BAB II

MATERI DASAR

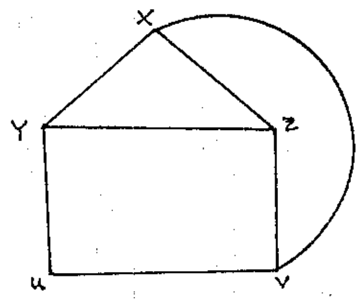
2.1. Pengertian Graph

Definisi 1.

Suatu graph terdiri dari himpunan sejumlah berhingga obyek yang disebut titik yang dinyatakan dengan V dan suatu himpunan ganda E yang merupakan himpunan pasangan unsur-unsur dari V yang disebut garis. Graph G dinyatakan oleh G = (V,E) dan ruas garis berpangkal dan berujung pada titik-titik.

Contoh 1.

Berikut suatu graph G=(V,E) dengan himpunan titik $V=\{x,y,z,u,v\}$ dan himpunan garis $E=\{(x,y),(x,z),(x,v),(y,z),(y,u),(z,v),(u,v)\}$. Graph seperti ini dapat digambar secara geometris seperti berikut,



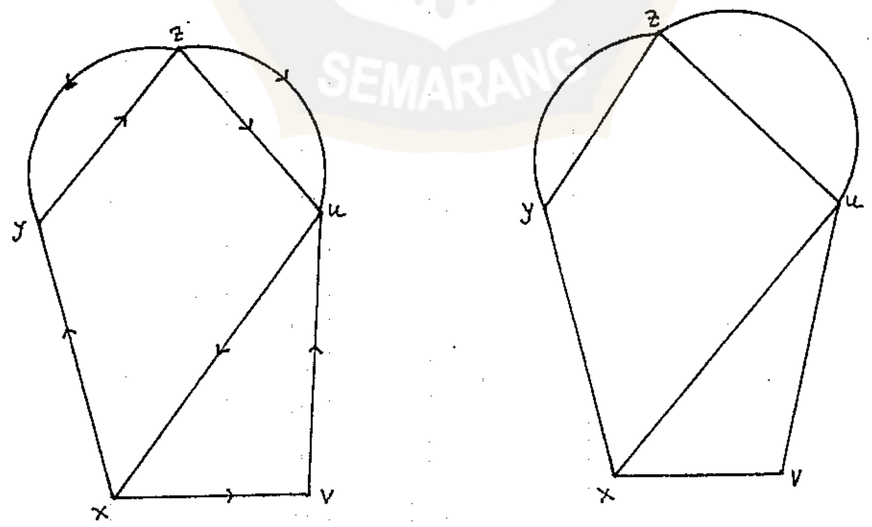
gb.6. Graph dengan 5 titik dan 7 garis.

Definisi 2.

Suatu graph berarah (directed graph atau digraph) G terdiri dari suatu himpunan V obyek atau titik dan suatu himpunan ganda E yaitu garis, yang terdiri dari pasangan terurut dari titik yang dituliskan sebagai (x,y) yang disebut dengan garis berarah.

Contoh 2.

Misalkan G=(V,E) adalah suatu graph berarah dengan himpunan titiknya adalah $V=\{x,y,z,u,v\}$ dan garis berarah $E=\{(x,y),(y,z),(z,y),(z,u),(u,x),(z,u),(v,u),(x,v)\}$. Pada gambar di bawah ini sebelah kiri adalah graph berarah dan disebelah kanan adalah graph tidak berarah.



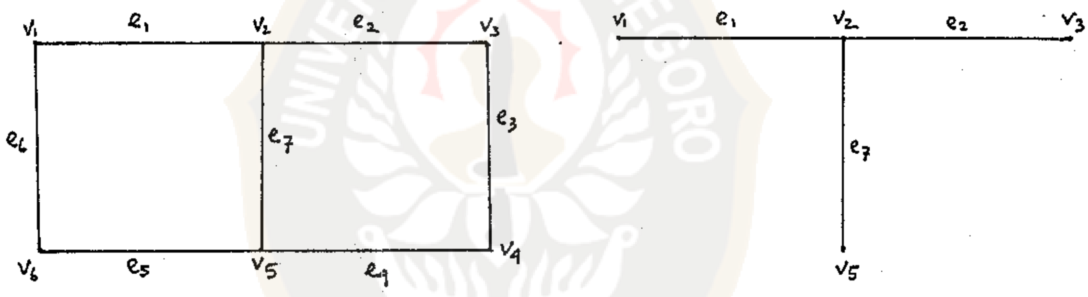
gb.7. Graph berarah dan graph tidak berarah yang terhubung.

Definisi 3.

H disebut subgraph dari graph $G=(V,E)$ jika H adalah suatu graph dengan himpunan titik V_1 dan himpunan garis E_1 yang bersifat bahwa $V_1 \subset V$ dan $E_1 \subset E$.

Contoh 3.

Andaikan $G=(V,E)$ adalah graph dengan himpunan titik $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ dan himpunan garis $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$. Seperti pada gambar,



gb.8. H adalah subgraph dari G.

Jika $V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_5\}$ dan $E_1=\{e_1,e_2,e_7\}$ maka $H=(V_1,E_1)$ merupakan graph. Jadi H adalah suatu subgraph dari G. Tetapi himpunan yang terdiri atas dua bagian berurutan dengan $V_2=\{v_1,v_2\}$ dan $E_2=\{e_4,e_5\}$ tidak merupakan graph, karena ada anggota dari E_2 yaitu e_4 yang titik awal maupun titik akhir-nya bukan merupakan anggota dari V_2. Jadi $H_1=(V_2,E_2)$ bukan suatu graph.

Definisi 4.

Jumlah titik-titik dalam suatu graph disebut dengan order dari graph.

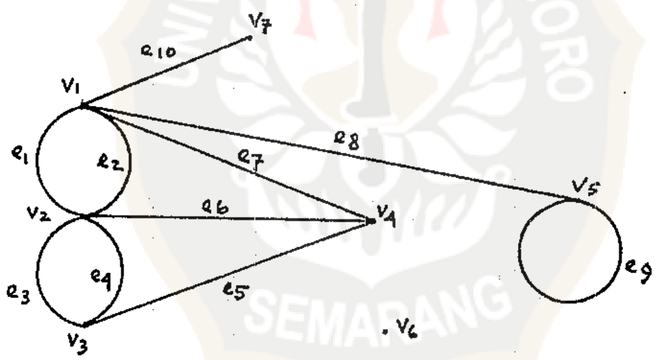
Contoh 4.

Seperti pada gambar 3, graph tersebut mempunyai order 6.

Definisi 5.

Garis suatu graph yang bertemu pada titik yang sama, dapat ditulis (x,x) disebut dengan loop.

Contoh 5.



gb.9. e_9 merupakan loop.

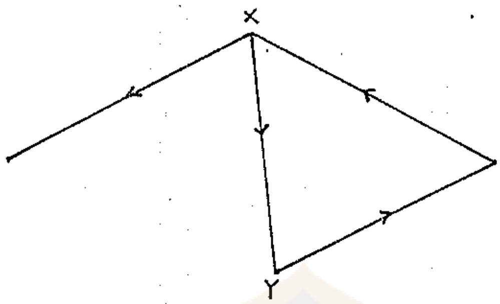
Definisi 6.

Suatu garis e=(x,y) dalam suatu graph, titik x disebut titik awal (initial endpoint) dan titik y disebut titik akhir (terminal endpoint).

Definisi 7.

Dalam suatu graph, titik y disebut pendahulu atau predecessor titik x jika terdapat suatu garis dengan bentuk (y,x). Titik y disebut keturunan atau successor titik x jika terdapat suatu garis dengan bentuk (x,y).

Contoh 6.

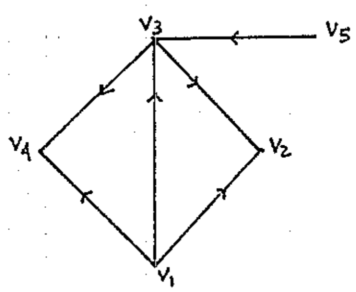


gb.10. Titik x sebagai pendahulu y, y sebagai keturunan titik x.

Definisi 8.

Derajat (degree) suatu titik adalah banyaknya garis yang bertemu pada titik tersebut. Dalam suatu graph berarah yang dimaksud dengan derajat masuk (in degree) ialah jumlah garis yang masuk pada suatu titik dan dilambangkan $d_G^-(x)$ dan yang dimaksud dengan derajat keluar (out degree) ialah jumlah garis yang keluar pada suatu titik dilambangkan $d_G^+(x)$. Maka derajat dari titik e adalah $d_G(x)=d_G^-(x) + d_G^+(x)$.

Contoh 7.



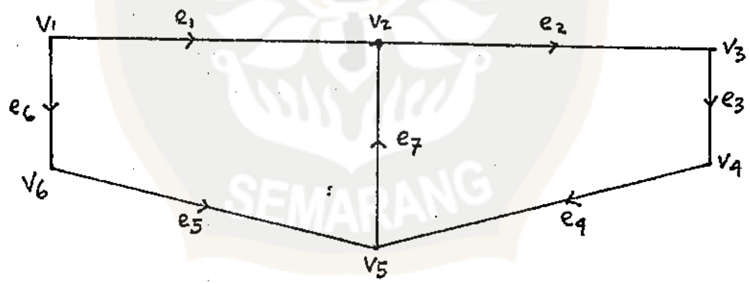
gb.11. Titik v_3 mempunyai derajat 4.

Definisi 9.

Lintasan (path) adalah deretan bergantian antara titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik serta garis tidak boleh diulang. Atau suatu lintasan dengan panjang $q>0$ adalah suatu rantai $\alpha=(e_1,e_2,\ldots,e_i,\ldots e_q)$ dengan titik akhir garis e_i adalah titik awal e_{i+1} untuk semua $i<q$.

Contoh 8.

Andaikan $G=(V,E)$ adalah graph berarah dengan himpunan titik $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ dan himpunan garis $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$. Maka lintasan v_2 ke v_5 adalah $v_2,e_2,v_3,e_3,v_4,e_4,v_5$.



gb. 12. Lintasan v_2 ke v_5.

Definisi 10.

Cycle adalah suatu rantai yang sedemikian sehingga garis tidak boleh diulang dan dua titik dari rantai merupakan titik yang sama.

Contoh 9.

Seperti pada gb.12, terdapat suatu rantai yaitu

$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ dan titik v_1 merupakan awal dan akhir dari cycle.

Definisi 11.

Sirkuit adalah suatu cycle $\alpha = (e_1, e_2, \ldots e_q)$ sedemikian sehingga untuk semua $i<q$ dengan titik akhir (terminal endpoint) garis e_i adalah titik awal (initial endpoint) dari garis e_{i+1}.

Contoh 10.

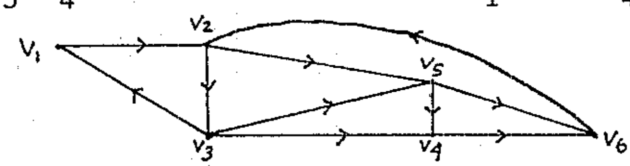
Seperti pada gb.12, lintasan $v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_7, v_2$ merupakan lintasan tertutup atau merupakan sirkuit.

Definisi 12.

Bila suatu lintasan setiap titiknya berbeda, maka lintasan yang demikian disebut sebagai lintasan elementer.

Contoh 11.

Pada graph berikut ini, maka $v_1, v_2, v_5, v_6, v_2, v_3, v_4$ adalah suatu lintasan yang menghubungkan v_1 dan v_4, tetapi lintasan ini bukan lintasan elementer karena titik v_2 diulang dua kali. Dari graph ini dapat diambil lintasan elementer v_1, v_2, v_3, v_4 yang menghubungkan v_1 dan v_4.



gb.13. Lintasan elementer v_1, v_2, v_3, v_4.

Definisi 13.

Sebuah graph dikatakan sebagai graph terhubung (connected graph) jika paling sedikit terdapat satu buah lintasan diantara setiap pasang titiknya.

Contoh 12.

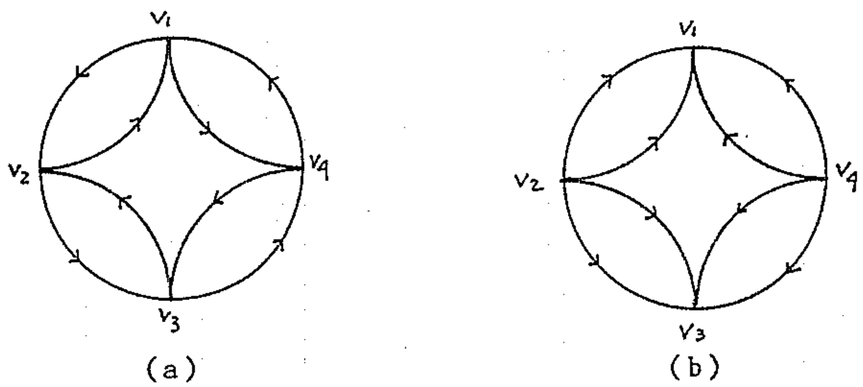
Pada gb.9, adalah suatu graph tetapi graph yang tidak terhubung karena v_6 tidak terdapat suatu lintasan ke titik yang lainnya.

Definisi 14.

Suatu graph G=(V,E) dikatakan menjadi strongly connected (terhubung kuat) jika untuk semua titik $v_i, v_j \in V$, terdapat suatu lintasan $e_1=(v_i,v_j)$ dan suatu lintasan $e_2=(v_j,v_i)$.

Contoh 13.

Pada gambar di bawah, gb.(a) adalah terhubung kuat tetapi gb.(b) terhubung tidak kuat.

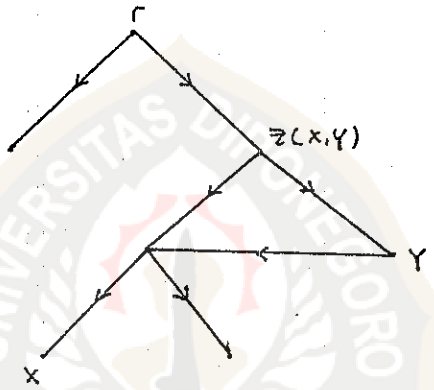


gb.14. Graph terhubung kuat dan terhubung tidak kuat.

Definisi 15.

Suatu graph G=(V,E) dikatakan menjadi seolah-olah terhubung kuat (quasi-strongly connected) jika untuk setiap pasang titik x,y terdapat suatu titik z(x,y). Dari titik ini terdapat suatu lintasan ke x dan suatu lintasan ke y.

Contoh 14.



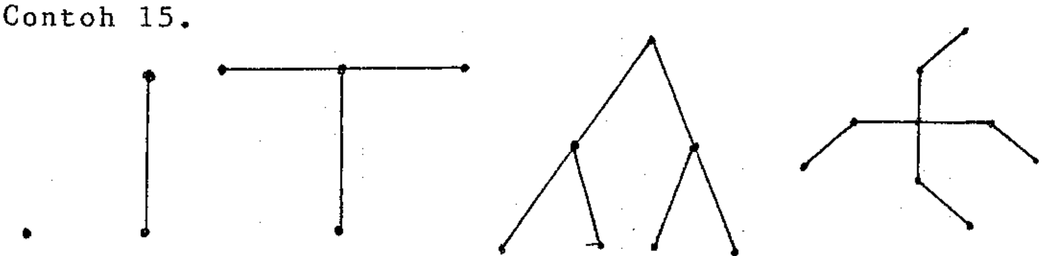
gb.15. Graph yang seolah-olah terhubung kuat.

2.2. **Tree**

Definisi 16.

Tree (pohon) adalah graph terhubung yang tidak memiliki cycle.

Contoh 15.



gb.16. Tree.

Teorema 1.

Ada satu dan hanya satu lintasan di antara pasangan titik-titik dalam sebuah tree T.

Bukti,

Jika T adalah graph terhubung, maka harus ada sedikitnya satu lintasan di antara pasangan titik-titik dalam T.

Andaikan di antara 2 titik a dan b pada T ada 2 buah lintasan yang berbeda, union dari 2 lintasan tersebut akan membentuk suatu cycle dan menurut definisi 16 maka T bukan merupakan tree. Kontradiksi dengan T adalah tree, pengandaian salah yang benar adalah ada satu dan hanya satu lintasan antara pasangan titik-titik dalam T. Terbukti.

Teorema 2.

Jika dalam graph G ada satu dan hanya satu lintasan di antara pasangan titik-titiknya maka G adalah tree.

Bukti,

Andaikan dalam graph G ada sebuah cycle maka ada sedikitnya satu pasang titik a dan b sedemikian sehingga ada 2 lintasan yang berbeda antara a dan b.

Kontradiksi dengan G mempunyai satu dan hanya sa tu lintasan di antara pasangan titik-titiknya. Pengandaian salah, yang benar adalah G tidak mempunyai cycle. Sehingga menurut definisi 16, G adalah tree. Terbukti.

Suatu graph G=(V,E) tidak terhubung, maka dapat dibuat suatu partisi yang tunggal dari himpunan V ke dalam himpunan bagian $V_1, V_2, \ldots, V_k$ sehingga setiap dua titik yang terdapat dalam himpunan bagian yang sama akan dihubungkan oleh suatu lintasan. Demikian pula setiap dua titik yang diambil dari dua himpunan yang berbeda dari V tidak dapat dihubungkan oleh suatu lintasan.

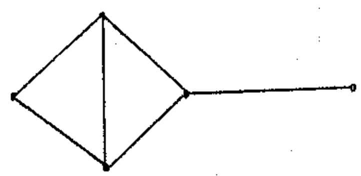
Definisi 17.

Dalam suatu graph G=(V,E), terdapat sejumlah k buah graph baru $G_i=(V_i,E_i)$ dengan $V_i \subset V$ dan $E_i \subset E$.

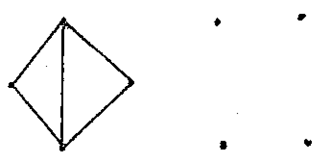
Maka k buah graph baru tersebut sebagai komponen terhubung dari G.

Contoh 16.

Beberapa buah graph dan jumlah komponennya.



(a)



(b)

(c) (d)

gb.17. Jumlah komponen dalam graph.

Keterangan :

gb.(a) terdiri dari 1 komponen,
gb.(b) terdiri dari 5 komponen,
gb.(c) terdiri dari 1 komponen,
gb.(d) terdiri dari 2 komponen.

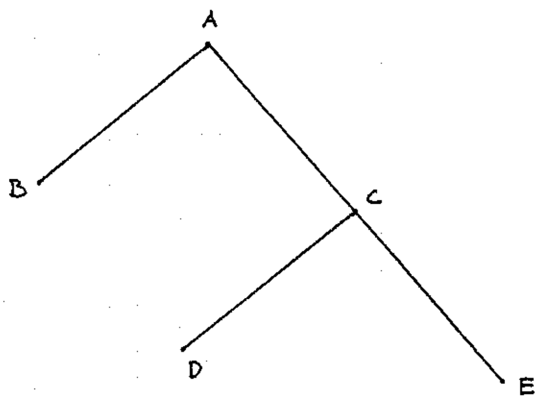
Jadi dapat dikatakan bahwa suatu graph adalah terhubung bila jumlah dari komponen-komponennya adalah 1 (satu).

Definisi 18.

Pendant titik (pendant vertex) adalah titik yang mempunyai degree 1.

Contoh 17.

Titik-titik B,D,E adalah pendant titiknya.



gb. 18. Pendant titik.

Teorema 3.

Sebuah tree dengan n titik mempunyai n-1 garis.

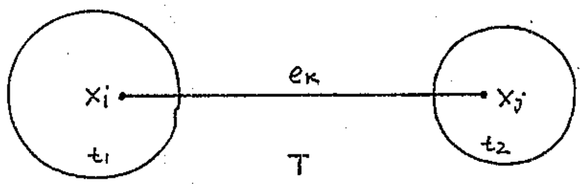
Bukti,

Akan dibuktikan dengan induksi matematika.

Pernyataan benar jika tree itu terdiri atas satu titik saja. Untuk n-1 titik, tidak ada garis. Benar.

Misalkan pernyataan benar untuk seluruh tree dengan jumlah titik n-1 titik. Selanjutnya akan dibuktikan teorema benar untuk jumlah n titik.

Pandang sebuah tree T dengan n titik. Dalam T, e_k adalah sebuah garis graph dengan titik ujung x_i dan x_j. Sesuai dengan teorema 1 maka tidak ada lintasan lain di antara x_i dan x_j kecuali e_k. Karena itu penghapusan e_k dari T akan memutus tree ini.



gb.19. Tree dengan n titik.

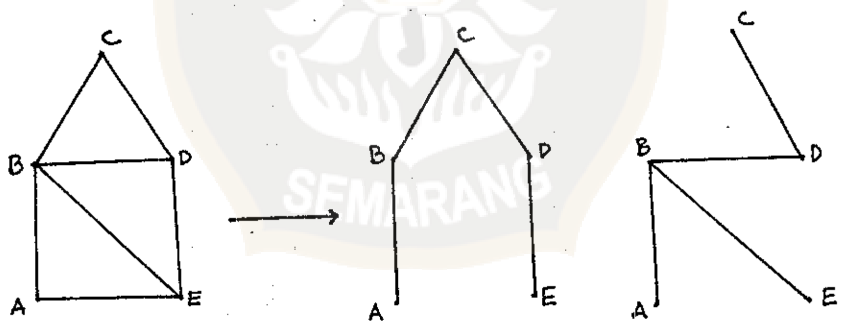
Sehingga T-e_k terdiri tepat 2 komponen. Kedua tree tersebut t_1 dan t_2 mempunyai titik kurang dari n titik. Ambil t_1 terdiri dari n-1 titik dan t_2 terdiri dari satu titik atau titiknya sebagai pendant titik. Maka $t_1$memuat n-2 garis dan t_2 memuat 0 (nol) garis. Sehingga $T-e_k = t_1 + t_2$ memuat n-2 garis graph. Dari sini T mempunyai tepat n-1 garis graph. Terbukti.

Definisi 19.

Suatu tree T dikatakan sebagai spanning tree dari graph terhubung G jika T mempunyai titik yang sama dengan G dan garisnya merupakan sebagian dari garis G.

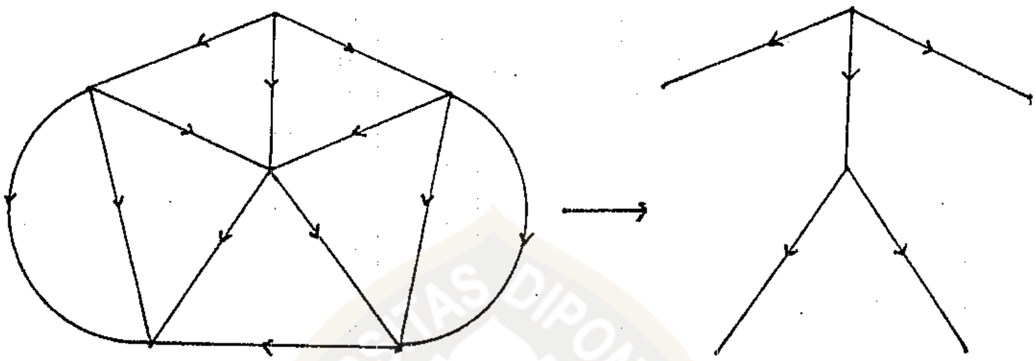
Contoh 18.

Graph berikut ini mempunyai banyak spanning tree dan dua diantaranya digambarkan di bawah ini.



gb.20. Graph sembarang dengan dua spanning tree-nya.

Untuk mencari spanning tree dari sebuah graph terhubung sangatlah sederhana. Jika graph G tidak mempunyai sirkuit maka spanning tree adalah dirinya sendiri. Dan jika graph G mempunyai sirkuit, hapus sebuah garis dari sirkuit itu tetapi penghapusan ini tetap membuat graph G terhubung. Jika masih terdapat sirkuit, ulangi lagi langkah penghapusan tadi sampai tidak terdapat sirkuit lagi. Dengan demikian telah didapatkan suatu spanning tree.

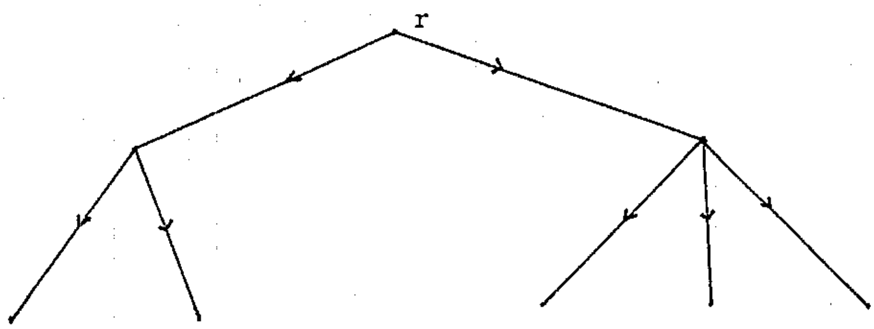


gb. 21. Mencari spanning tree.

Definisi 20.

Suatu titik pada tree disebut akar (root) jika salah satu titik ditunjuk sebagai pangkal terhadap yang lainnya dan mempunyai derajat masuk 0 (nol) sedang titik lainnya mempunyai derajat masuk 1 (satu).

Contoh 19,



gb.22. Tree dengan r sebagai akarnya.

Dalam suatu graph G=(V,E), titik r adalah sebagai akar jika semua titik dari G dapat dicapai melalui suatu lintasan dimulai dari r.

Suatu graph tidak selalu mempunyai akar.