BAB. II

MATERI PENUNJANG

2.1. Harapan Matematik.

Definisi.1.

Misal x suatu peubah acak dengan distribusi peluang f(x) .Nilai harapan matematik x ialah :

$E(x) = \Sigma\, xf(x)$ bvila x diskrit

$E(x) = \int x.f(x)\, dx$ bila x kontinyu.

Definisi .2.

fungsi f(x) adalah fungsi distribusi peluang suatu peubah diskrit x, bila untuk setiap hasil x yang mungkin :

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_{x} f(x) \geq 1.$
3. $P(X=x) = f(x)$

Definisi.3.

fungsi f(x) adalah fungsi peubah acak acak kontinyu x, yang didefinisikan padas bilangan riel bila :

1 $f(x) \geq 0$

2.$\int_{-\sim}^{\sim} f(x).dx = 1$

3.$P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$

2.1.1 Beberapa Teorema Harapan Matematik.

Berikut ini dituliskan beberapa teorema yamg berguna untuk menyederhanakan perhitungan harapan matematik Teorema matematik ini akan memungkinkan perhitungan harapan matematik dari harapan matematik yang telah diketahui sebelumnya.

Teorema .1.

Bila a dan b tetapan , maka

$$E\ (ax + b\ ) = a\ E(x) + b.$$

Bukti :

$$E\ (\ ax + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b).f(x)\ dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\ dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx.$$

$$= a\ E(x) + b$$

Teorema.2.

Nilai Harapan matematik jumlah atau selisih dua fungsi atau lebih , dari suatu peubah acak x sama dengan jumlah atau selisih nilai harapan matematik fungsi tersebut.

$$E\ [g\ (x) \pm h\ (x)] = E[g\ (x)]\ \pm [h(x)]$$

Bukti :

Menurut definisi

$$E\ [g\ (x) \pm h(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\ g(x) \pm h(x)\ ] f(x)\ dx.$$

$$= E[g(x)] \pm E[h(x)]$$

Teorema .3.

Misal X dan Y peubah acak, maka :

E (XY) = E (X).E(Y))

Bukti :

$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f(x,y)\, dx.dy.$

karena x dan y bebas, maka dapat ditulis

f(x,y) = g(x).h(y) jadi:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, g(x)h(y)\, dx.dy.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} y\, d(y)$$

$$= E(X).E(Y))$$

2.2. Bentuk-bentuk distribusdi peluang.

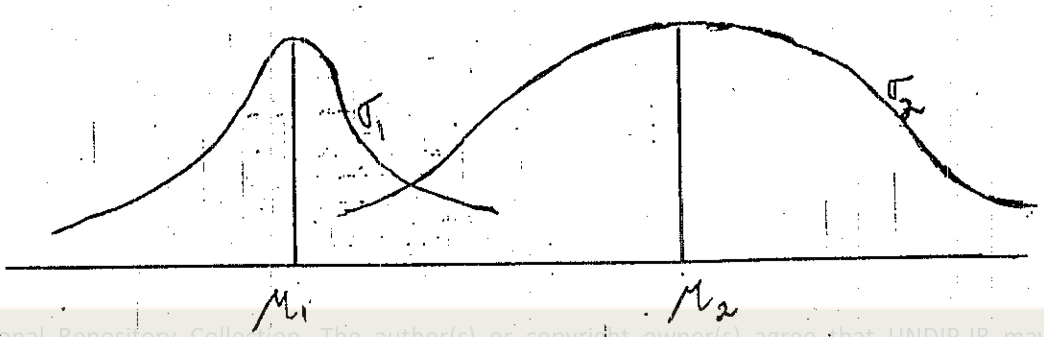
2.2.1. Distribusi Normal.

Bentuk fungsi distribusi Normal adalah:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[(x-\mu)/\sigma\right]^2} dx \quad \ldots\ldots(2.1)$$

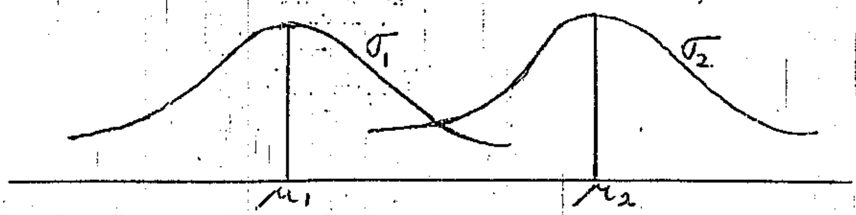
Bentuk Macam-macam kurva Normal sebagai berikut:

Gambar.1.



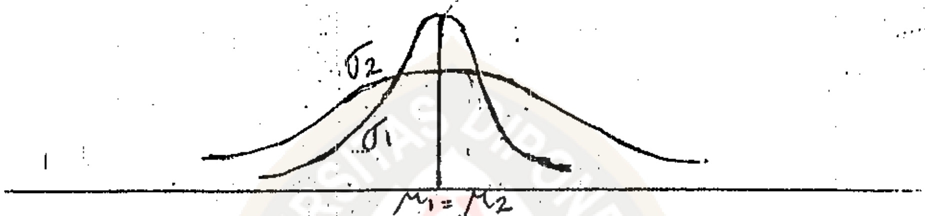
Gb.1. adalah kurva Normal dengan $\mu_1 < \mu_2$ $\sigma_1 < \sigma_2$

Gambar.2.



Gb.2. Kurva Normal denghan $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 = \sigma_2$

Gambar.3.



Gb.3. adalah kurva Normal dimana $\mu_1 = \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$

Sifat-sifat Kuva Normal :

1. Modus titik pada sumbu datar memberikan maksimum kurva pada $x = \mu$
2. Simetris terhadap μ
3. Kurva mempunyai titik belok pada $x = \mu \pm \sigma$ cekung dari bawah bila $x - \mu < x < \mu + \sigma$ dan cekung dari atas untuk yang lain.
4. Kedua ujung kurva Normal mendekati asimtot sumbu datar bila harga x menjauhi μ baik kekiri maupun ke kanan .
5. Seluruh luas di bawah kurva dan di atas sumbu datar sam adengan satu.

Berikut ini ditunjukkan bahwa μ dan σ^2 adalah rata-rata dan variansi distribusi Normal.

$$E\,(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2}\, dx$$

dengan mensubtitusi $Z = (x-\mu)/\sigma$ $dx = \sigma\, dz$ diperoleh

$$E\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma Z) \cdot e^{-Z^2/2}\, dZ$$

$$= \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Z^2/2}\, dZ + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z \cdot e^{-Z^2/2}\, dZ$$

$$= \mu \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.2)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Z^2/2}\, dZ$ adalah luas daerah di bawah kurva Normal dengan rata-rata =0 dan variansi 1 , sehingga berharga $\sqrt{2\pi}$ sedang $\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z \cdot e^{-Z^2/2}\, dZ = 0$. Jadi $E\,(x) = \mu$ adalah rata-rata distribusi Normal .Sedang variansi dari distribusi Normal adalah sebagai berikut:

$$E\,[(x-\mu)^2] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-Z \cdot e^{-Z^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Z^2/2}\, dZ \right]$$

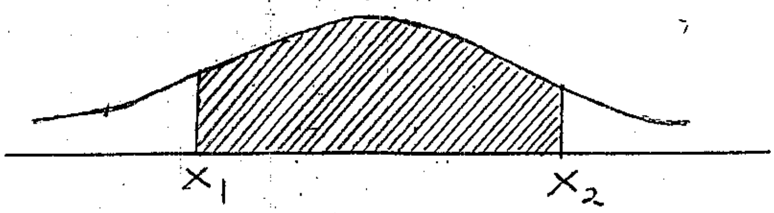
$$= \sigma^2 (0 + 1) = \sigma^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

Dalam distribusi peluang kontinyu dibuat sedemikian rupa sehingga luas daerah antara kedua ordinat $x=x_1$ dan $x=x_2$ sama dengan peluang peubah acssak x mendapat $x=x_1$ dan $x= x_2$. Jadi untuk luas daerah yang diarsir pada gambar.4. menyatakan

$$P\,(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2}\, dx$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$

Gambar.4.



2.2.2. Distribusi Binomial:

Distribusi Binomial adalah distribusi kemungkinan dengan variabel random diskrit.Pada distribusi binomial gejala yang timbul yang kita harapkan disebut probabilitas "sukses", sedang probabilitas yang tidak timbul gejala yang kita harapkan disebut probabilitas gagal. "Sukses" dan "gagal" masing-masing diberi simbol P dan Q, dimana Q=1-P.Probablitas timbulnya gejala "x kali sukses dan (n-x) kali gagal dinyatakan dengan rumus sebagai berikut:

$$P\ (x,n) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} P^x\ (1-P)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} P^x . Q^{n-x}$$

P(x,n)=Probabilitas timbulnya gejala "x kalisukses dan(n-x) kali gagal".

P =gejala yang timbul yang kita harapkan.

Q =gejala yang tidak timbul, yang kita harapkan.

Karakter dari distribusi binomial adalah :

1. grafiknya diskontinyu.
2. Bentuknya ditentukan oleh harga P dan n
3. Bentuknya simetris.

Rata-rata distribusi binomialdapat ditemukan sebagai berikut:
misal hasil usaha ke j dinyatakan dengan peubah I yang bernilai 0 dan 1.Peluangnya masing-masing P dan Q . Jika $I_j=0$ menunjukkan kegagalan, sedang $I_j= 1$ menunjukkan sukses. Jadi banyaknya sukses dalam percobnaan binomial dapat ditulis sebagai n peubah sukses., sehingga

$x = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots\ldots + I_n$.

setiap I_j mempunyai rata-rata distribusi :

$\mu = E(x) = E(I_1) + E(I_2) \ldots\ldots + E(I_n)$

$= P + P + P + P \ldots + P. \quad \ldots (\text{ n suku})$

$= n.P.$

varian dari setiap hasil usaha kej sebagai berikut:

$\sigma^2_{I_j} = E[(I_j-P)^2] = E(I_j^2) - P^2$

$= 0^2.Q + (1^2).P-P^2$

$= P.Q$ untuk masing-masing j.

$\sigma^2_{I_j}$ =Varian untuk setip hasil usaha ke j

$\sigma^2 = \sigma^2_{I_1} + \sigma^2_{I_2} + \sigma^2_{I_3} + \ldots\ldots + \sigma^2_{I_n}$

$= P.Q + P.Q + P.Q + \ldots\ldots + P.Q \quad \ldots (\text{n suku})$

$= n.PQ$

$\sigma^2 = n.P.Q.$

σ^2= varian da ri distribusi Normal.

Contoh.1.

Diketahui sekelompok penderita penyakit darah peluangnya untuk sembuh =0,4.Bila diketahui ada 15 orang yang mengidap penyakit tersebut, berapakah peluangnya paling sedikit pasien akan sembuh.10 orang

Penyuelesaian.

$$P(x \geq 10) = 1 - P(x < 10)$$
$$= 1 - \sum_{x=0}^{9} (0,4)^{x} (0,6)^{15-x}$$
$$= 1 - 0,9662$$
$$= 0,0338.$$

2.2.3.Distribusi Poisson.

Definisi.4.

Distribusi Poisson adalah distribusi peluang peubah Poisson x , yang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu.

Teorema.4.

Rata-rata dan variansi distribusi Poisson sama dengan μ.

Bukti:

Untuk menunjukkan rata-rata distribusi Poisson = μ , ditulis:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x . \frac{e^{-\mu} . \mu^{x}}{x!}$$
$$= \mu \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu} . \mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

subtitusi y= x-1 , maka diperoleh

$$= \mu \sum_{y=0}^{\infty} . \frac{e^{-\mu} . \mu^{y}}{y!}$$
$$= \mu \qquad \qquad \text{..................(2.6)}$$

karena $\sum_{y=0}^{\infty} . \frac{e^{-\mu}.\mu^{y}}{y!} = \sum_{y=0}^{\infty} P\ (y,r) = 1$

$$E\ (X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 . \frac{e^{-\mu}.\mu^{x}}{x!}$$

$$= \mu \sum_{x=1}^{\infty} x . \frac{e^{-\mu}.\mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

subtitusinya y = x-1, maka

$$E\ (X^2) = \mu \sum_{y=0}^{\infty} (y+1) \frac{e^{-\mu}.\mu^{y}}{y!}$$

$$= \mu \sum_{y=0}^{\infty} y \frac{e^{-\mu}.\mu^{y}}{y!} + \mu \sum_{y=0}^{\infty} . \frac{e^{-\mu}.\mu^{y}}{y!}$$

$$= \mu^2 + \mu .$$

$$\sigma^2 = E\ [x-E(X)]^2 = E\ [x-\mu]^2$$

$$= E\ [x^2] - 2\mu . E(x) + \mu^2$$

$$= \mu^2 + \mu - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= \mu . \quad \text{.................................}(2.7)$$

jadi variansi distribusi Poisson $= \sigma^2 = \mu$

Contoh.2.

Rata-rata banyaknya kapal tangker yang tiap hari berlabuh di suatu pelabuhan sebanyak, 10 buah.Pelabuhan tersebut maksimal memuat 15 buah. Berapakah peluang menolak kedatangan tangker pada suatu hari tertentu.

Penyelesaian

Misal x menyatakan banyaknya tangker yang datang tiap hari., maka:

$$P(x > 15) = 1 - P(x \leq 15)$$

$$= 1 - \sum_{x=10}^{15} P(x,10)$$

$$= 1 - 0.9513$$

$$= 0.0487$$

jadi peluang bahwa pelabuhan tersebut menolak kedatanga kapal tangker =0,0487.

2.3. Teori Mengenai Uji Hipotesa (teri Neyman-Pearson)

Tujuan dari suatu uji hipotesa adalah memperoleh keputusan menerima /menolak suatu hipotesa.Menerima/ menolak suatu hipotesa berdasarkan analisa suatu sampeltertyentu..Dalam proses tau prosedur ini memungkinkan terjadinya 2 macam kesalahan yuaitu:

a. Kesalahan Tipe I (α)

Kesalahan tipe I adalah kesalahan yang dibuat apabila.menolak hipotesa yang pada hakekatnya benar.

b. Kesalahan tipe II (β).

Kesalahan tipe II adalah kesalahan yang dibuat apabila menerimasuatu hipotesa yang hakekatnya salah.

Kesimpulan	Hipotesa	
	H_0 benar	H_0 salah
Tolak H_0	Kesalahan tipe I (α)	($1-\beta$)
Terima H_0	($1-\alpha$)	Kesalahan tipe II (β)

Ada 2 uji hipotesa:

a. Uji eka arah , jiak bentuknya :

H_0 : $\theta = \theta_0$

H_1 : $\theta > \theta_0$

atau

H_0 : $\theta = \theta_0$

H_1 : $\theta < \theta_0$

b. Uji dwi arah, jika betunya:

H_0 : $\theta = \theta_0$

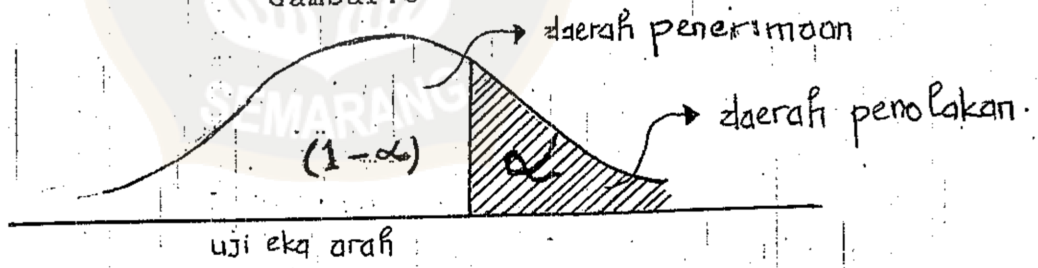
H_1 : $\theta \neq \theta_1$

Apakah akan digunakan hipotesis eka arah atau dwi arah tergantung dari kesimpulan yang akan diambil.Sebagai contoh: dalam pengujian obat baru,hipotesis nolnya ialah bahwa obat baru tersebut sama saja dengan yang telah beredar di masyarakat dan hal ini diuji oleh lawgn hipotesisnya, bahwa obat baru tersebut lebih unggul. Hal ini berarti hipotesis yang digunakan adalah hipotesis eka arah dengan daerqah kritis di sebelah kanan.Bila ingin menguji dua metoda mengajar.Apakah dua metoda mengajar yang diterapkan samabaiknya?.Untuk hal yang kedua in,uji hipotesa yang digunakan adalah Uji dwi arah, dengan daerah kritis di sebelah kiri dan kanan.

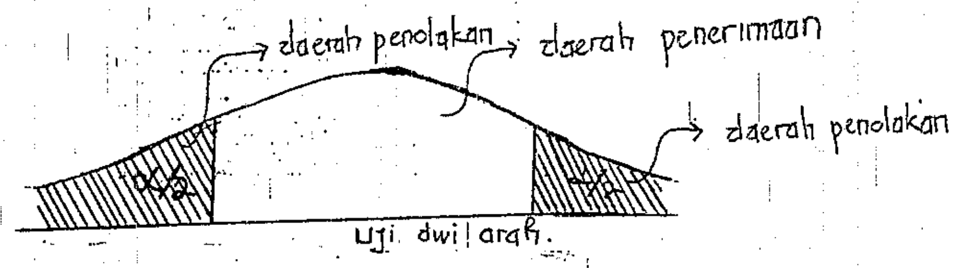
Langkah-langkah dalam pengujian hipotesis mengenai parameter θ lawan hipotesis tandingan , dapat dilihat sebagai berikut:

1. H_0: $\theta = \theta_0$.
2. H_1: tandingan H_0 yaitu $\theta < \theta_0$, $\theta > \theta_0$
3. Pilih taraf nyata α.
4. Pilih uji statistik yang sesuai dan dicari daerah kritisnya.
5. Hitung nilai statistik dari sampel ukuran n
6. Kesimpulan : tolak H_0 mempunyai nilai dalam daerah kritis, jika tidak terima H_o.

Gambar.5



Gambar.6.



2.4. Nilai Ekstrim Dari Suatu Fungsi.

Fungsi kontinyu z=F(x,y) dikatakan terbatas keatas, jika z mempunyai nilai maksimum.Fungsi z=F(x,y) dikatakan mempunyai nilai maksimum, jika:

$$\Delta = \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} - \left[\frac{\delta^2 F}{\delta x . \delta y} \right]^2 > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.8)$$

$$\frac{\delta^2 F\ (x,y)}{\delta x^2} < 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta^2 F\ (x,y)}{\delta y^2} < 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2.9)$$

Persamaan (2.10) dan (2.11) merupakan syarat cukup , sedang sarat perlunya

$$\frac{\delta\ F}{\delta x} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta\ F}{\delta y} = 0 \quad \ldots\ldots (2.10)$$

Sebaliknya fungsi kontinyu z = F (x,y) dikatakan terbatas ke bawah jika z mempunyai nilai minimum.Fungsi z= F(x,y) mempunyai nilai minimum , jika

$$\Delta = \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} - \left[\frac{\delta^2 F}{\delta x . \delta y} \right]^2 > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.11)$$

$$\frac{\delta^2 F\ (x,y)}{\delta x^2} > 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta^2 F\ (x,y)}{\delta y^2} > 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2.12)$$

Persamaa. (2.11) dan (2.14) merupakan saerat cukup ; sedang sarat perlunya adalah :

$$\frac{\delta\ F}{\delta x} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta\ F}{\delta y} = 0$$

Contoh.3.

$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 27y + 30$. Untuk x dan y manakah semua nilai ekstrim itu terçapai?.

Penyelesaian

Nilai ekstrim dicapai ,jika berlaku:

$$\frac{\delta F}{\delta x} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta F}{\delta y} = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta x} = 3x^2 - 3 = 0 \text{ atau } x = \pm 1$$

$$\frac{\delta F}{\delta y} = 3y^2 - 27 = 0 \text{ atau } y = \pm 3$$

Jadi titik-titik ekstrimnya (1,3), (1,-3), (-1,3) dan (-1,-3)

$$\frac{\delta^2 F(x,y)}{\delta x^2} = 6x \qquad \frac{\delta^2 F(x,y)}{\delta y^2} = 6y$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x.\delta y} = 0$$

$$\Delta = \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} - \left[\frac{\delta^2 F}{\delta x.\delta y}\right]^2 = 36\,xy$$

Pada titik (1,30 terdapat nilai minimum, dengan nilai minuimumnya : $F=(1,3)\ 1 + 3^3 + (3.1) - (27.3) + 30 = -26$.Di titik(1,-3), $\Delta = 36 \times (-3) = -108 < 0$ sehingga tidak memenuhi, begitu juga untuk pada (-1,3).Sedang pada titik (-1,23)

$$\left[\frac{\delta^2 F}{2}\right]_{(-1,-3)} = -6 < 0$$

sedang nilai maksimumnya :

$F(-1,-3) = (-1)^3 + (-3)^3 - 3(-1) - (-3) + 30 = 86$

2.5. teorema.5.

$$E\left[e^{Z_n h(\theta)}\right] = 1$$

Bukti

Misal D subset dari bidang komplek, maka $e^{Z(t)} = \phi(t)$ ada dan tertentu untuk beberapa titik di D (dilihat persamaan) berikut

$$E\left[e^{Z_n(t)}\right] = [\phi(t)]^N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.13)$$

dimana N integer positip

$Z_i = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

Misal P_N probabilitas $n \leq N$

$E_N(u)$ harga ekspektasi u untuk $n \leq N$

$E_N^*(u)$ harga ekspektasi untuk $n > N$

$$P_N . E_N\left[e^{Z_n t + (Z_N - Z_n)t}\right] + (1-P_N) . E_N^*\left[E^{Z_N t}\right]$$

$$= [\phi(t)]^N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.14)$$

Pada sub ppulasi didefinisikan jika $n \leq N$, maka

$$E_N\left[e^{Z_n t + (Z_N - Z_n) t}\right] = E_N\left[e^{Z_n t}[\phi(t)]^{N-n}\right]$$

dari (2.14)

$$P_N \; E_N\left[e^{Z_n t}[\phi(t)]^{-n}\right] + (1-P_N)\frac{E_N^*\left[E^{Z_N t}\right]}{[\phi(t)]^N} = 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.15)$$

jika $(1-P_N) = 0$ maka

$$\lim_{N \to \infty} P_N \; E_N\left[e^{Z_n t}\left[\phi(t)\right]^{-n} \right] = E\left[e^{Z_n t}\left[\phi(t)\right]^{-n} \right] = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.16)$$

dengan mensubtitusi $h(\phi)$ untuk semua t pada pers

$$E_N\left[e^{Z_n h(\phi)} \left[\phi(h(\phi))\right]^{-n} \right] = 1$$

$$E_N\left[e^{Z_n h(\phi)} \right] = 1 \text{ jika } \left[\phi(h(\phi))\right] = 1.$$