BAB III

PROSES STOKASTIK PARAMETER KONTINU

Seperti telah diperkenalkan dalam bab I, bahwa proses stokastik adalah suatu kumpulan variabel random $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ yang didefinisikan dalam ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dengan $\mathcal{T}$ himpunan sembarang dan $\mathcal{F}$ field borel, serta P fungsi probabilitas. Sebagaimana telah dibahas dalam bab II, variabel random X secara sederhana dapat dikatakan sebagai aturan untuk menentukan fungsi $X(\xi)$ pada setiap hasil ξ dari suatu eksperiman atau ruang sampel Ω. Proses stokastik dapat pula dikatakan sebagai aturan untuk menentukan fungsi $X(t,\xi)$ untuk setiap hasil ξ, atau secara ekivalen fungsi t dan ξ. Domain wilayah ξ adalah semua hasil eksperimen atau ruang sampel Ω. Dan domain wilayah t adalah himpunan bilangan real. Proses X(t) yang demikian dinamakan proses stokastik dengan parameter kontinu.

Pembahasan selanjutnya proses stokastik $X(t,\xi)$ akan disajikan dengan X(t) dalam artian mengabaikan dependensinya terhadap ξ, sebagaimana pembahasan variabel random pada bab II. Jadi X(t) mempunyai interpretasi sebagai berikut;

1. X(t) adalah keluarga atau himpunan fungsi X(t), dengan t dan ξ adalah variabel.
2. X(t) adalah fungsi sampel bila ditentukan ξ terlebih

dahulu dan t variabel.

3. X(t) adalah keadaan proses waktu ke-t, jika t tertentu dan ξ adalah variabel.

4. X(t) adalah bilangan, jika t dan ξ tertentu.

Jadi proses stokastik adalah keluarga variabel random yang banyaknya tak terhingga. Untuk t tertentu X(t) adalah variabel random dengan distribusi ;

$$F(x,t) = P\{X(t) \le x\}$$

Fungsi ini tergantung pada t dan harganya sama dengan probabilitas peristiwa $\{X(t) \le x\}$ yang terdiri dari semua hasil ξ_i. Sedemikian hingga $X(t,\xi_i) \le x$ untuk setiap hasil ξ_i, dengan x adalah suatu bilangan real. Fungsi $F(x,t)$ disebut fungsi distribusi tingkat pertama dari proses stikastik X(t). Derevatifnya terhadap x adalah;

$$\frac{dF(x,t)}{dx} = f(x,t)$$

disebut kepadatan tingkat pertama proses stokastik X(t). Distribusi tingkat kedua proses stokastik X(t) adalah distribusi gabungan variabel random $X(t_1)$ dan $X(t_2)$;

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\}$$

Dan kepadatan yang bersesuaian adalah;

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{d^2F(x_1,x_2;t_1,t_2)}{dx_1 dx_2}$$

Dan kemudian distribusi tingkat ke-n proses X(t) adalah distribusi gabungan variabel random $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$;

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \ldots, X(t_n) \le x_n\}$$

Jadi pada dasarnya statistik yang berlaku pada variabel random $X(\xi)$ juga berlaku pada variabel random $X(t,\xi)$ untuk t tertentu, yang didefinisikan sebagai berikut;

Definisi 3.1 :

Mean (atau harga harapan) ditulis $\eta(t)$ dari variabel random $X(t)$ didefinisikan oleh;

$$\eta(t)=E\{X(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x,t).dx$$

Definisi 3.2 :

Autokorelasi dinotasikan $R(t_1,t_2)$ proses $X(t)$, real atau kompleks didefinisikan sebagai harga harapan atau mean dari perkalian $X(t_1)$ dengan $X^*(t_2)$. Jadi;

$$R(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X^*(t_2)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2^*\ f(x_1,x_2^*;t_1,t_2)\ dx_1dx_2$$

Untuk $t_1=t_2$ harga $R(t_1,t_2)$ adalah daya rata-rata $X(t)$ yaitu; $R(t,t)=E\{X(t)X^*(t)\}=E\{|X(t)|^2\}$. Agar tidak terjadi kekeliruan pada perhitungan selanjutnya perlu diperhatikan bahwa; $\eta(t)=\eta_x(t)$ dan $R(t_1,t_2)=R_{xx}(t_1,t_2)$.

<u>Contoh 3.1 :</u>

a) Variabel random S adalah integral suatu proses stokastik $X(t)$, $S=\int_a^b X(t)dt$ dan harga $S(\xi_i)$ adalah luas kurve $X(t,\xi)$ dalam interval [a,b]. Tentukan E{S}

Jawab :

$$E(S)=E\left\{\int_a^b X(t)dt\right\}=\int_a^b E\{X(t)\}dt=\int_a^b \eta(t)dt$$

b) Tentukan autokorelasi proses $X(t)=r.\cos(\omega t+\varphi)$

dengan pengandaian bahwa variabel random r dan φ independen. Variabel random φ seragam dalam interval $[-\pi,\pi]$ atau bila fungsi $f_{\varphi}(\varphi)$ ditentukan oleh;

$$f_{\varphi}(\varphi)=\begin{cases} \frac{1}{\pi-(-\pi)}=\frac{1}{2\pi} & \text{untuk setiap } \varphi \text{ dalam } [-\pi,\pi] \\ \emptyset & \text{untuk } \varphi \text{ lainnya} \end{cases}$$

Jawab : $R(t_1,t_2)=E\{r\cos(\omega t_1+\varphi).r.\cos(\omega t_2+\varphi)\}$

$$=\tfrac{1}{2}E\{r^2[\cos(t_1-t_2)\omega - \cos(\omega t_1+\omega t_2+2\varphi)]\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{E\{r^2\cos(t_1-t_2)\omega\}-E\{r^2\cos(\omega t_1+\omega t_2+2\varphi)\}\right\}$$

$$E\{r^2\cos(\omega t_1+\omega t_2\ 2\varphi)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r^2\cos(\omega t_1+\omega t_2+2\varphi)f_r(r)f_{\varphi}(\varphi)d\varphi dr$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} r^2f_r(r)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos\omega(t_1+t_2)\cos2\varphi - \sin\omega(t_1+t_2)\sin2\varphi]d\varphi dr$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} r^2f_r(r)\frac{1}{2\pi}[\cos\omega(t_1+t_2)\int_{-\pi}^{\pi}\cos2\varphi d\varphi-\sin\omega(t_1+t_2)\int_{-\infty}^{\infty}\sin2\varphi d\varphi]dr$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} r^2f_r(r)\frac{1}{2\pi}[\cos\omega(t_1+t_2).\emptyset - \sin\omega(t_1+t_2).\emptyset]dr = \emptyset$$

Oleh karena itu diperoleh;

$$R(t_1,t_2)=\tfrac{1}{2}.\cos(t_1-t_2)\omega.E\{r^2\}$$

3.1. Proses Stasioner

Proses stokastik $X(t)$ disebut stasioner dalam arti tegas bila sifat-sifat statistiknya invarian terhadap translasi titik awal. Dapat pula diartikan bahwa proses $X(t)$ dan $X(t+c)$ mempunyai statistik yang sama untuk sembarang c real. Dan dua proses $X(t_1)$ dan $X(t_2)$ disebut stasioner secara gabungan bila statistik gabungan proses $X(t_1)$ dan $X(t_2)$ sama dengan statistik gabungan $X(t_1+c)$ dan $X(t_2+c)$ untuk sembarang c real.

Dari pengertian diatas terlihat bahwa untuk kepadatan tingkat ke-n proses X(t) stasioner dalam arti tegas, haruslah memenuhi persamaan sebagai berikut;

$$f(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)=f(x_1,\ldots,x_n;t_1+c,\ldots,t_n+c)$$

untuk sembarang c. Sedangkan kepadatan tingkat pertamanya; $f(x,t)=f(x,t+c)$ dengan c sembarang. Oleh karena itu kepadatan tingkat pertama independen terhadap t, dituliskan;

$$f(x,t) = f(x)$$

Dengan pemikiran yang sama kepadatan tingkat kedua bergantung terhadap $\tau=t_2-t_1$, jadi;

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=f(x_1,x_2;\tau) \text{ dengan } \tau=t_2-t_1$$

Proses stokastik X(t) dikatakan stasioner dalam arti luas bila meannya konstan, jadi;

$$E\{X(t)\}=E\{X(t+c)\}=\eta \quad \text{dengan c sembarang.}$$

Dan autokorelasi proses stasioner dalam arti luas bergantung pada $\tau=t_2-t_1$;

$$\begin{aligned} E\{X(t_1)X^*(t_2)\} &= E\{X(t_1+c)X^*(t_2+c)\} \qquad \text{dipilih } c=t-t_1 \\ &= E\{X(t_1+t-t_1)X^*(t_2+t-t_1)\} \\ &= E\{X(t)X^*(t+\tau)\} = R(\tau) \end{aligned}$$

Jadi $R(t_1,t_2)=R(\tau)=E\{X(t)X^*(t+\tau)\}$.

Untuk $\tau=0$ maka $R(0)$ merupakan daya rata-rata proses X(t) stasioner.

Bukti : $R(0)=E\{X(t)X^*(t)\}=E\{|X(t)|^2\}$ .....terbukti.

Dengan demikian daya rata-rata proses stasioner independen terhadap t dan sama dengan R(Ø).

Contoh 3.2 :

Misalkan X(t) adalah proses stasioner dalam arti luas dengan autokorelasinya adalah $R(\tau)=Ae^{-\alpha|\tau|}$.

Tentukan momen kedua, variabel random [X(8)-X(5)].

Jawab:

$$E\{[X(8)-X(5)]^2\} = E\{[X^2(8)+X^2(5)-2X(8)X(5)]\}$$
$$= E\{X^2(8)\}+E\{X^2(5)\}-2E\{X(5+3)X(5)\}$$
$$= R(\emptyset)+R(\emptyset)-2R(3) = 2A-2e^{-3\alpha}$$

3.2. Proses Markov.

Suatu proses stokastik $\{X(t),t\in\mathcal{T}\}$ disebut proses markov bila untuk setiap n=1,2,3,..... dan sembarang $t\in\mathcal{T}$ dengan $t_{n-1}<t_n$, atau dapat dikatakan masa lalu tidak mempunyai pengaruh pada masa yang akan datang bila masa sekarang diketahui, maka;

$$P\{X(t_n)\le x_n|X(t),t\le t_{n-1}\} = P\{X(t_n)\le x_n|X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

dengan t_n menyatakan masa yang akan datang, t_{n-1} menyatakan masa sekarang, dan $t<t_{n-1}$ menyatakan masa yang lalu.

Dari bentuk diatas terlihat bahwa bila $t_1<t_2<t_3<...<t_n$, maka; $P\{X(t_n)\le x_n|X(t_{n-1}),...,X(t_1)\}=P\{X(t_n)\le x_n|X(t_{n-1})\}$

Proses markov terbagi dalam empat kelas, yaitu;

i. Waktu diskrit, keadaan diskrit

ii. Waktu diskrit, keadaan kontinu

iii. Waktu kontinu, keadaan diskrit; dan

iv. Waktu kontinu, keadaan kontinu.

Dalam skripsi ini hanya akan dibahas rantai markov dalam konsentrasi waktu kontinu yang terbagi dalam dua keadaan (state) diskrit dan kontinu.

Kedaan atau state dari variabel random X(t) adalah harga yang mungkin dari variabel random tersebut. Jadi keadaan adalah harga yang ditentukan oleh fungsi $X(t,\xi)$ untuk setiap hasil ξ, dengan $\xi \in \Omega$. Himpunan harga-harga yang mungkin untuk suatu variabel random X(t) dari proses stokastik $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ disebut ruang state jika terdapat suatu $t \in \mathcal{T}$ sedemikian hingga $P\{(x-c)<X(t)<(x+c)\}$ berharga positif untuk setiap $c>0$.

Jadi pada dasarnya X(t) merupakan suatu pemetaan dari ruang sampel kedalam himpunan bilangan real $\mathcal{R}$.

$$X(t):\Omega \xrightarrow{X(t,\xi_i)} \mathcal{R}_i$$

Dari pengertian diatas maka range $\mathcal{R}_i$ dengan $i=1,2,3,\ldots.$ merupakan ruang state. Jika ruang state diskrit maka disebut proses keadaan diskrit, sebaliknya jika ruang state kontinu disebut proses keadaan kontinu.

Contoh 3.3 :

Bila $f(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = f(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1}).$

$$f(x_{n-1},t_{n-1}|x_{n-2},t_{n-2}).\ldots.f(x_2,t_2|x_1,t_1).f(x_1,t_1)$$

berlaku untuk semua n, tunjukan bahwa proses X(t) dengan fungsi kepadatan diatas adalah markov.

Bukti : Dari teorema 2.1 didapatkan ;

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)\\
&=f(x_n,t_n|x_{n-1},\ldots,x_1;t_{n-1},\ldots,t_1).f(x_1,\ldots,x_{n-1};t_1,\ldots,t_{n-1})\\
&=f(x_n,t_n|x_{n-1},\ldots,x_1;t_{n-1},\ldots,t_1).f(x_{n-1},t_{n-1}|x_{n-2},\ldots,x_1;t_{n-2},\ldots,t_1)\\
&\qquad \ldots\ldots f(x_3,t_3|x_2,x_1;t_2,t_1)f(x_2,t_2|x_1,t_1)f(x_1,t_1)
\end{aligned}
$$

Terlihat bahwa;

$$
\begin{aligned}
f(x_n,t_n|x_{n-1},\ldots,x_1;t_{n-1},\ldots,t_1) &= f(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})\\
f(x_{n-1},t_{n-1}|x_{n-2},\ldots,x_1;t_{n-2},\ldots,t_1) &= f(x_{n-1},t_{n-1}|x_{n-2},t_{n-2})\\
&\vdots\\
f(x_3,t_3|x_2,x_1;t_2,t_1) &= f(x_3,t_3|x_2;t_2)
\end{aligned}
$$

Pandang salah satu persamaan diatas yaitu;

$$f(x_n,t_n|x_{n-1},\ldots,x_1;t_{n-1},\ldots,t_1) = f(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow F(x_n,t_n|x_{n-1},\ldots,x_1;t_{n-1},\ldots,t_1) = F(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})$$

sehingga didapatkan;

$$P\{X(t_n)\le x_n|X(t_{n-1}),\ldots,X(t_1)\}=P\{X(t_n)\le x_n|X(t_{n-1})\}$$

............terbukti.

<u>Catatan :</u>

Pada pembahasan selanjutnya akan dinyatakan bahwa notasi;

$f(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = f_{X(t)}(x\ ,\ldots,x_n)$ dan

$f(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1}) = f_{X(t_n)}(x_n|X(t_{n-1})=x_{n-1})$