BAB II
INTEGRAL NUMERIK

2.1 Fungsi, Limit dan Kontinuitas

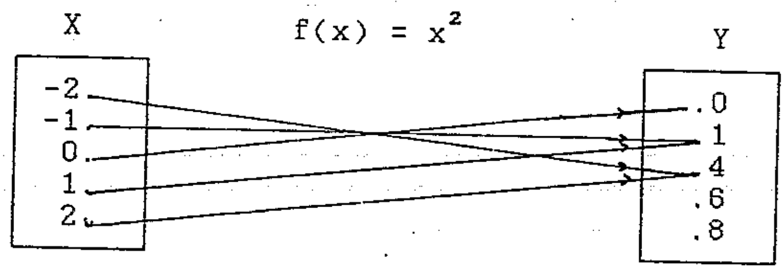
2.1.1 Fungsi

Definisi 1

Suatu fungsi f dari suatu himpunan X ke dalam suatu himpunan Y adalah korespondensi yang membawa setiap elemen x dari X tepat ke suatu elemen y dalam Y, dimana y disebut bayangan dari x yang dihasilkan oleh f, dan dinotasikan dengan f(x). Domain dari f adalah himpunan X dan range dari f adalah semua bayangan dari elemen x. Jika setiap harga dalam f berkawan tepat satu harga dalam domainnya fungsi itu disebut perkawanan satu-satu. Lebih jauh jika range dari f memuat semua anggota y, maka fungsi disebut onto.

Contoh 1

Fungsi untuk $f(x) = x^2$ dimana $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dan $Y = \{0, 1, 4, 6, 8\}$

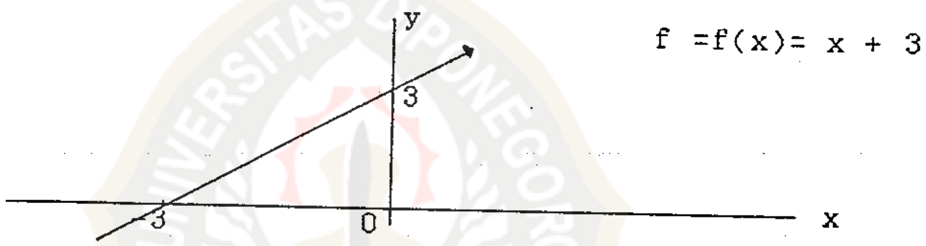


Definisi 2

Jika f adalah suatu fungsi dari x, maka didefinisikan graph dari f sebagai graph dari persamaan $y = f(x)$.

Contoh 2

Graph dari f untuk $f = f(x) = x + 3$



Definisi 3

Diberikan fungsi f dan g, maka penjumlahan $f + g$, pengurangan $f - g$, perkalian $f.g$ dan pembagian f/g didefinisikan :

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f . g)(x) = f(x) .g(x)$
4. $(f/g)(x) = f(x) / g(x)$

Contoh 3

Diambil $f = 4x$ dan $g = 2x$ maka

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 4x + 2x = 6x$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 4x - 2x = 2x$

3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 4x \cdot 2x = 8x^2$

4. $(f/g)(x) = f(x) / g(x) = 4x / 2x = 2$

2.1.2 Limit

Definisi 4

Pernyataan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, mempunyai arti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sedemikian sehingga $| f(x) - L | < \varepsilon$, dimana $0 < |x - c| < \delta$.

Contoh 4

Buktikan $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2) = 4$

Jawab :

Dari definisi untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|(3x -2) - 4| < \varepsilon$ dimana $0 < |x -2| < \delta$. Karena pemilihan dari δ tergantung pada ε, dicari hubungan antara $|(3x -2) -4|$ dengan $|x - 2|$.

Dipandang $|(3x - 2) - 4| = |3x - 6|$

$$= 3\,|x - 2|$$

sehingga $|(3x -2) - 4| < \varepsilon$

$$3\,|x - 2| < \varepsilon$$

di dapat $| x - 2 | < \frac{\varepsilon}{3}$, dengan memilih $f = \frac{\varepsilon}{3}$

(hal ini dimungkinkan karena $0 < |x - 2| < f = \frac{\varepsilon}{3}$)

di dapat $|(3x - 2) - 4| = 3|x-2| < 3f = 3(\varepsilon/3) = \varepsilon$

terbukti $\lim\limits_{x \to 2} (3x -2) = 4$

Theorema 1

Jika b dan c adalah bilangan-bilangan nol, n adalah bilangan bulat positip serta fungsi f dan g mempunyai limit pada x --> c, maka :

1. $\lim\limits_{x \to c} [\, b(f(x)) \,] = b\, [\, \lim\limits_{x \to c} f(x) \,]$

2. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \pm \lim\limits_{x \to c} g(x)$

3. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \,.\, g(x)] = [\lim\limits_{x \to c} f(x)]\, [\lim\limits_{x \to c} g(x)]$

4. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$,

   jika $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

5. $\lim\limits_{x \to c} [\, f(x) \,]^n = [\, \lim\limits_{x \to c} f(x) \,]^n$

Bukti :

1) Karena $\lim\limits_{x \to c} [b\ f(x)\ ]$ ada, diasumsikan $\lim\limits_{x \to c} [b\ f(x)] = b.L$ maka untuk semua $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga berlaku $|\, b\ f(x) - b.L \,| < \varepsilon$ dimana $0 < |x - c| < \delta$ di pandang $|\, bf(x) - bL \,| = b\ |\, f(x) - L| < \varepsilon$

$$= |\, f(x) - L \,| < \varepsilon/b$$

dengan $\varepsilon/b > 0$, sehingga berlaku $b\ |f(x) - L| < \varepsilon$

dimana $0 < |x-c| < \delta$ atau $b\,[\lim_{x \to c} f(x)] = b.L.$

Contoh 5

$$\lim_{x \to 0} [\,2(2x+3)\,] = 2 \lim_{x \to 0} (2x+3)$$
$$= 2\,.(2.0 + 3)$$
$$= 6$$

2) Diasumsikan $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = K$ dipilih $\varepsilon > 0$, maka harga $\varepsilon/2 > 0$ terdapat $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ berlaku $0 < |x-c| < \delta_1$ sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ dan $0 < |x-c| < \delta_2$ sedemikian sehingga $|g(x)-K| < \varepsilon/2$. Jika diambil δ lebih kecil dari δ_1 dan δ_2 didapat $0 < |x-c| < \delta$ yang berakibat $|f(x)-L| < \varepsilon/2$ dan $|g(x) - K| < \varepsilon/2$.

Sehingga

$$|\,[f(x) + g(x)] - [L + K]\,| < |\,f(x) - L\,| +$$
$$+ |\,g(x) - K\,| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

didapat

$$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = L + K$$
$$= \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$

Contoh 6

$$\lim_{x \to 0} [(2x^2+3) + (4x-5)] =$$

$$\lim_{x \to 0} (2x^2+3) + \lim_{x \to 0} (4x+5) = (2.0^2+3)+(4.0+5)$$

$= 3 - 5$

$= -2$

3. Diasumsikan $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = K$

untuk $\varepsilon > 0$ dipilih $\sqrt{\varepsilon} > 0$ terdapat $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ berlaku $0 < |x-c| < \delta_1$ sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \sqrt{\varepsilon}$ dan $0 < |x-c| < \delta_2$ sedemikian sehingga $|g(x) - K| < \sqrt{\varepsilon}$. Jika diambil δ lebih kecil dari δ_1 dan δ_2 didapat $0 < |x-c| < \delta$ yang berakibat $|f(x) - L| < \sqrt{\varepsilon}$ dan $|g(x) - K| < \sqrt{\varepsilon}$.

sehingga

$$|f(x).g(x)| - (L.K) < |f(x) - L|.|g(x) - K|$$
$$< \sqrt{\varepsilon} \quad \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$$

didapat

$$\lim_{x \to c} [f(x) \,.\, g(x)] = [\lim_{x \to c} f(x)] \, [\lim_{x \to c} g(x)]$$

Contoh 7

$$\lim_{x \to 0} [(5x^2+2x+1)(2x+3)] = \lim_{x \to 0} (5x^2+2x+1) \,.\, \lim_{x \to 0} (2x+3)$$
$$= 1 \,.\, 3$$
$$= 3$$

4) Diasumsikan $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = K$

untuk $\varepsilon > 0$ dipilih $\sqrt{\varepsilon} > 0$ sehingga

$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$, terdapat $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ berlaku $0 < |x - c| < \delta_1$ sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \sqrt{\varepsilon}$ dan $0 < |x-c| < \delta_2$ sedemikian sehingga $|g(x) - K| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ Jika diambil δ lebih kecil dari δ_1 dan δ_2 didapat $0 < |x-c| < \delta$ yang berakibat $|f(x) - L| < \sqrt{\varepsilon}$ dan $|g(x) - K| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

sehingga

$$\left| \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] - \left[\frac{L}{K}\right] \right| < \frac{|f(x) - L|}{|g(x) - K|}$$

$$< \sqrt{\varepsilon} \; \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \varepsilon$$

didapat

$$\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{K}$$

$$= \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$$

Contoh 8

$$\lim_{x \to 0} \frac{(4x^2 + 2x + 2)}{(\;2x + 2\;)} = \frac{\lim_{x \to 0} (4x^2+2x+2)}{\lim_{x \to 0} (2x + 2\;)}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

5) Pembuktian analog dengan (3) dengan g(x)

diganti f(x) .

Contoh 9

$$\lim_{x \to 0} (2x^2 + 4)^2 = \{ \lim_{x \to 0} (2x^2 + 4)\}^2$$
$$= \{ 4 \}^2$$
$$= 16$$

Theorema 2

Jika p adalah fungsi polinomial dan c bilangan real, maka $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$.

Bukti :

Diambil p adalah fungsi polinomial $p(x) = a_n x_n + + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Dari theorema sebelumnya :

1) $\lim_{x \to c} [b f(x)] = b [\lim_{x \to c} f(x)]$

2) $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim g(x)$

Sehingga didapat

$$\lim_{x \to c} p(x) = a_n[\lim_{x \to c} x^n] + \ldots + a_1[\lim_{x \to c} x] + \lim_{x \to c} a_0$$

$$\lim_{x \to c} p(x) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0 = p(c)$$

Contoh 10

$$\lim_{x \to 2} p(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 6$$
$$= 3(2)^3 + 2(2)^2 + 2 + 6$$

$$= 40$$

2.1.3 Kontinuitas

Definisi 5

Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada c jika dipenuhi syarat-syarat :

1) f(c) terdifinisi
2) $\lim_{x \to c} f(x)$ ada
3) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Contoh 11

$f(x) = x^2 - 2x + 1$, tentukan apakah f(x) kontinu.

jawab :

Syarat (1) dan (2) dari definisi dipenuhi, tinggal dibuktikan syarat (3) yaitu :

Untuk semua bilangan real c

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim (x^2 - 2x + 1)$$
$$= c^2 - 2c + 1$$
$$= f(c)$$

Karena syarat (1),(2) dan (3) terpenuhi maka f(x) kontinu.

Contoh 12

Buktikan bahwa $f(x) = |x|$ adalah fungsi yang kontinu.

Jawab :

Dapat ditulis f(x) sebagai berikut :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{jika } x > 0 \\ 0 & \text{jika } x = 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Dari theorema maka limit f(x) = |x| kontinu untuk $x > 0$ atau $x < 0$ karena :

$x > 0$ didapat $\lim\limits_{x \to +x} f(x) = |+x| = f(x) = x$.

$x < 0$ didapat $\lim\limits_{x \to -x} f(x) = |-x| = f(-x) = x$

demikian juga untuk $x = 0$ didapat $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = |0| = f(0) = 0$. Karena (1), (2) dan (3) terpenuhi maka $f(x) = |x|$ kontinu.

Theorema 3

Jika fungsi f dan g kontinu pada c, maka:

1) f + g kontinu pada c.
2) f - g kontinu pada c.
3) f . g kontinu pada c.
4) f / g kontinu pada c, jika $g(x) \neq 0$ dan diskontinu jika $g(c) = 0$.

Bukti :

1) Dari theorema limit

$$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$
$$= f(c) + g(c),$$

maka $f + g$ kontinu pada c.

2) Dari theorema limit

$$\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$$
$$= f(c) - g(c)$$

Karena $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = f(c) - g(c)$,

maka $f - g$ kontinu pada c.

3) Dari theorema limit

$$\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x \to c} f(x)] [\lim_{x \to c} g(x)]$$
$$= f(c) \cdot g(c)$$

Karena $\lim_{x \to c} (f(x).g(x)) = f(c) .g(c)$,

maka $f \cdot g$ kontinu pada c.

4) Diasumsikan $g(c) \neq 0$, karena f dan g keduanya kontinu pada c maka $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$.

dari theorema limit

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$$

$$= \frac{f(c)}{g(c)}$$

karena $\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f(c)}{g(c)}$, maka f/g kontinu pada c.

Contoh 13

Buktikan $h(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ kontinu

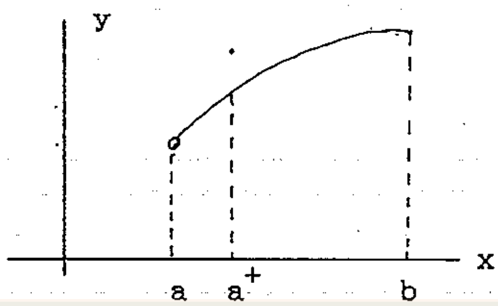
Jawab :

Pembagi dan yang dibagi dari h berbentuk polinomial, maka dari theorema sebelumnya $x^2 - 9$ dan $x^2 - 5x + 6$ keduanya kontinu. Dari theorema point (4) h(x) (rasio) kontinu disegala titik kecuali pada titik dimana pembaginya nol, sehingga

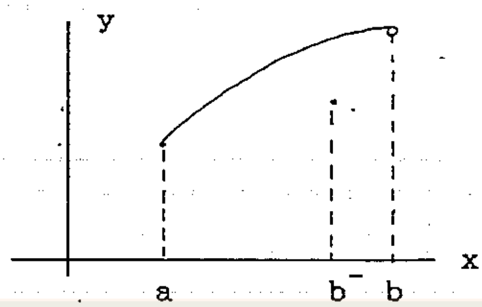
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x - 2)(x - 3) = 0$$
$$x_1 = 2 \text{ dan } x_2 = 3$$

Sehingga didapat h(x) kontinu pada setiap titik kecuali pada titik x = 2 dan x = 3.

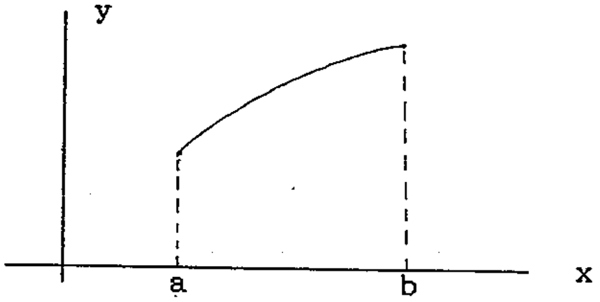
Diberikan grafik tiga fungsi terdefinisi hanya pada suatu interval tertutup [a,b] seperti dibawah ini.



(A)



(B)



(C)

Fungsi pada gambar (A) adalah fungsi diskontinu sebelah kiri ujung titik a, fungsi pada gambar (B) diskontinu pada sebelah kanan ujung titik b, dan fungsi pada gambar (C) adalah fungsi kontinu pada kedua titik ujung. Pada gambar (C) titik ujung a hanya dapat didekati dari kanan $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ada dan titik ujung b hanya dapat didekati dari kiri $\lim_{x \to b^-} f(x)$ ada.

Definisi 6

Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada suatu interval tertutup [a,b] jika dipenuhi syarat-syarat :

1) f kontinu pada [a,b].
2) f kontinu dari kanan pada titik a.
3) f kontinu dari kiri pada titik b.

Contoh 14

Tunjukkan bahwa $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ kontinu pada interval tertutup [-3,3]

Jawab :

Domain dari f adalah interval [-3,3] untuk c dalam interval [-3,3] didapat $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} \sqrt{9-x^2}$

$$= \sqrt{9 - c^2}$$

$$= f(c)$$

Sehingga f kontinu pada [-3,3].

untuk x = 3

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2}$$

$$= 0$$

$$= f(3)$$

untuk x = -3

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2}$$

$$= 0$$

$$= f(-3)$$

Karena (1),(2) dan (3) dipenuhi maka f kontinu pada [3,-3].

2.2 Differensial

Definisi 7

Suatu fungsi f dikatakan dapat didefferensialkan pada x jika $\lim\limits_{h \to o} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ada.

Jka limitnya ada, disebut derevatif dari f pada x dan dinotasikan $f'(x)$.

Contoh 15

Cari derevatif dari fungsi $f(x) = x^2$

Jawab :

Untuk mencari $f'(x)$ dibentuk hasil bagi differensial $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 + x^2}{h}$

karena $\dfrac{(x+h)^2 + x^2}{h}$ $= \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$

$$= \frac{2\ x\ h + h^2}{h}$$

$$= 2x + h$$

didapat $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h$

maka $f'(x) = \lim\limits_{h \to o} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to o} (\ 2x + h\ )$$

$$= 2x$$

Theorema 4

Jika f dapat di defferensialkan pada x maka f kontinu pada x.

Bukti :

Untuk $h \neq 0$ dan $x + h$ di dalam elemen dari f

$$f(x - h) - f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h$$

dengan f dapat di defferensialkan pada x

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

karena $\lim_{h \to 0} h = 0$ di dapat $\lim_{h \to 0} [f(x+h)-f(x)]$

$$= [\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}] \cdot [\lim_{h \to 0} h]$$

$$= f'(x) \cdot 0$$

$$= 0$$

sehingga $\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$

dari definisi kontinu maka f kontinu pada x.

2.3 Integral Tertentu

Definisi 8

Diambil f sembarang fungsi yang positif dan kontinu pada interval [a,b] dan diambil F sembarang anti derevatif ($\frac{\partial F(x)}{dx} = f(x)$) dari f maka $\int_a^b f(x)\, dx$ ditentukan sebagai F(b) - F(a).

Contoh 16

Hitung $\int_a^b x^2\, dx$

Jawab :

Dengan menggunakan anti derevatif didapat $F(x) = \frac{x^3}{3}$, sehingga $\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

dengan menggunakan notasi lain

$$\int_a^b x^2\, dx = \Big| F \Big|_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

Definisi 9

Jika suatu fungsi ditentukan pada suatu interval tertutup [a,b], maka integral tertentu untuk f dari a ke b dinotasikan dengan $\int_a^b f(x)\, dx$, ditentukan oleh

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \, . \, \Delta x_k$$

dimana limitnya ada.

Definisi 10

Jika fungsi f kontinu pada [a,b] dan jika $f(x) \geq 0$ untuk semua x dalam [a,b] maka luas daerah dibawah kurva f = f(x) pada interval [a,b] ditentukan dengan

$$A = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \, . \, \Delta x_k$$

dimana $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah titik-titik yang ditentukan dalam sub-sub interval secara berurutan.

Theorema 5

Jika f non negatif dan kontinu pada [a,b] maka

A = [daerah dibawah y = f(x) pada [a,b]]

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

Bukti :

Dari dua definisi sebelumnya

$$A = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

dan $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k$

didapat

$$A = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

Contoh 17

Cari luas daerah dibawah $y = x^2 + 1$ pada [-1,2]

Jawab :

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} + 2 \right) - \left(\frac{-1^3}{3} + (-1) \right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right)$$

$$= 6$$

Sifat-sifat integral tertentu

1) $\int_a^b k\ f(x)\ dx = k \int_a^b f(x)\ dx$

Contoh 18

$$\int_0^5 100\ e^x\ dx = 100 \int_0^5 e^x\ dx$$

$$= 100\ [\ e^x\ ]_0^5$$

$$= 100\ [\ e^5 - 1\ ]$$

2) $\int_a^b [\ f(x) + g(x)\ ]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx\ +\ \int_a^b g(X)\ dx$

Contoh 19

$$\int_0^2 (e \quad + 5x \quad)\ dx = \int_0^2 e \quad dx + \int_0^2 5x \quad dx$$

$$= [\ e^x\ ]_0^2 + 5\ [\ \frac{1}{3} x^3\ ]_0^2$$

$$= (\ e^2 - 1\ ) + \frac{40}{3}$$

3) untuk a < c < b

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

Contoh 20

Cari luas daerah dibawah grafik y = f(x) dari -4 ke 5 dimana

$$f(x) = \begin{cases} 9 & ,\ \text{jika } x < 3 \\ x^2 & ,\ \text{jika } x \geq 3 \end{cases}$$

Jawab :

$$\int_{-4}^{5} f(x)\,dx = \int_{-4} f(x)\,dx + \int^{5} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-4}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx$$

$$= 9 \int_{-4}^{3} dx + \int_{3}^{5} x^2\,dx$$

$$= 9 \left| x \right|_{-4}^{3} + \left| \frac{x^3}{3} \right|_{3}^{5}$$

$$= 95 \frac{2}{3}$$

Theorema 6

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Bukti :

Dari formula diffrensial

$$f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g\,(x) = (\,f.g\,)'\,(x)$$

Dengan mengitegralkan kedua sisi didapat

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx + \int f'(x)\,g(x)\,dx = \int (f.g)'(x)\,dx$$

karena

$$\int (f.g)'(x)\,dx = f(x)\,g(x) + c$$

sehingga

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx + \int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) + c$$

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx + c$$

karena $\int f'(x)\,g(x)\,dx$ mempunyai nilai konstanta sendiri maka konstanta c dapat dihilangkan, didapat

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

Dengan mengadakan subtitusi

$$u = f(x) \qquad du = f'(x)\, dx$$

$$v = g(x) \qquad dv = g'(x)\, dx$$

didapat

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Contoh 21

Hitung $\int x\, e^x\, dx$

Jawab :

$$\int x\, e^x\, dx = \int x\, de^x$$

$$= x\, e^x - \int e^x\, dx$$

$$= x\, e^x - e^x + c$$

Definisi 11

Bilangan I yang memenuhi pertidaksamaan

$$L_f(p) \leq I \leq U_f(p)$$

untuk semua partisi-partisi p pada [a,b] disebut integral tertentu untuk f dari a ke b dan dinotasikan dengan $\int_a^b f(x)\, dx$.

dimana $U_f(p) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n$

dengan M_i = harga maximun dari f pada $[x_{i-1}, x_i]$ dan $L_f(p) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n$

dengan m_i = harga minimum dari f pada $[x_{i-1}, x_i]$

Theorema 7

Rata-rata dari f pada [a,b] = $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Bukti :

Dari rata-rata dalam aritmatika yaitu jika a_1 ,a_2 ,a_3 ,...,a_n adalah angka-angka maka rata-rata sama dengan $\frac{[a_1 + a_2 + \ldots + a_n]}{n}$

Dibuat partisi berurutan p = $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ pada [a,b] unutk setiap sembarang interval $[x_{i-1}, x_i]$ didapat

$$m_i \le \text{rata-rata dari f pada } [x_{i-1}, x_i] \le M_i$$

dengan m_i = harga minimum dari f pada $[x_{i-1}, x_i]$

M_i = harga maximum dari f pada $[x_{i-1}, x_i]$

dikalikan dengan Δx_i , didapat

$m_i\Delta x_i \le$ rata-rata dari f pada $[x_{i-1},x_i]\Delta x_i \le M_i\ \Delta x_i$

dengan menggandakan penjumlahan dari i = 1 ke i = n didapat,

$L_f(p) \le$ (rata-rata dari f pada [a,b])(b-a) $\le U_f(p)$

di dapat,

$$(\text{rata-rata f pada } [a,b])(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\text{rata-rata f pada } [a,b] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

Theorema 8

Jika f kontinu pada [a,b], maka terdapat suatu angka c dalam [a,b] sedemikian sehingga

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b - a)$$

Bukti :

Dari theorema sebelumnya rata-rata dari f pada

$[a,b] = \dfrac{1}{b - a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Jika diambil rata-rata dari f pada $[a,b] = f(c)$, dengan $a \le c \le b$ didapat

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx$$

atau $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b - a)$, $a \le c \le b$

2.4 Deret Taylor

Theorema 9

Jika f mempunyai n + 1 derivatif yang kontinu pada interval I yang menggabungkan 0 ke x, maka

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n\,!}+R_{n+1}(x)$$

dengan $R_{n+1}(x) = \dfrac{1}{n\,!}\displaystyle\int_0^x f^{(n+1)}(t)\,(x - t)^n\,dt$

Bukti :

Diambil suatu fungsi f kontinu pada 0 dan barisan $p_0(x) = f(0)$ jika f dapat didefferensialkan pada 0, fungsi linier yang mempunyai pendekatan terbaik untuk f pada titik yang dekat dengan 0.

$$p_1(x) = f(0) + f'(0)\,x$$

p_1 mempunyai nilai yang sama dengan f pada 0 dan juga mempunyai derivatif pertama yang sama

$$p_1(0) = f(0) \qquad , p_1'(0) = f'(0)$$

Jika f mempunyai dua derivatif pada 0, maka didapat pendekatan yang terbaik untuk f dengan menggunakan persamaan polinomial kuadrat.

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2\,!}\; x^2$$

$p_2$mempunyai harga yang sama dengan f pada 0 dan mempunyai dua derivatif pertamma yang sama.

$$p_2(0) = f(0)\ ,\ p_2'(0) = f'(0)\ ,\ p_2''(0) = f''(0)$$

Secara umum jika f mempunyai n derivatif pada 0, dapat dibentuk polinomial .

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n\,!}\; x^n$$

Dipandang integral sebagian

$$f'(0)\,x = \int_0^x f'(t)\,dt - \int_0^x f''(t)\,(x-t)\,dt$$

$$f''(0)x^2 = \int_0^x f''(t)(x-t)dt - \frac{1}{2\,!}\int_0^x f'''(t)(x-t)dt$$

$$\vdots$$

$$\frac{f^n(0)}{n\,!} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f^n(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt +$$

$$-\frac{1}{n\,!}\int_0^x f^{n+1}\,(t)\,(x-t)^n\,dt$$

Dengan menlumlahkan kedua persmaan didapat hasil jumlah sebelah kiri

$$f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n\,!}\,x^n = p_n(0) - f(0)$$

dan hasil jumlah sebelah kanan

$$\int_o^x f'(t)\,dt - \frac{1}{n\,!}\int_o^x f^{n+1}(t)\,(x-t)^n\,dt =$$

$$f(x) - f(0) - \frac{1}{n\,!}\int_o^x f^{n+1}(t)\,(x-t)^n\,dt$$

sehingga didapat

$$f(x) = p_n(x) + \frac{1}{n\,!}\int_o^x f^{n+1}(t)\,(x-t)^n\,dt$$

$$= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n\,!}+R_{n+1}(x)$$

Kehalusan dari suatu fungsi danpendekatan integral menentukan hasil dari penghitungan. Berikut ini akan diberikan pengelompokan dari fungsi-fungsi dari yang kurang halus menuju yang paling halus.

a) Fungsi yang terbatas dan terintegral secara Rienman pada interval [a,b] (kelas R [a,b]).
b) Fungsi yang sepotong-potong kontinu pada interval pertanyaan.
c) Fungsi yang kontinu pada interval [a,b] (kelas c [a,b]).
d) Fungsi yang mempunyai derevatif pertama yang kontinu pada interval [a,b] (kelas c^1[a,b]).
e) Fungsi yang mempunyai n derevatif yang kontinu

pada interval [a,b] (kelas c^n [a,b]).

f) Fungsi yang analytic di dalam daerah B memuat interval di dalam interior-interiornya (kelas A (B)).

g) Fungsi yang mempunyai expansi Taylor konvergen dalam $| z | < \infty$.

h) Fungsi yang derajat polinomialnya $\leq$ n (kelas ρ_n)

2.5 Integral Numerik

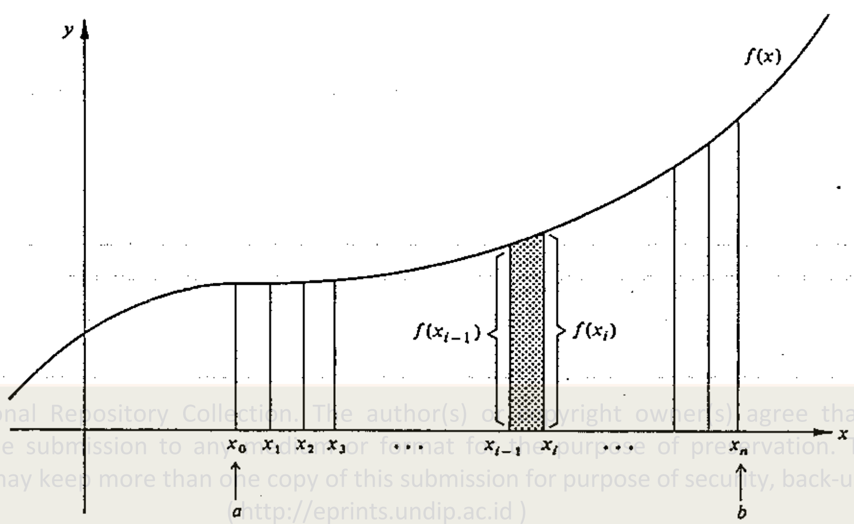
2.5.1 Aturan Trapezoida

Theorema 10

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{h}{2}\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+(n-1)h) + \frac{f(b)}{2}\right]$$

dimana $h = \dfrac{b-a}{n}$

Bukti :



Interval dari a ke b dibagi menjadi n bagian yang sama. Bariasan dari trapezoida-trapezoida adalah nilai-nilai $x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n$ dipilih trapezoida ke-i, yang terletak antara x_{i-1} dan x_i. Lebar dari trapezoida $h = \frac{b - a}{n}$, tinggi sisi kiri $f(x_{i-1})$ dan tinggi sisi kanan $f(x_i)$ maka luas daerah dari x_{i-1} sampai x_i adalah :

$$A_i = \frac{h}{2} [\ f(x_{i-1}) + f(x_i)\ ]$$

Total dari semua n trapezoida merupakan pendekatan trapezoidal ke harga integral.

$$\begin{aligned} T_n &= A_1 + A_2 + \ldots + A_n \\ &= \frac{h}{2} [f(x_o)+f(x_1)] + \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_2)] + \\ &\quad \ldots + \frac{h}{2} [\ f(x_{n-1}) + f(x_n)\ ] \\ &= \frac{h}{2} [\ f(x_o) + 2f(x_1) + f(x_2) + \ldots + \\ &\quad + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\ ] \\ &= h \left[\frac{f(x_o)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f(x_n)}{2} \right] \end{aligned}$$

Contoh 22

Hitung integral $\int_o^1 (6 - 6x^5)\ dx$

Jawab :

Dengan intergral kalkulus

$$\int_0^1 (6 - 6x^5)\, dx = [\ 6x - x^6\ ]_0^1$$

$$= 6 - 1$$

$$= 5$$

Dengan metode trpezoida

untuk $n = 1$ maka $h = \frac{b - a}{n} = 1$

$f(0) = 6$ dan $f(1) = 0$

didapat $T_n = \frac{h}{2} [\ f(0) + f(1)\ ]$

$$= \frac{1}{2} [\ 6 + 0\ ]$$

$$= 3$$

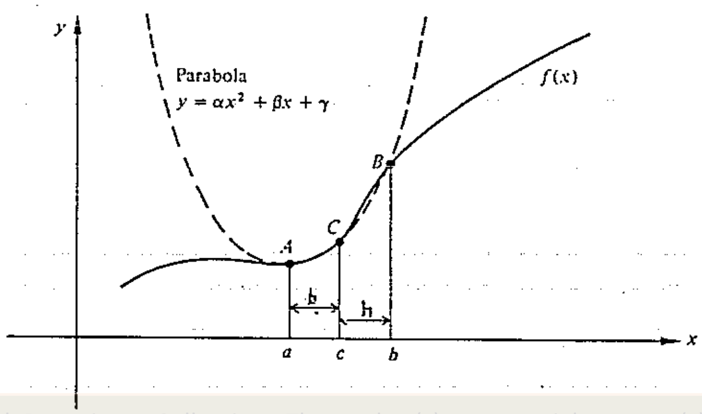
2.5.2 Aturan Simpson

Theorema 11

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3} [\ f(a) + 4f(c) + f(b)\ ]$$

dimana $h = \frac{b - a}{n}$ dan $c = \frac{a + b}{2}$

Bukti :



Titik $c = \frac{a + b}{2}$, koordinat A, B dan C masing-masing A = (a , f(a))

B = (b , f(b))

C = (c , f(c))

Karena titik A,B dan C terletak pada parabola $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ sehingga dapat dihitung luas daerah dibawah parabola yang harganya mendekati harga luas daerah dibawah kurva f(x). Dengan menggunakan metode trapezoida maka didapat luas daerah diantara x = a dan x = c.

$$\text{Luas daerah} = \frac{h}{2} [\ f(a) + f(c)\ ]$$

Sehingga didapat bentuk umum

$$\text{Luas daerah} = P\ f(a) + Q\ f(c)$$

dengan $P = Q = \frac{h}{2}$ dan h adalah lebar dari trapezoida atau jarak berurtan diantar nilai-nilai di atas. Sehingga bentuk umum luas kurva dari parabola diantara x = a dan x = b adalah :

$$\text{Luas daerah} == P\ f(a) + Q\ f(c) + R\ f(b)$$

dimana harga dari P,Q dan R dipilih secara spesifik. Karena metode simpson bersifat memberikan jawaban yang baik untuk setiap f(x) berbentuk konstanta, garis lurus atau parabola. Sehingga diberika tiga jawaban untuk ketiga permasalahan, yaitu :

$$I_1 = \int_{-h}^{+h} 1\ dx = [\ x\ ]_{-h}^{+h} = h - (-h) = 2h$$

$$I_2 = \int_{-h}^{+h} x\ dx = [\ \frac{x^2}{2}\ ]_{-h}^{+h} = \frac{h^2}{2} - \frac{(-h)^2}{2} = 0$$

$$I_3 = \int_{-h}^{+h} x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_{-h}^{+h} = \frac{h^3}{3} - \frac{(-h)^3}{3} = \frac{2h^3}{3}$$

Pada ketiga kondisi digunakan a = -h ,b = +h dan titik tengah c = 0 akan dihitung luas daerah dari persamaan dengan bentuk,

Luas daerah = P f(a) + Q f(c) + R f(b)

dari ketiga fungsi didapat

$$I_1 = P(1) + Q(1) + R(1) = P + Q + R = 2h$$

$$I_2 = P(-h) + Q(0) + R(h) = -Ph + 0 + Rh = 0$$

$$I_3 = P(-h)^2 + Q(0)^2 + R(h)^2 = Ph^2 + 0 + Rh^2 = \frac{2h^3}{3}$$

Sehingga didapat tiga persamaan dan tiga variabel P, Q dan R .

$$P + Q + R = 2h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$-Ph + 0 + Rh = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$Ph^2 + 0 + Rh^2 = \frac{2h^3}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dari (2) didapt P = R, dengan mensubtitusikan P =R ke (3) didapat,

$$Ph^2 + Rh^2 = \frac{2h^3}{3}$$

$$Ph^2 + Ph^2 = \frac{2h^3}{3}$$

$$2Ph^2 = \frac{2h^3}{3}$$

$$P = \frac{h}{3}$$

Didapat $P = R = \frac{h}{3}$, subtitusi ke (1) didapat

$$P + Q + R = 2h$$

$$Q = 2h - P - R$$

$$= 2h - \frac{h}{3} - \frac{h}{3}$$

$$= \frac{4h}{3}$$

Maka luas daerh yag dicari adalah:

$$\text{Luas daerah} = P\ f(a) + Q\ f(c) + R\ f(b)$$

$$= \frac{h}{3} f(a) + \frac{4h}{3} f(c) + \frac{h}{3} f(b)$$

$$= \frac{h}{3} [\ f(a) + f(c) + f(b)\ ]$$

Contoh 23

Hitung integral $\int_0^1 (6 - 6x^5)\ dx$

Jawab :

Dengan rumus u tegral kalkulus

$$\int_0^1 (6 - 6x^5)\ dx = [6x - x^6]_0^1 = 5$$

Dengan metode simpson, yaitu dengan membagi interval menjadi dua bagian.

$$n = 2,\ h = \frac{b - a}{n} = \frac{1}{2}$$

$$f(a) = f(1) = 0$$

$$f(c) = f(1/2) = 6 - 6\ (1/2)^5 = 5{,}8125$$

$$f(b) = f(0) = 6 - 6(0)^5 = 6$$

$$\text{maka} \int_0^1 (6 - 6x^5)\, dx = \frac{1}{6} [0 + 4.\ 5{,}8125 + 6\ ]$$

$$= 4{,}875$$