BAB III

TRANSFORMASI

3.1 BASIS

Definisi 3.1.1. Suatu himpunan vektor vektor $a_1, a_2, \ldots, a_r$ dari E^n disebut membentuk atau menghasilkan E^n jika setiap vektor dalam E^n dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Definisi 3.1.2. Suatu basis untuk E^n ialah sebuah himpunan bagian vektor vektor bebas linier dari vektor vektor dalam E^n yang membentuk seluruh ruang .

Suatu himpunan vektor vektor yang merupakan basis harus mempunyai dua sifat yaitu : vektor vektornya harus membentuk E^n dan harus bebas linier .

Theorema 3.1.3. n vektor satuan $e_1, e_2, \ldots, e_n$ membentuk basis untuk E^n.

Bukti:

1. Vektor satuan adalah bebas linier sebab :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] = 0$$

berarti

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0, \ldots,\ \lambda_n = 0$$

2. Setiap vektor x dalam E^n dapat dibentuk sebagai kombinasi linier dari e_i .

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n .$$

Jadi sifat sifat basis terpenuhi maka vektor satuan dari E^n membentuk basis untuk E^n.

Theorema 3.1.4. Penampilan setiap vektor dalam himpunan basis vektor vektor adalah unik yaitu setiap vektor dalam E^n dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari sekumpulan vektor vektor basis dengan satu cara saja .

Bukti :

Andaikan b adalah sembarang vektor dalam E^n dan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah himpunan vektor vektor basis , dan andaikan dapat ditulis b sebagai kombinasi linier dari a_i dalam dua cara yang berlainan misal

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r a_r \qquad (3.1)$$

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_r a_r \qquad (3.2)$$

dengan mengurangkan (3.1) dengan (3.2) didapatkan

$$(\lambda_1 - \beta_1) a_1 + (\lambda_2 - \beta_2) a_2 + \ldots + (\lambda_r - \beta_r) a_r = 0$$

karena a_i bebas linier maka

$$\lambda_1 - \beta_1 = 0,\ \lambda_2 - \beta_2 = 0, \ldots, \lambda_r - \beta_r = 0$$

oleh karena itu

$$\lambda_1 = \beta_1, \lambda_2 = \beta_2, \ldots, \lambda_r = \beta_r$$

Jadi $\lambda_i = \beta_i$ dan kombinasi liniernya adalah unik .

Theorema 3.1.5. Bila diberikan sebuah himpunan vektor vektor basis $a_1, a_2, \ldots, a_r$ dari E^n dan sebuah vektor lain $b \neq 0$ dari E^n . Maka jika dalam pernyataan b sebagai kombinasi linier dari a_i

$$b = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i \qquad (3.3)$$

setiap vektor a_i dimana $\alpha_i \neq 0$ dipindahkan dari himpunan , kumpulan baru dari vektor vektor r juga sebuah basis untuk E^n .

Bukti :

1. Karena $a_1, a_2, ..., a_r$ adalah suatu vektor vektor basis maka $a_1, a_2, ..., a_r$ bebas linier sehingga

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i = 0 \quad \text{berarti } \lambda_i = 0 \quad \text{untuk } i = 1,2,...,r$$

Dimisalkan bahwa dalam persamaan (3.3) $\alpha_r \neq 0$ dan digantikan a_r dengan b sehingga diperoleh himpunan baru $a_1, a_2, ..., a_{r-1}, b$.

Untuk menunjukkan bahwa himpunan yang baru adalah bebas linier maka perlu diperlihatkan bahwa :

$$\sum_{i=1}^{r-1} \delta_i a_i + \delta b = 0 \text{ dan ini berarti}$$

$$\delta_i = 0,\ i = 1,2,...,r-1 \text{ dan } \delta = 0 \qquad (3.4)$$

Jika himpunan bergantung linier maka δ tidak dapat musnah karena diumpamakan $a_1, a_2, ..., a_{r-1}$ adalah bebas linier. Misalkan $\delta \neq 0$ dengan menggunakan pers (3.3) disubtitusikan dalam (3.4) diperoleh :

$$\sum_{i=1}^{r-1} (\delta_i + \alpha_1 \delta) a_i + \delta \alpha_r a_r = 0$$

Tetapi $\alpha_r \delta \neq 0$ ini berlawanan dengan pemisalan bahwa $a_1, a_2, ..., a_r$ adalah bebas linier sehingga supaya bebas linier $\alpha_r \delta = 0$ karena $\alpha_r \neq 0$ maka $\delta = 0$ dan ini berarti bahwa $a_1, a_2, ..., a_{r-1}, b$ adalah bebas linier .

2. Agar $a_1, a_2, ..., a_{r-1}$, b membentuk sebuah basis harus ditunjukkan bahwa setiap vektor x dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari himpunan ini

Karena $a_1, a_2, \ldots, a_r$ merupakan himpunan vektor vektor basis maka vektor x dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sebagai berikut

$$x = \sum_{r=1}^{r} \gamma_i a_i \qquad (3.5)$$

Telah diumpamakan $\alpha_r \neq 0$, dari persamaan (3.3) dapat ditulis

$$\alpha_r a_r = b - \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i a_i$$

atau

$$a_r = \frac{1}{\alpha_r} \qquad (3.6)$$

substitusi (3.6) kedalam (3.5) diperoleh :

$$x = \sum_{i=1}^{r-1} (\gamma_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_r}\gamma_r)\, a_i + \frac{\gamma_r}{\alpha_r}$$

karena x merupakan kombinasi linier dari $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, b$ maka $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, b$ membentuk sebuah basis dari E^n .

Theorema 3.1.6. Setiap dua basis untuk E^n mempunyai sejumlah vektor vektor basis yang sama .

Bukti :

Diambil $a_1, a_2, \ldots, a_u$ satu himpunan vektor vektor basis untuk E^n dan $b_1, b_2, \ldots, b_v$ suatu himpunan lain dari vektor vektor basis . Dimisalkan bahwa b_v dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $a_1, a_2, \ldots, a_u$

$$b_v = \sum_{i=1}^{u} \lambda_i a_i$$

dan bahwa paling sedikit ada satu $\lambda_i \neq 0$, diambil $\lambda_u \neq 0$ dengan cara pada bukti theorema 3.1.5 maka akan didapat $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, b_v$ membentuk sebuah basis untuk E^n.

Selanjutnya dimisalkan b_{v-1} dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari himpunan vektor vektor basis $a_1, a_2, \ldots, a_{u-1}, b_v$ dimana

$$b_{v-1} = \sum_{i=1}^{u-1} \delta_i a_i + \delta b_v$$

dan paling sedikit terdapat satu $\lambda_i \neq 0$ atau setidaknya b_{v-1} hanya merupakan perkalian skalar dari b_v. Hal ini berlawanan dengan kenyataan bahwa b_j adalah bebas linier dan dimisalkan $\delta_{u-1} \neq 0$ maka himpunan $a_1, a_2, \ldots, a_{u-2}, b_{v-1}, b_v$ membentuk basis untuk E^n.

Apabila proses ini diteruskan sampai ditemukan sebuah basis yang harus memiliki salah satu dari bentuk

$$a_1, a_2, \ldots, a_{u-v}, b_1, b_2, \ldots, b_v$$

atau

$$b_1, b_2, \ldots, b_v$$

maka paling sedikit banyaknya a_1 harus sama dengan b_j, sebab kalau tidak sebuah basis dari bentuk $b_{v-u+1}, \ldots, b_v$ akan diperoleh dan sisanya b_j akan bergantung linier pada $b_{v-u+1}, \ldots, b_v$ dan hal ini berlawanan dengan kenyataan bahwa semua b_j adalah bebas linier maka dapat diambil bahwa

$$u \geq v \qquad (3.7)$$

Dengan cara yang sama dimulai dengan b_j yang disisipi dengan a_i dan cara ini akan didapat

$$v \geq u \qquad (3.8)$$

dari pertidaksamaan (3.7) dan (3.8) didapat

$$u = v$$

Maka theorema ini terbukti .

Untuk menentukan jumlah sebenarnya dari vektor vektor dalam suatu basis untuk E^n dapat diambil sebuah kumpulan vektor vektor satuan $e_1, e_2, \ldots, e_m$ membentuk sebuah basis untuk E^n. Hal ini berakibat bahwa setiap basis untuk E^n memiliki tepat sejumlah n vektor

3.2 TRANSFORMASI

Definisi 3.2.1. Suatu transformasi linier T pada E^n adalah suatu perpasangan yang memetakan setiap vektor x ke suatu vektor T(x) dari E^m sehingga untuk semua vektor x_1, x_2 dalam E^m dan semua skalar λ_1, λ_2.

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2) \qquad (3.9)$$

Dari persamaan (3.9) jika diambil $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ maka persamaan (3.9) menjadi

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) \qquad (3.10)$$

Persamaan diatas merupakan transformasi terhadap penjumlahan . Sedang kalau diambil $\lambda_2 = 0$ maka persamaan (3.9) menjadi :

$$T(\lambda_1 x_1)) = \lambda_1 T(x_1) \qquad (3.11)$$

dan ini merupakan transformasi terhadap perkalian dengan sebuah skalar .

Contoh :

Transformasi y=ax adalah linier

Untuk membuktikan ini hanya perlu dibuktikan bahwa persamaan (3.9) berlaku yaitu T(x)=ax .

$$T(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) = a\ (\lambda_1 x_2+\lambda_2 x_2)$$
$$= \lambda_1 (ax_1)+\lambda_2 (ax_2)$$
$$= \lambda_1 T(x_1)+\lambda_2 T(x_2)$$

jadi persamaan (3.9) terpenuhi maka transformasi y=ax linier .

Definisi 3.2.2. Daerah dari suatu transformasi didefinisikan sebagai kumpulan dari unsur unsur yang memakai transformasi . Sedangkan sasaran dari suatu transformasi adalah kumpulan unsur unsur yang dibentuk pemetaan yang beroperasi pada unsur unsur dalam daerah .

Sasaran sering juga disebut bayangan dari daerah terhadap transformasi .

Theorema 3.2.3 Sasaran dari suatu transformasi linier dari E^nadalah suatu ruang bagian dari E^m . Atau dalam transformasi matrik yaitu jika A suatu matrik m x m , maka himpunan titik y=Ax (untuk semua x dalam E^n) adalah suatu ruang bagian dari E^m .

Bukti :

Karena untuk setiap transformasi linier harus bisa diperlihatkan bahwa jika T(x) dalam sasaran , begitu juga $\lambda T(x)$ untuk suatu saklar λ . Ini dapat ditunjukkan , sebab $\lambda T(x)=T(\lambda x)$ dan $T(\lambda x)$ adalah bayangan dari λx dan ini dalam sasaran . Dengan cara yang sama ,jika $T(x_1)$, $T(x_2)$ dalam sasaran maka jumlah $T(x_1)+T(x_2)$ juga dalam sasaran . Karena $T(x_1)+T(x_2)=T(x_1+x_2)$ adalah bayangan dari x_1+x_2 ada dalam sasaran . Dapat terjadi bahwa ruang bagian dari E^m adalah E^m sendiri .

Contoh :

Jika dipandang A adalah matrik 3 x 3 ,maka himpunan titik y=Ax untuk semua x dalam E^3 harus salah satu dari titik asal , suatu garis melalui titik asal , suatu bidang melalui titik asal atau semua dari E^3 .

Contoh diatas juga membuktikan bahwa suatu transformasi linier yang mengambil titik titik dalam E^n juga mengambil suatu ruang bagian dari E^n ke dalam suatu ruang bagian dari E^m .

Catatan :

Jika $T : E^n \longrightarrow E^m$ suatu transformasi linier belum tentu semua vektor di E^m menjadi peta dari vektor di E^n .

Contoh :

$T : E^2 \longrightarrow E^3$ dimana $T [x_1,x_2] = [x_2,0,x_1]$

maka vektor $[1,1,1] \in E^3$ bukan merupakan peta dari vektor manapun di E^3 .

Definisi 3.2.4. $T : E^n \longrightarrow E^m$ suatu transfrmasi linier maka suatu himpunan bagian dari E^m disebut ruang peta (image) dari transformasi linier dari T .

$Im(T) = \{ w | w=T(v) , v \in E^n \}$

Dapat terjadi bahwa dua vektor atau lebih yang mempunyai peta yang sama , bila hal ini terjadi maka dikatakan bahwa transformasi tersebut tidak satu satu .

Contoh :

$T : E^2 \longrightarrow E^2$ dimana $T(x_1,x_2) = (x_1+2x_2, 2x_1+4x_2)$ maka :

$T(0,0) = (0,0)$

$T(-2,1) = (0,0)$

$T(6,-3) = (0,0)$

dan lain vektor lagi yang mempunyai peta (0,0) .

Definisi 3.2.5. Misalkan T_1 suatu transformasi linier yang mengambil E^n ke dalam suatu ruang bagian dari E^r dan T_2 suatu transformasi linier yang mengambil E^r ke dalam suatu ruang bagian dari E^m . Hasilkali $T_3=T_2T_1$ dari dua transformasi linier T_1,T_2 didefinisikan sebagai berikut

$$T_3(x) = T_2[T_1(x)] \tag{3.12}$$

Jika dimisalkan $T_3(x)=y$ dan dengan menggunakan T_2 ke dalam y . Hasil kali dua transformasi linier juga merupakan transformasi linier , karena :

$$\begin{aligned} T_3(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2) &= T_2[\lambda_1T_1(x_1) + \lambda_2T_1(x_2)] \\ &= \lambda_1T_2[T_1(x_1)] + \lambda_2T_2[T_1(x_2)] \\ &= \lambda_1T_3(x_1) + \lambda_2T_3(x_2) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Jika T_1 mengambil titik dalam E^n ke dalam E^r dan T_2 mengambil suatu dalam E^r ke dalam suatu titik dalam E^m , maka $T_3=T_2T_1$ mengambil suatu titik dalam E^n kedalam suatu titik dalam E^m .

Contoh :

$T_1 : E^3 \longrightarrow E^3$ dengan $T_1(x_1,x_2,x_3) = [2x_2+x_3, 3x_1+x_2+x_3, x_2]$

$T_2 : E^3 \longrightarrow E^3$ dengan $T_2(x_1,x_2,x_3) = [2x_1+x_2+x_3, x_1+x_3, 2x_1]$

maka hasil kali $T_3 = T_2T_1$ mempunyai persamaan :

$$\begin{aligned} T_3(x_1,x_2,x_3) &= T_2T_1(x_1,x_2,x_3) \\ &= T_2[T_1(x_1,x_2,x_3)] \\ &= T_2[x_2+x_3, 3x_1+x_2+x_3, x_2] \\ &= [2(x_2+x_3)+3x_1+x_2+x_3+x_3, x_2+x_3+x_2, 2(x_2+x_3)] \\ &= [3x_1+3x_2+4x_3, 2x_2+x_3, 2x_2+2x_3] \end{aligned}$$

Definisi 3.2.5. Transformasi linier $T : E^n \longrightarrow E^n$ disebut transformasi orthogonal jika T mentransformasikan setiap $x \in E^n$ menjadi $T(x) = x^*$, tanpa mengubah panjangnya .

$$|T(x)| = |x| \text{ atau } x^*.x^* = x.x$$

Jadi panjang suatu vektor tidak berubah bila dilakukan transformasi orthogonal .

Theorema 3.2.6. Jika x_1 dan x_2 adalah dua vektor sembarang maka dengan transformasi orthogonal

$$x_1^*.x^* = x_1.x_2$$

Bukti :

$$(x_1+x_2).(x_1+x_2) = x_1.x_1+2x_1.x_2+x_2.x_2$$

jadi $(x_1+x_2).(x_1+x_2)-x_1.x_1-x_2.x_2 = 2x_1.x_2$

$$T(x_1+x_2).T(x_1+x_2)-T(x_1).T(x_1)-T(x_2).T(x_2) = 2x_1.x_2$$

$$2T(x_1).T(x_2) = 2x_1.x_2$$

$$T(x_1).T(x_2) = x_1.x_2$$

atau $x_1^* . x_2^* = x_1 . x_2$

Definisi 3.2.7. Translasi adalah perubahan sistem koordinat dimana sumbu sumbunya sejajar , sedang vektor vektor basis mempunyai panjang dan arah positif yang tetap .

Misalkan titik awal yang baru $O^*(p_1,p_2,...,p_n)$, jika titik sembarang A mempunyai koordinat koordinat $(x_1,x_2,...,x_n)$ terhadap sistem lama dan koordinat koordinat $(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ terhadap sistem yang baru , dengan hubungan :

$$x_i = x_i^* + p_i \quad ,i=1,2,...,n$$

Contoh :

Pada bidang XOY dengan titik awal yang baru O^* berkoordinat (5,3) terhadap koordinat lama . Suatu titik P(x,y) terhadap koordinat lama akan mempunyai koordinat (x^*,y^*) terhadap sistem yang baru dengan

$$x = x^* + 5 \text{ atau } x^* = x - 5$$

$$y = y^* + 3 \text{ atau } y^* = y - 3$$

maka titik $P^*(x-5,y-3)$.