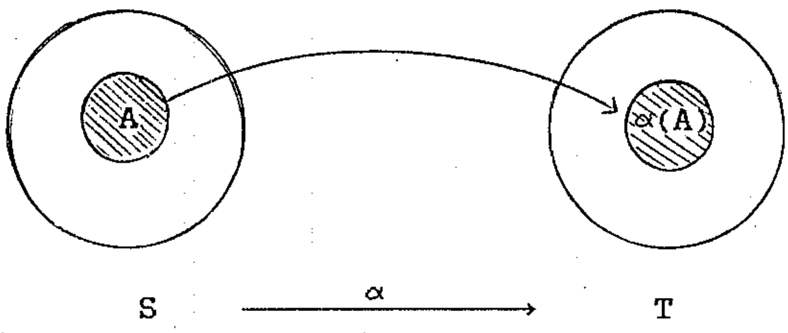
Pada pemetaan $f(x) = x^2$, dengan domain bilangan real, bukan satu-satu, sebab jika $f(x) = x^2 = f(-x)$, maka $x \neq -x$ untuk $x \neq 0$.

Jika $\alpha : S \longrightarrow T$ dan A himpunan bagian dari S, maka $\alpha(A)$ yang menyatakan himpunan dari elemen-elemen dari T adalah bayangan dari elemen-elemen A oleh pemetaan $\alpha$.

Dapat dinyatakan ,

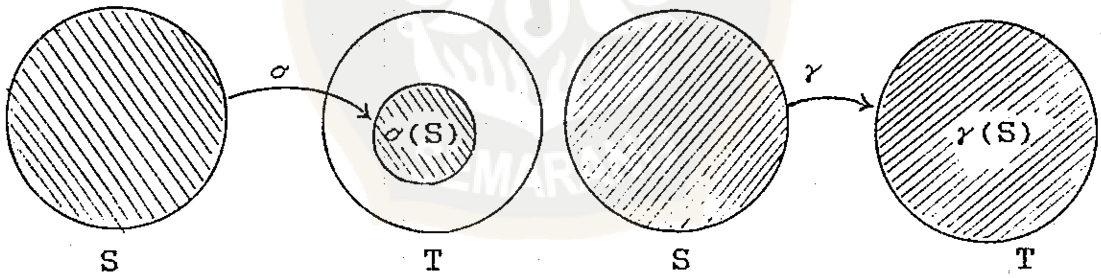
$$\alpha(A) = \{ \alpha(x) : x \in A \}$$

Himpunan $\alpha(A)$ disebut bayangan dari A oleh pemetaan $\alpha$.




Definisi : 2.1.3.

Jika $\alpha : S \longrightarrow T$, maka $\alpha(S)$ disebut bayangan oleh pemetaan $\alpha$ . Dan jika $\alpha : S \longrightarrow T$ dan $\alpha(S) = T$, maka $\alpha$ disebut onto. Jadi $\alpha$ onto jika untuk setiap $y \in T$ maka ada paling sedikit ada satu $x \in S$ sedemikian sehingga $\alpha(x) = y$.




$\sigma : S \rightarrow T$ tidak onto $\qquad$ $\gamma : S \longrightarrow T$ onto

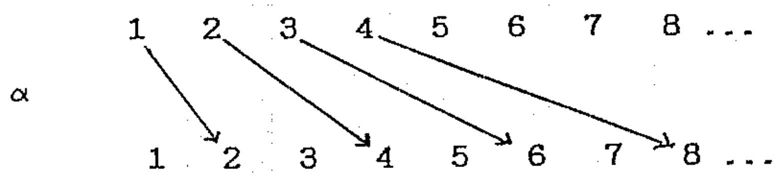
Contoh :

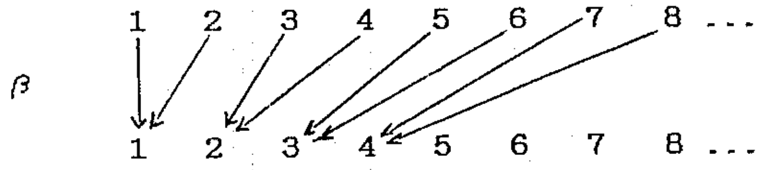
Ditentukan pemetaan $\alpha$ dan $\beta$ dari himpunan bilangan-bilangan alam, { 1, 2, 3, ... }, ke dirinya sendiri, dengan

$$\alpha(n) = 2n$$

dan

$$\beta(n) = \begin{cases} \dfrac{(n+1)}{2} & \text{jika n ganjil} \\ \dfrac{n}{2} & \text{jika n genap.} \end{cases}$$

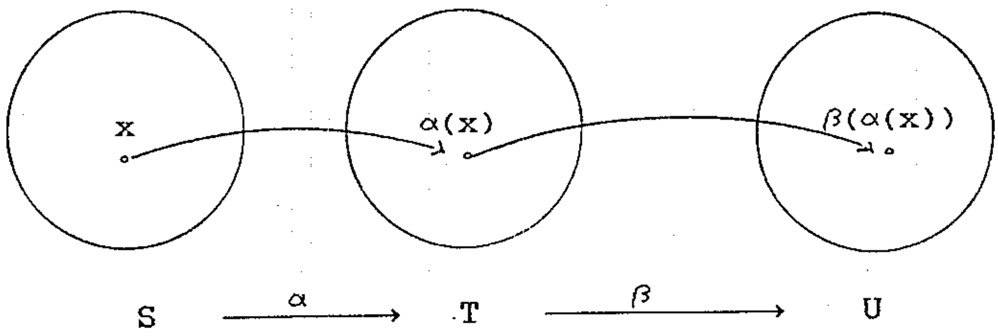



$\alpha$ adalah satu-satu tetapi bukan onto ; dan $\beta$ adalah onto tetapi bukan satu-satu.

Suatu pemetaan satu-satu disebut injektif, suatu pemetaan onto disebut surjektif dan suatu pemetaan keduanya adalah satu-satu dan onto disebut bijektif.

Diasumsikan bahwa $\alpha : S \longrightarrow T$ dan $\beta : T \longrightarrow U$. Jika $\alpha(x) \in T$ untuk setiap $x \in S$ maka elemen-elemen dari U dinyatakan $\beta(\alpha(x))$.




Pemetaan $\alpha$ dilanjutkan dengan pemetaan $\beta$ menghasilkan pemetaan dari S ke U. Pemetaan demikian disebut komposisi dari $\alpha$ dan $\beta$ ; dinyatakan dengan $\beta \circ \alpha$.

Dan didefinisikan :

$$(\beta \circ \alpha)(x) = \beta\ (\alpha(x))$$

untuk setiap $x \in S$. Dalam $\beta \circ \alpha$ , $\alpha$ yang merupakan pemetaan sebelah kanan dilaksanakan pertama kali, kemudian dilanjutkan pemetaan $\beta$.

Theorema : 2.1.1.

Diassumsikan bahwa $\alpha : S \longrightarrow T$ dan $\beta : T \longrightarrow U$.

(a) Jika $\alpha$ dan $\beta$ adalah onto, maka $\beta \circ \alpha$ adalah onto.

(b) jika $\beta\circ\alpha$ adalah onto, maka $\beta$ adalah onto.

(c) Jika $\alpha$ dan $\beta$ adalah satu-satu, maka $\beta\circ\alpha$ adalah satu-satu.

(d) Jika $\beta\circ\alpha$ adalah satu-satu, maka $\alpha$ adalah satu-satu.

Bukti:

(a) Diassumsikan jika $\alpha$ dan $\beta$ keduanya onto . Akan dibuktikan bahwa $\beta\circ\alpha$ adalah onto , yaitu jika $z \in U$, maka ada satu elemen $x \in S$ sedemikian hingga $(\beta\circ\alpha)(x) = z$. Dimisalkan $z \in U$.Karena $\beta$ adalah onto, maka ada $y \in T$ sedemikian sehingga $\beta(y) = z$. Karena $\alpha$ juga onto, maka ada $x \in S$ sedemikian hingga $\alpha(x) = y$. Sehingga didapat: Jika $z \in U$, maka ada suatu elemen $x \in S$ sedemikian sehingga

$$(\beta\circ\alpha)(x) = \beta(\alpha(x))$$

$$= \beta(y)$$

$$= z.$$

(b) Diassumsikan bahwa $\beta \circ \alpha$ onto , jadi jika dimisalkan $z \in U$ , maka ada suatu elemen $x \in S$ sedemikian sehingga $(\beta\circ\alpha)(x) = z$. Tetapi karena $\beta(\alpha(x)) = z$ dengan $\alpha(x) \in T$. Sehingga jika $z \in U$ maka $\alpha(x) \in T$ sedemikian sehingga $\beta(\alpha(x)) = z$.

Oleh karenanya terbukti bahwa $\beta$ onto.

(c) Diassumsikan bahwa $\alpha$ dan $\beta$ keduanya satu-satu. Akan dibuktikan bahwa $\beta\circ\alpha$ adalah satu-satu yaitu jika $x_1, x_2 \in S$ dan $(\beta\circ\alpha)(x_1) = (\beta\circ\alpha)(x_2)$ maka $x_1 = x_2$. Karena $\beta$ satu-satu maka jika $(\beta\circ\alpha)(x_1) = (\beta\circ\alpha)(x_2)$ maka $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ untuk $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) \in T$. Oleh karena $\alpha$ juga satu-satu maka $x_1 = x_2$. Sehingga didapat jika $(\beta\circ\alpha)(x_1) = (\beta\circ\alpha)(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.

Oleh karenanya terbukti bahwa $\beta\circ\alpha$ adalah satu-satu.

(d) Diassumsikan bahwa $\beta\circ\alpha$ adalah satu-satu. Jika $x_1, x_2 \in S$ dan $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ maka $\beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2))$ maka $(\beta\circ\alpha)(x_1) = (\beta\circ\alpha)(x_2)$ maka $x_1 = x_2$ karena $\alpha\circ\beta$ adalah satu-satu. Jadi terbukti jika $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ maka $x_1 = x_2$ untuk $x_1 = x_2 \in S$.

Oleh karenanya $\alpha$ satu-satu.

Definisi : 2.1.4.

Suatu pemetaan $\beta : T \longrightarrow S$ merupakan invers dari $\alpha : S \longrightarrow T$ jika $\beta \circ \alpha = \iota_S$ dan $\alpha \circ \beta = \iota_T$. Suatu pemetaan dikatakan invertible jika mempunyai invers.

Contoh :

Misal $S = \{x, y, z\}$, $T = \{1, 2, 3\}$. Ditentukan pemetaan $\alpha : S \longrightarrow T$ dengan

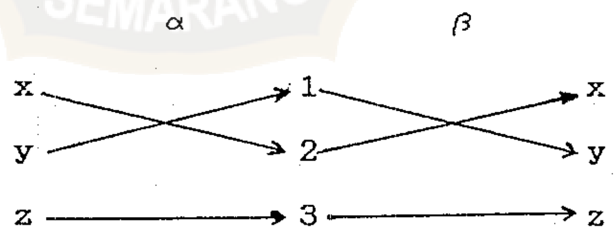
$$\alpha(x) = 2,\ \alpha(y) = 1,\ \alpha(z) = 3 \text{ dan}$$

pemetaan $\beta : T \longrightarrow S$ dengan

$$\beta(1) = y,\ \beta(2) = x,\ \beta(3) = z$$

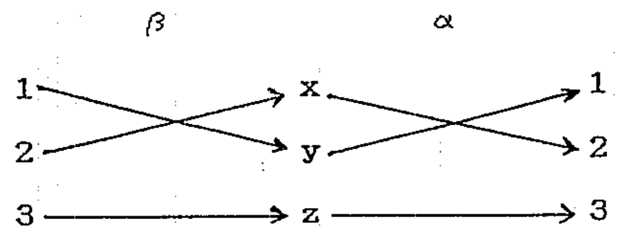
Maka

$$(\beta \circ \alpha)(x) = \beta(\alpha(x)) = \beta(2) = x = \iota_S(x)$$
$$(\beta \circ \alpha)(y) = \beta(\alpha(y)) = \beta(1) = y = \iota_S(y)$$
$$(\beta \circ \alpha)(z) = \beta(\alpha(z)) = \beta(3) = z = \iota_S(z)$$




dan

$$(\alpha \circ \beta)(1) = \alpha(\beta(1)) = \alpha(y) = 1 = \iota_T(1)$$
$$(\alpha \circ \beta)(2) = \alpha(\beta(2)) = \alpha(x) = 2 = \iota_T(2)$$
$$(\alpha \circ \beta)(3) = \alpha(\beta(3)) = \alpha(z) = 3 = \iota_T(3)$$




Pemetaan $\alpha$ diatas invertible, inversnya adalah pemetaan $\beta$.

Suatu pemetaan $\alpha : Z \longrightarrow Z$ yang ditentukan $\alpha(x) = x^2$ tidak invertible.

Theorema : 2.1.2.

Suatu pemetaan disebut invertible jika dan hanya jika satu-satu dan onto.

Bukti :

Pertama, diassumsikan bahwa $\alpha : S \longrightarrow T$ adalah invertible, dan inversnya adalah $\beta$. Karena $\beta \circ \alpha$ merupakan pemetaan identitas pada S adalah satu-satu maka $\alpha$ harus juga satu-satu menurut theorema 2.1.1 (d). Dan karena $\alpha \circ \beta$ merupakan pemetaan identitas pada T dan onto maka $\alpha$ harus onto menurut theorema 2.1.1 (b). Jadi terbukti bahwa jika $\alpha$ invertible maka $\alpha$ satu-satu dan onto.

Kedua, dissumsikan bahwa $\alpha : S \longrightarrow T$ adalah satu-satu dan onto. Akan dibuktikan bahwa $\alpha$ adalah invertible. Dimisalkan $t \in T$. Karena $\alpha$ onto maka ada paling sedikit satu elemen $s \in S$

sedemikian hingga $\alpha(s) = t$. Tetapi $\alpha$ juga satu-satu, jadi elemen s haruslah tunggal; yaitu $\beta(t) = s$ untuk setiap $t \in T$ maka didapat suatu pemetaan $\beta : T \longrightarrow S$ sedemikian sehingga $\beta \circ \alpha = \iota_S$ dan $\alpha \circ \beta = \iota_T$. Jadi $\beta$ adalah invers dari $\alpha$. Maka $\alpha$ adalah invertible. Jadi terbukti jika $\alpha$ satu-satu dan onto maka $\alpha$ invertible.

## 2.2. OPERASI

Definisi : 2.2.1.

Jika S adalah suatu himpunan yang tidak kosong maka operasi biner $*$ pada S adalah suatu pemetaan (fungsi) yang mengawankan setiap pasangan berurutan $(a,b) \in S \times S$ dengan tepat satu elemen $(a * b) \in S$. Operasi biner $*$ dinyatakan :

$$* : S \times S \longrightarrow S.$$

Contoh:

$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ yaitu himpunan bilangan asli genap dan dipandang operasi $+$, yaitu operasi penjumlahan. Maka $+$ merupakan operasi pada A, sebab jumlah setiap dua bilangan asli genap selalu merupakan bilangan asli genap dalam A.

Misalkan S merupakan himpunan sembarang yang tidak kosong dan misalkan M(S) adalah himpunan dari semua pemetaan-pemetaan dari S ke S. Dan dimisalkan bahwa $\alpha \in M(S)$ dan $\beta \in M(S)$. Maka jika $\alpha : S \to S$, $\beta : S \to S$ maka $\beta \circ \alpha : S \longrightarrow S$ sedemikian hingga

$\beta \circ \alpha \in M(S)$. Maka komposisi pemetaan yang dinotasikan dengan $\circ$ adalah suatu operasi pada $M(S)$.

Contoh :

Dimisalkan $S = \{x,y,z\}$ dan $\alpha, \beta \in M(S)$ ditentukan jika : $\alpha : S \longrightarrow S$ dengan

$\alpha(x) = z$, $\alpha(y) = y$, $\alpha(z) = x$ dan

$\beta : S \longrightarrow S$ dengan

$\beta(x) = x$, $\beta(y) = z$, dan $\beta(z) = y$

maka

$$(\beta \circ \alpha)(x) = \beta(\alpha(x)) = \beta(z) = y \ ,$$
$$(\beta \circ \alpha)(y) = \beta(\alpha(y)) = \beta(y) = z \ ,$$
$$(\beta \circ \alpha)(z) = \beta(\alpha(z)) = \beta(x) = x \ ,$$

Jadi $\beta \circ \alpha : S \longrightarrow S$ dan $\beta \circ \alpha \in M(S)$. Maka $\circ$ adalah suatu operasi pada $M(S)$.

Definisi : 2.2.2.

Suatu operasi biner * pada suatu himpunan S bersifat assosiatif bila dan hanya bila untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Contoh :

Pada himpunan bilangan asli, baik perkalian maupun penjumlahan bersifat assosiatif.

Definisi : 2.2.3.

Suatu himpunan S dikatakan mempunyai elemen identitas (elemen netral) terhadap operasi biner * bila dan hanya bila ada elemen identitas e, $e \in S$

sedemikian sehingga untuk setiap $a \in S$ berlaku $e * a = a * e = a$ .

Contoh :

$Z = \{ \ldots ,-2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$

Elemen identitas dari Z terhadap penjumlahan adalah 0, sedangkan elemen identitas dari Z terhadap perkalian adalah 1.

Definisi : 2.2.4.

Misalkan himpunan S terhadap operasi biner * mempunyai elemen identitas e. Suatu elemen $a \in S$ dikatakan invers dari $b \in S$ terhadap operasi biner * bila dan hanya bila $a * b = b * a = e$.

Definisi : 2.2.5.

Suatu operasi biner * pada suatu himpunan S dikatakan komutatif bila dan hanya bila untuk setiap $x, y \in S$ maka $x * y = y * x$.

Theorema : 2.2.1.

Jika S adalah sembarang himpunan yang tidak kosong, maka terhadap operasi komposisi pemetaan M(S) tertutup.

Bukti:

Misalkan S adalah sembarang himpunan yang tidak kosong, dan misalkan M(S) adalah himpunan dari semua pemetaan-pemetaan dari S ke S. Dan dimisalkan $\alpha \in M(S)$ dan $\beta \in M(S)$ . Maka jika $\alpha : S \rightarrow S$, $\beta : S \rightarrow S$ dan $\beta \circ \alpha : S \rightarrow S$ maka $\alpha \circ \beta \in M(S)$.

Jadi terhadap operasi komposisi pemetaan M(S) tertutup.