BAB II

RUANG VEKTOR

2.1. OPERASI VEKTOR

Definisi 2.1.1. Sebuah vektor a berkomponen n adalah suatu urutan n tuple dari bilangan-bilangan ditulis sebagai baris $[a_1, a_1, \ldots, a_n]$ atau sebagai sebuah kolom $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

a_i $, i=1,2,\ldots,n$ diasumsikan bilangan-bilangan riil dan disebut komponen-komponen dari vektor .

Definisi 2.1.2. Sebuah vektor satuan dinyatakan oleh e_i ialah suatu vektor dengan satu sebagai nilai dari komponennya dan dengan semua komponen lainnya nol .

$e_1=[1,0,0,\ldots,0]$, $e_2=[0,1,0,\ldots,0]$, ... , $e_n=[0,0,\ldots,1]$

Definisi 2.1.3. Vektor nol ditulis 0 adalah sebuah vektor dengan semua komponen-komponennya adalah nol .

$$0 = [0,0,\ldots,0]$$

Definisi 2.1.4. Dua n komponen vektor a dan b disebut sama jika dan hanya jika semua komponen-komponen yang saling berhubungan adalah sama .

$$a = b \iff a_i = b_i$$

Akibat 2.1.4

Dari definisi 2.1.4 mengakibatkan : $a=b \Rightarrow b=a$

Definisi 2.1.5. Bila diberikan dua n komponen vektor a dan b maka $a \geq b$ berarti $a_i \geq b_i$, $i=1,2,...,n$ dan $a \leq b$ berarti $a_i \leq b_i$, $i=1,2,...,n$. Demikian juga $a > b$ berarti $a_i > b_i$ untuk semua i dan $a < b$ berarti $a_i < b_i$ untuk semua i .

Definisi 2.1.6. Hasil kali sebuah skalar λ dan sebuah vektor $a=[a_1,a_2,...,a_n]$ ditulis λa dirumuskan sebagai vektor

$$\lambda a = [\ \lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n\ ]$$

Akibat 2.1.6

Dari definisi 2.1.6 mengakibatkan :

1. $a \geq b$ dan $\lambda > 0$ maka $\lambda a \geq \lambda b$
2. $a \geq b$ dan $\lambda < 0$ maka $\lambda a \leq \lambda b$

Definisi 2.1.7. Jumlah dari dua vektor $a=[a_1,a_2,...,a_n]$ dan $b=[b_1,b_2,...,b_n]$ ditulis $a+b$ didefinisikan sebagai vektor :

$$a+b = [\ a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_n+b_n\ ]$$

Akibat 2.1.7

Dari definisi 2.1.7 mengakibatkan :

1. $a+b = b+a$
2. $a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c$

Definisi 2.1.8. Pengurangan dua vektor didefinisikan dengan operasi :

$$a-b = a+(-1)b$$
$$= [\ a_1-b_1, a_2-b_2, ..., a_n-b_n\ ]$$

Definisi 2.1.9. Bila diberikan n komponen vektor-vektor sebanyak m , $a_1, a_2, \dots, a_m$ maka n komponen vektor

$$a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$$

disebut kombinasi linier dari $a_1, a_2, \dots, a_m$ untuk sembarang $\lambda_i, i=1,2,\dots,m$

Contoh :

1. a − a = 0 ; a + 0 = a
2. a + a = 2a

Definisi 2.1.10. Jarak dari vektor (titik) a ke vektor (titik) b ditulis | a − b | didefinisikan sebagai :

$$|a-b| = \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2\right]^{1/2}$$

Definisi 2.1.11. Panjang atau besar dari sebuah vektor a dinotasikan |a| dan didefinisikan sebagai :

$$|a| = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{1/2}$$

Definisi 2.1.12. Sudut θ antara dua vektor $a=[a_1, a_2, \dots, a_n]$ dan $b=[b_1, b_2, \dots, b_n]$ dengan $a,b \neq 0$, dihitung dari :

$$\cos \theta = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} \; a_i \; b_i}{[\Sigma_{i=1}^{n} \; a_i^{\,2}]^{1/2} \; [\Sigma_{i=1}^{n} \; b_i^{\,2}]^{1/2}}$$

Definisi 2.1.13. Sebuah matrik didefinisikan sebagai susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan yang diatur dalam barisan-barisan dan kolom-kolom . Matrik ditulis sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

urutan diatas disebut sebuah m-n matrik (ditulis $m \times n$) karena memiliki m baris dan n kolom . .

Definisi 2.1.14. Dua matrik A dan B dikatakan sama , jika identik yaitu jika elemen elemen bersangkutan adalah sama . Maka A = B , jika hanya jika $a_{ij} = b_{ij}$.

Definisi 2.1.15 Bila diberikan sebuah matrik A dan sebuah skalar λ , hasil parkalian λ dan A , ditulis λA di definisikan sebagai

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{23} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.16. Jumlah C dari matrik A memiliki m baris dan n kolom dan sebuah matrik B memiliki m baris dan n kolom ialah sebuah matrik yang mempunyai m baris dan n kolom yang elemen-elemennya diberikan oleh

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{(untuk semua i,j)}$$

Definisi 2.1.17. Jika diberikan sebuah $m \times n$ matrik A dan sebuah $n \times r$ matrik B , hasil kali AB didefinisikan sebagai $m \times r$ matrik C , yang elemen-elemennya dihitung dari elemen-elemen A,B menurut :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\ b_{kj} \qquad i = 1,2, \ldots ,m \quad j = 1,2, \ldots ,r$$

2.2. RUANG VEKTOR

Definisi 2.2.1. Sebuah n dimensi ruang Euclid (E^n) didefinisikan sebagai kumpulan dari semua vektor-vektor (titik-titik) $a=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ untuk vektor ini penjumlahan dan perkalian dengan skalar didefinisikan dan berkaitan dengan setiap dua vektor dalam satu kumpulan ada sebuah bilangan tidak negatif yang disebut jarak .

Definisi 2.2.2. Sebuah ruang vektor (V_n) adalah pengumpulan dari vektor vektor yang tertutup oleh operasi penjumlahan dan perkalian dengan sebuah skalar .

Pernyataan "sebuah kumpulan dari vektor vektor yang tertutup oleh operasi operasi penjumlahan dan perkalian dengann sebuah skalar " ialah jika **a**,**b** ada dalam kumpulan tersebut maka jumlah **a**+**b** juga ada dalam kumpulan tersebut dan jika λ dalam kumpulan tersebut maka λ**a** juga didalam kumpulan untuk sembarang nilai skalar λ .

Ruang V_n identik dengan ruang euclid E^n yang berdimensi n jika panjang didefinisikan dalam V_n seperti didalam E^n . Meskipun jelas E^n ialah sebuah ruang vektor , tidak selalu bahwa V_n adalah suatu E^n .

Definisi 2.2.3. Sekumpulan vektor vektor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dalam E^n dikatakan bergantung linier jika terdapat skalar λ_i tidak semuanya nol sehingga :

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$$

jika himpunan λ_i untuk persamaan diatas memenuhi hanya $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$ maka vektor vektor dikatakan bebas linier .

Theorema 2.2.4. Vektor vektor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dari E^n adalah bergantung linier jika dan hanya jika salah satu dari vektor vektornya merupakan kombinasi linier dari lain lainnya .

Bukti :

Terlebih dahulu akan dibuktikan bahwa jika vektor vektor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dari E^n adalah bergantung linier , maka salah satu dari vektor vektornya merupakan kombinasi linier dari lain lainnya .

Jika salah satu dari vektor vektornya adalah kombinasi linier dari vektor lainnya , maka vektor vektor tersebut dapat dituliskan sebagai a_m maka

$$a_m = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{m-1} a_{m-1}$$

atau

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{m-1} a_{m-1} + (-1) a_m = 0$$

dengan paling sedikit satu koefisien (−1) bukan nol, maka menurut definisi 2.2.3 vektor vektor adalah bergantung linier.

Akan dibuktikan bahwa jika salah satu dari vektor vektornya merupakan kombinasi linier dari lain lainnya maka$a_1, a_2, \ldots, a_m$ dari E^n adalah bergantung linier

Misalkan vektor vektor adalah bergantung linier maka menurut definisi 2.2.3 paling sedikit ada satu $\lambda_i \neq 0$ misalkkan $\lambda_m \neq 0$ maka

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{m-1} a_{m-1} + \lambda_m a_m = 0$$

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{m-1} a_{m-1} = -\lambda_m a_m$$

atau

$$a_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} a_2 - \ldots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} a_{m-1}$$

Jadi ada satu vektor sebagai kombinasi linier dari lain lainnya .

Theorema 2.2.5. Jika sebuah himpunan vektor vektor adalah bebas linier maka setiap himpunan bagian dari himpunan vektor vektor ini juga bebas linier.

Bukti:

Andaikan $a_1, a_2, \ldots, a_m$ adalah bebas linier sedang misalnya $a_1, a_2, \ldots, a_l$ adalah bergantung linier $(l<m)$. Dalam hal ini terdapat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ tidak semuanya nol sehingga

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_l a_l = 0.$$

Jika diambil $\lambda_{l+1} = \lambda_{l+2} = \ldots = \lambda_m = 0$ maka :

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0$$

maka satu atau lebih λ_i dalam himpunan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ tidak nol . Ini berlawanan dengan kenyataan bahwa $a_1, a_2, \ldots, a_m$ adalah bebas linier .

Theorema 2.2.6. Jika sembarang himpunan vektor vektor adalah bergantung linier setiap himpunan yang lebih besar dari vektor vektor yang mencakup himpunan vektor vektor itu adalah juga bergantung linier .

Diberikan suatu himpunan vektor vektor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dari E^n dikatakan bahwa jumlah maksimum dari vektor vektor bebas linier dalam himpunan ini ialah k jika mencakup paling sedikit satu himpunan bagian dari k vektor vektor yang bebas linier , maka tidak terdapat sebuah himpunan bagian yang bebas linier dan mengandung k+1 vektor vektor jika himpunan $a_1, a_2, \ldots a_m$ adalah bebas linier maka jumlah maksimum dari vektor vektor bebas linier dalam himpunan adalah m kecuali kalau himpunan vektor vektor lainnya mengandung vektor nol maka jumlah maksimum dari vektor vektor bebas linier dalam himpunan paling sedikit adalah satu .