BAB II

MATERI PENUNJANG

Sebelum membahas mengenai teori probabilitas dan teori himpunan, dalam bagian ini akan diberikan beberapa pengertian istilah sampel, agar tidak terjadi salah pengertian dalam pembahasan selanjutnya. Istilah-istilah tersebut antara lain ;

Eksperimen adalah setiap kegiatan yang hasilnya bermacam-macam kemungkinan.

Out Come adalah setiap hasil yang mungkin dari suatu eksperimen.

Ruang Sampel adalah himpunan keseluruhan hasil yang mungkin (out come) dari suatu eksperimen diberi simbol Ω.

Peristiwa atau Kejadian adalah suatu himpunan out come dari ruang sampel tersebut. Peristiwa merupakan himpuanan bagian dari ruang sampel.

Suatu *kelas* dari himpunan A adalah setiap peristiwa atau beberapa peristiwa yang merupakan himpunan bagian dari himpunan A.

Suatu kelas $\mathcal{F}$ dari himpunan A disebut *Field* jika memenuhi;

i. Ruang sampel merupakan anggota $\mathcal{F}$ ($\Omega \in \mathcal{F}$)

ii. Jika $A_i \in \mathcal{F}$ maka komplemen terhadap ruang sampel juga berada dalam $\mathcal{F}$ ($\Omega - A_i \in \mathcal{F}$)

iii. Jika n sembarang bilangan alam dan jika $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{F}$ maka $\bigcup_1^n A_i \in \mathcal{F}$ dan $\bigcap_1^n A_i \in \mathcal{F}$ dengan $i=1,2,3,\ldots,n$

Suatu Field disebut *Field Borel* jika ditambahkan

$A_1, A_2, \ldots, A_i \in \mathcal{F}$ maka $\bigcup_{1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ dan $\bigcap_{1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ dengan $i=1,2,3,\ldots$

2.1. Arti Probabilitas

Definisi 2.1 :

Probabilitas suatu peristiwa A dinotasikan oleh P(A) ditentukan apriori tanpa pelaksanaan eksperimen yang sebenarnya. Probabilitas diberikan oleh rasio; $P(A) = \frac{N_A}{N}$ dengan N jumlah hasil yang mungkin dan N_A jumlah hasil yang sesuai dengan peristiwa A.

2.2. Aksioma-Aksioma Probabilitas

Definisi 2.2 :

Himpunan adalah koleksi objek yang dinamakan elemen atau anggota. Himpunan akan dilambangkan dengan huruf besar A,B,C dan seterusnya elemen suatu himpunan dilambangkan dengan huruf Yunani ξ jadi,

$$A = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \xi_n \}$$

mempunyai arti himpunan A dengan elemen-elemen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \xi_n$. Himpunan yang dibicarakan adalah himpunan Ω, dimana Ω disebut semesta.

Definisi 2.3 :

Dua partisi $\mathscr{A}$ dan $\mathscr{B}$ disebut independen bila;

$$P(\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) = P(\mathscr{A}\mathscr{B}) = P(\mathscr{A})\, P(\mathscr{B})$$

Aksioma-aksioma probabilitas :

Untuk peristiwa A ditetapkan bilangan P(A) yang disebut probabilitas A. Bilangan ini dipilih sedemikian hingga memenuhi :

i. $P(A) \geq 0$; ii. $P(\Omega) = 1$; dan

iii. Bila $A \cap B = AB = \phi$ maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Definisi 2.4 :

Probabilitas bersyarat peristiwa A dengan diketahui M ditulis $P(A|M) = \frac{P(AM)}{P(M)}$ dengan diandaikan P(M) tidak nol.

Contoh 2.1 :

Pada eksperimen pelemparan sebuah dadu, tentukanlah probabilitas bersyarat peristiwa $\{f_2\}$ dengan andaian bahwa peristiwa genap telah terjadi !

Jawab: $A = \{f_2\}$ dan $M = \{genap\} = \{f_2, f_4, f_6\}$

maka didapat $P(A) = 1/6$ dan $P(M) = 3/6$ dan karena $AM = A$ menghasikan $P(A|M) = P(f_2|genap) = 1/3$

2.3 Konsep Variabel Random

Definisi 2.5 :

Suatu fungsi dari himpunan Ω_t ke himpunan Ω_x adalah suatu aturan untuk setiap $t \in \Omega_t$ menentukan dengan tunggal bilangan $X(t)$ yang ada dalam himpunan Ω_x. Himpunan Ω_t disebut *domain* atau *wilayah*, himpunan Ω_x disebut *kodomain* atau *daerah jelajah fungsi*. Hasil-hasil $X(t)$ dalam Ω_x disebut *range* atau *daerah hasil*.

Definisi 2.6 :

Diberikan suatu eksperimen dengan ruang sampel Ω. Sebuah fungsi X yang memetakan setiap elemen $\xi \in \Omega$, menentukan satu dan hanya satu bilangan real x sedemikian hingga

$X(\xi)=x$ disebut variabel random. Ruang (range) dari X adalah bilangan real $R=\{x; x=X(\xi), \xi\in\Omega\}$.

Dari pengertian definisi 2.6, fungsi yang dihasilkan harus memenuhi dua syarat, yaitu ;

i. Himpunan $\{X \le x\}$ adalah peristiwa untuk setiap x.
   Dengan peristiwa adalah himpunan-himpunan bagian Ω.

ii. Probabilitas peristiwa $\{X=\infty\}$ dan $\{X=-\infty\}$ sama dengan nol.

Lambang $\{X \le x\}$ menyatakan himpunan bagian Ω yang terdiri dari hasil-hasil ξ sedemikian hingga $X(\xi) \le x$.
Lambang $\{x_1 \le X \le x_2\}$ menyatakan himpunan bagian Ω yang terdiri dari hasil-hasil ξ sedemikian hingga $x_1 \le X(\xi) \le x_2$.
Lambang $\{X = x\}$ menyatakan himpunan bagian Ω yang terdiri dari hasil-hasil ξ sedemikian hingga $X(\xi) = x$.

Contoh 2.2 :

Pada pelemparan sebuah dadu ditentukan variabel random $X(\xi)$ sebagai bilangan $X(f_i)=10i$ dari keenam hasil f_i. Tentukan peristiwa $\{X\le 35\}$, $\{X\le 5\}$, $\{20\le X\le 35\}$, dan $\{X=40\}$!

Jawab:

Domain fungsi adalah himpunan $\Omega=\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ dan rangenya enam bilangan (10,20,30,40,50,60) Himpunan $\{X\le 35\}$ terdiri dari f_1, f_2, f_3 karena $X(f_i)\le 35$. Himpunan $\{X\le 5\}$ adalah himpunan kosong karena tidak ada hasil sedemikian hingga $X(f_i)\le 5$. Himpunan $\{20\le X\le 35\}$ terdiri dari f_2 dan f_3 karena

$20 \le X(f_i) \le 35$.

Himpunan $\{X=40\}$ terdiri dari f_4 karena $X(f_i)=40$.

Suatu variabel random X atau X(.) disebut diskrit jika range dari X terbilang (memetakan pada bilangan bulat). Jika X diskrit maka fungsi distribusi $F_x(.)$ diskrit pula. Suatu variabel random X atau X(.) disebut kontinu jika range dari X kontinu. Jika X kontinu maka fungsi distribusi $F_x(.)$ juga kontinu.

2.4 Fungsi Kontinu Dan Fungsi Impuls

Sebuah fungsi adalah suatu kaidah yang menghasilkan korespondensi (pengawanan) antara dua himpunan (lihat definisi 2.5). Fungsi f dari himpunan A kedalam himpunan B adalah suatu pengawanan sedemikian hingga setiap $x \in A$ dikawankan secara tunggal dengan $y \in B$. Biasanya nilai elemen y dinotasikan pula oleh $f(x)$, jadi $y=f(x)$. Dan $f(x)$ dinamakan nilai f di x.

Definisi 2.9 :

Diberikan fungsi $f(x)$ dalam interval terbuka I. Fungsi f dikatakan kontinu di titik $x=x_o$ didalam interval I dinotasikan oleh $\lim_{x \to x_o} f = f(x_o)$ bila dan hanya bila;

Dapat ditentukan satu nilai $f(x)$ dititik tersebut dan untuk sembarang bilangan positif ε betapapun kecilnya terdapat bilangan positif δ sehingga jika $0 \le |x-x_o| \le \delta$ maka $|f(x)-f(x_o)| \le \varepsilon$.

Fungsi f dikatakan tidak kontinu (diskontinu) dititik

$x=x_o$ bila tidak memenuhi persyarat diatas. Dan fungsi f dikatakan kontinu dalam interval terbuka (x_1,x_2) bila $f(x)$ kontinu di setiap titik dalam interval terbuka tersebut. Fungsi f dikatakan kontinu dalam interval tertutup $[x_1,x_2]$ bila $f(x)$ kontinu di setiap titik dalam interval terbuka (x_1,x_2) dan

$$\lim_{x\to x_1^+} f = f(x_1)\ ; \qquad \lim_{x\to x_2^-} f = f(x_2).$$

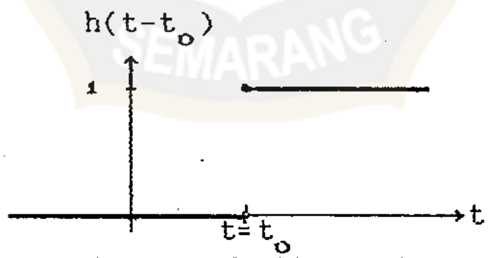
Definisi 2.8 :

Fungsi tangga satuan atau fungsi Heaviside dinotasikan oleh $h(t-t_o)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$h(t-t_o) = \begin{cases} 1 & \text{Untuk } t\geq t_o \\ 0 & \text{Untuk } t<t_o \end{cases} \qquad \text{dengan } t_o\geq 0$$

Grafik untuk fungsi tangga diberikan dalam gambar berikut;

*Gambar*2-1:



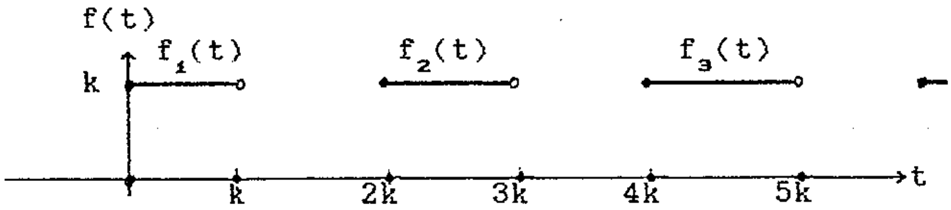
Bila c suatu konstanta maka dapat diberikan suatu perumuman fungsi tangga satuan, yaitu;

$$c.h(t-t_o)=h_c(t-t_o)=\begin{cases} c & \text{Untuk } t\geq t_o \\ 0 & \text{Untuk } t<t_o \end{cases} \qquad \text{dengan } t_o\geq 0$$

Contoh 2.3:

Nyatakan fungsi gelombangbujur sangkar gambar berikut dalam fungsi satuan!

*Gambar*2-1:



Penyelesaian: Pandang tiap-tiap interval [Ø,k];[2k,3k];[4k,5k];dst

$f_1(t)=h_k(t)-h_k(t-k)$; $f_2(t)=h_k(t-2k)-h_k(t-3k)$; dst

sehingga; $f(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)+.........$

$$=h_k(t)-h_k(t-k)+h_k(t-2k)-h_k(t-3k)+......$$

$$= k\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\ h(t-ik)$$

Fungsi impuls satuan atau fungsi dirac delta

Latar belakang gagasan fungsi impuls satuan ialah untuk menyajikan suatu model analitis untuk tipe tertentu dari fenomena fisis yang terjadi dalam selang waktu yang sangat pendek $[t_o,t_o+\varepsilon]$ dengan $\varepsilon \to Ø$ dan $\varepsilon>Ø$. Sebagai contoh gaya yang bekerja bila sebuah palu dipukulkan pada sebuah paku, sehingga perubahan momentum atau impulse p dari gaya tersebut dapat ditentukan oleh;

$p = \lim\limits_{\varepsilon\to Ø}\int_{t_o}^{t_o+\varepsilon} f_\varepsilon(t-t_o)dt$; dengan $f_\varepsilon(t-t_o)$ adalah gaya yang bekerja dalam selang waktu $[t_o,t_o+\varepsilon]$.

Karena selang waktu dari gaya tersebut sangat kecil maka dapat dimisalkan $f_\varepsilon(t-t_o)$ sebagai konstanta, sehingga;

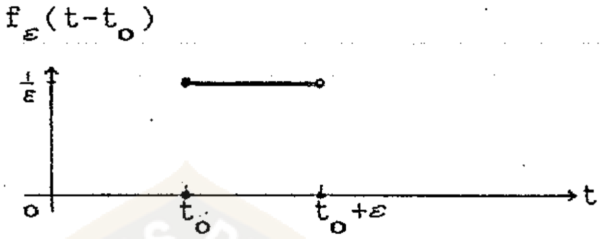
$$\lim_{\varepsilon\to Ø}\int_{t_o}^{t_o+\varepsilon} f_\varepsilon(t-t_o)dt = f_\varepsilon(t-t_o)\lim_{\varepsilon\to Ø}\int_{t_o}^{t_o+\varepsilon} dt = f_\varepsilon(t-t_o).\varepsilon$$

Apabila ditentuka perubahan momentum atau impulse p=1 maka dapat diperoleh;

$$f_\varepsilon(t-t_o).\varepsilon=1 \Leftrightarrow f_\varepsilon(t-t_o) = \frac{1}{\varepsilon} \text{ untuk } t_o \le t \le t_o+\varepsilon$$

Gaya tersebut dapat digambarkan secara grafik oleh fungsi tangga satuan sebagai berikut;

*Gambar*2-3:



Dengan menggunakan fungsi tangga satuan impuls dari gaya $f_\varepsilon(t-t_o)$ dapat dituliskan sebagai berikut;

$f_\varepsilon(t-t_o)=\frac{1}{\varepsilon}\,[h(t-t_o)-h(t-t_o-\varepsilon)]$ dan integrasi di$(-\infty,\infty)$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t-t_o)dt = \int_{t_o}^{t_o+\varepsilon} f_\varepsilon(t-t_o)dt = \frac{1}{\varepsilon}.\varepsilon = 1$$

Fungsi impuls satuan atau fungsi delta dirac dinotasikan $\delta(t-t_o)$ ditentukan oleh dua syarat sebagai berikut;

1). $\delta(t-t_o)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t-t_o)$; dan 2). $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_o)dt=1$

Jadi $\delta(t-t_o)$ adalah suatu gaya yang "tak berhingga besarnya" yang bekerja seketika pada $t=t_o$ dan impulsnya sama dengan satu.

Sifat fungsi impuls satuan;

Jika g(t) sebuah fungsi sembarang yang kontinu maka ;

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_o)dt=g(t_o).$$

Bukti : $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_o)dt=\int_{t_o}^{t_o+\varepsilon} g(t)\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t-t_o)\,dt$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_o}^{t_o+\varepsilon} g(t)dt$$

g(t) kontinu maka dari definisi integral didapatkan;

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_o)dt = \lim_{\varepsilon \to \emptyset} \frac{1}{\varepsilon} g(\xi)[(t_o+\varepsilon)-t_o] \text{ dengan } t_o \le \xi < t_o+\varepsilon$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \emptyset} g(\xi) = g(t_o) \qquad \text{......terbukti.}$$

2.5. Fungsi Distribusi Dan Fungsi Kepadatan

Definisi 2.9 :

Fungsi distribusi variabel random X adalah fungsi ; $F_X(x)=P\{X \le x\}$ adalah sama dengan probabilitas peristiwa $\{X \le x\}$ dapat ditulis $F(x)$.

Contoh 2.4 :

Pada pelemparan mata uang, probabilitas muka sama dengan p dan probabilitas belakang sama dengan q. Didefinisikan variabel random X sedemikian hingga

$X(m) = 1$ dan $X(b) = \emptyset$

Tentukan fungsi distribusi $F(x)$ untuk setiap x dari $-\infty$ sampai dengan ∞ !

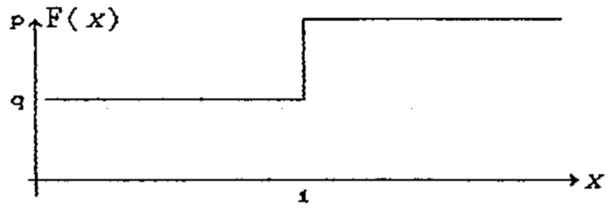
Jawab:

Bila $x \ge 1$, maka $X(m) \le x$ dan $X(b) = \emptyset \le x$ karena itu $F(x) = P\{m,b\} = 1$ untuk $x \ge 1$.

Bila $\emptyset \le x < 1$, maka $X(m)=1>x$ dan $X(b)=\emptyset \le x$ karena itu $F(x) = P\{X \le x\} = P\{b\} = q$ untuk $\emptyset \le x < 1$.

Bila $x<\emptyset$, maka $X(m) = 1 > x$ dan $X(b) = \emptyset > x$ karena itu $F(x) = P\{X \le x\} = P\phi = \emptyset$ untuk $x<\emptyset$.

*Gambar*2-4:



Bertitik tolak dari pengertian diatas dapat didefinisikan fungsi distribusi tingkat n, yaitu ;

$$F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = P\{X \le x_1, \ldots\ldots\ldots, X \le x_n\}$$

Apabila disajikan dua variabel random **X** dan **Y**, maka dinamakan fungsi distribusi gabungan $F_{xy}(x,y)$ dengan $F_{xy}(x,y) = F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}$, yang akan dibahas kemudian.

Sifat-sifat fungsi dustribusi :

$F(x^+)$ dan $F(x^-)$ akan berarti limit kanan dan limit kiri $F(x^+)$ = limit $(x+\varepsilon)$ dan $F(x^-)$ = limit $(x-\varepsilon)$ dengan $\varepsilon > 0$ dan $\varepsilon \to 0$. Fungsi distribusi mempunyai sifat-sifat sebagai berikut;

1. $F(-\infty) = 0$ dan $F(\infty) = 1$

   Bukti : $F(-\infty) = P\{X = -\infty\} = P\phi = 0$

   $F(\infty) = P(X \le \infty) = P\{\Omega\} = 1$....terbukti.

2. $F(x)$ adalah fungsi tidak turun, bila $x_1 \le x_2$ maka $F(x_1) \le F(x_2)$

   Bukti: Perisitiwa $\{X \le x_1\}$ adalah himpunan bagian peristiwa $\{X \le x\}$ karena bila $X(\xi) \le x_1$ untuk setiap ξ, maka $X(\xi) \le x_2$. Karena itu $P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\}$ sedemikian hingga $F(x_1) \le F(x_2)$ ....terbukti

3. $P\{X > x\} = 1 - F(x)$

   Bukti :Peristiwa $\{X \le x\}$ dan $\{X > x\}$ adalah saling asing sedemikian hingga $\{X \le x\} \cup \{X > x\} = \Omega$ karenanya;

$P\{X \leq x\}+P\{X>x\}=P(\Omega)=1 \Leftrightarrow F(x)+P\{X>=1$ ..... terbukti

4. $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2\} - F(x_1)$

   Bukti : Peristiwa $\{X \leq x_1\}$ dan$\{x_1 < X \leq x_2\}$ saling asing karena $X(\xi)$ tidak dapat kurang dari x_1 dan diantara x_1 dan x_2. $\{X \leq x_2\}=\{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\}$ karena itu ;

   $P\{X \leq x_2\}=P\{X \leq x_1\}+P\{x_1 < X \leq x_2\} \Leftrightarrow F(x_2)=F(x_1)+P\{x_1 < X \leq x_2\}$

5. $P\{X=x\} = F(x) - F(x^-)$

   Bukti : Dengan mengambil $x_1 = x-\varepsilon$ dan $x_2=x$ pada sifat 4 didapat ;

   $P\{x-\varepsilon < X \leq x\}=F(x)-F\{x-\varepsilon) \Leftrightarrow P(X=x)=F(x)-F(x^-)$ ..terbukti

6. $P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1^-)$

   Bukti : Terbukti dari sifat 4 dan sifat 5 ;

   $\{x_1 \leq X \leq x_2\}=\{x_1 < X \leq x_2\} \cup \{X=x_1\}$

   $P\{x_1 \leq X \leq x_2\}=P\{x_1 < X \leq x_2\}+P\{X=x_1\}$

   $P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F(x_2)-F(x_1)+F(x_1)+F(x_1^-) = F(x_2)+F(x_1^-)$

Dari sifat-sifat diatas dapat dikatakan bahwa variabel random X kontinu bila fungsi distribusi $F(x)$ kontinu. Untuk keadaan ini $F(x^-) = F(x)$, karena itu $P\{X=x\} = 0$ untuk setiap x.

Definisi 2.10:

Untuk x yang diberikan maka fungsi kepadatan variabel random X merupakan derevatif (pendeffrensialan) fungsi distribusinya, yaitu ;

$$f_X(x) = f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Bila X variabel random kontinu dan $f(\xi)$ diketahui. Dari sifat fungsi distribusi $F(x)$ terlihat bahwa $f(x) \geq 0$.

Dengan mengintegralkan fungsi kepadatan dai $-\infty$ sampai dengan x dan menggunakan sifat bahwa $F(-\infty) = 0$ didapat;

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$$

karena $F(\infty) = 1$, bentuk diatas menghasilkan

$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) = 1$; dan terlihat bahwa

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(\xi)d\xi - \int_{-\infty}^{x_1} f(\xi)d\xi = \int_{x_1}^{x_2} f(\xi)d\xi$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

sehingga $P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

Diberikan dua variabel random **X** dan **Y**, dan akan ditentukan probabilitas (X,Y) pada daerah D tertentu dalam bidang *xy*. Fungsi $F_x(x)$ dan fungsi $F_y(y)$ variabel random yang diberika masing-masing menentukan statistik marginalnya, tetapi bukan satatistik gabungannya (**X**,**Y**). Pada khususnya probabilitas peristiwa

$$\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\} = \{X \leq x, Y \leq y\}$$

tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $F_x(x)$ dan $F_y(y)$.

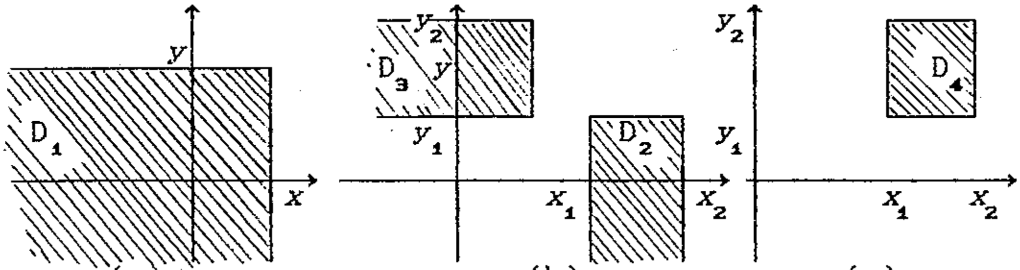
Distribusi $F_{xy}(x,y)$ atau $F(x,y)$ dua variabel random **X** dan **Y** adalah probabilitas peristiwa ;

$$\{X \leq x, Y \leq y\} = \{(X,Y) \in D_1\}$$

dimana x dan y sebarang dua bilangan real dan D_1 adalah daearah kuadaran yang terlihat dalam Gambar 2-3(a).

$$F(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

Gambar 2-5:



Sifat-sifat ;

1. $F(-\infty,y) = \emptyset$ $\quad F(x,-\infty) = \emptyset$ $\quad F(\infty,\infty) = 1$

   Bukti: $P\{X=-\infty\} = P\{Y=-\infty\} = \emptyset$ dan karena peristiwa $\{X=-\infty, Y\le y\} \subset \{X=-\infty\}$ serta $\{X\le x, Y=-\infty\} \subset \{Y=-\infty\}$ maka,

   $F(-\infty,y) = P\{X=-\infty, Y\le y\} = P\{X=-\infty\} = \emptyset$ dan

   $F(X,-\infty) = P\{X\le x, Y=-\infty\} = P(Y=-\infty) = \emptyset$ sedangkan

   $F(\infty,\infty) = P\{X\le\infty, Y\le\infty\} = P(\Omega) = 1$ ....terbukti

2. Peristiwa $\{x_1<X\le x_2, Y\le y\}$ terdiri dari semua titik pada daerah D_2 dan peristiwa $\{X\le x, y_1<Y\le y_2\}$ terdiri dari semua titik yang ada pada daerah D_3 pada Gambar 2-5.b

   $P\{x_1<X\le x_2, Y\le y\} = F(x_2,y) - F(x_1,y)$

   $P\{X\le x, y_1<Y\le y_2\} = F(X,y_2) - F(X,y_1)$

   Bukti : $\{X\le x_2, Y\le y\} = \{X\le x_1, Y\le y\} \cup \{x_1<X\le x_2, Y\le y\}$

   $P\{X\le x_2, Y\le y\} = P\{X\le x_1, Y\le y\} + P\{x_1<X\le x_2, Y\le y\}$

   $F(x_2,y) \quad = F(x_1,y) \quad + P\{x_1<X\le x_2, Y\le y\}$

   $P\{x_1<X\le x_2, Y\le y\} = F(x_2,y) - F(x_1,y)$....terbukti

   untuk membuktikan $P\{X\le x, y_1<Y\le y_2\}$ adalah serupa.

3. $P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)$

   $= F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1)$

   Bukti: $\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\} \cup \{X\le x_1, Y\le y_2\} \cup \{X\le x_2, Y\le y_1\}$

   $= \{X\le x_1, Y\le y_1) \cup \{X\le x_2, Y\le y_2\}$ sedemikian hingga,

$$P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\} + P\{X\le x_1, Y\le y_2\} + P\{X\le x_2, Y\le y_1\} = P\{X\le x_1, Y\le y_1\} + P\{X\le x_2, Y\le y_2\}$$

$$P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\} + F(x_1,y_2) + F(x_2,y_1) = F(x_2,y_2) + F(x_1,y_1) \quad \text{......terbukti}$$

Definisi 2.11 :

Kepadatan gabungan variabel random **X** dan **Y** dinotasikan oleh $f(x,y)$ didefinisikan sebagai;

$$f(x,y) = \frac{dF(x,y)}{dx\,dy}$$

Dari bentuk ini dan dari sifat 1, $F(-\infty,y)=\emptyset$ dan $F(x,-\infty)=\emptyset$, bila $f(.,.)$ diketahui, variabel random **X** dan variabel random **Y** kontinu, maka ;

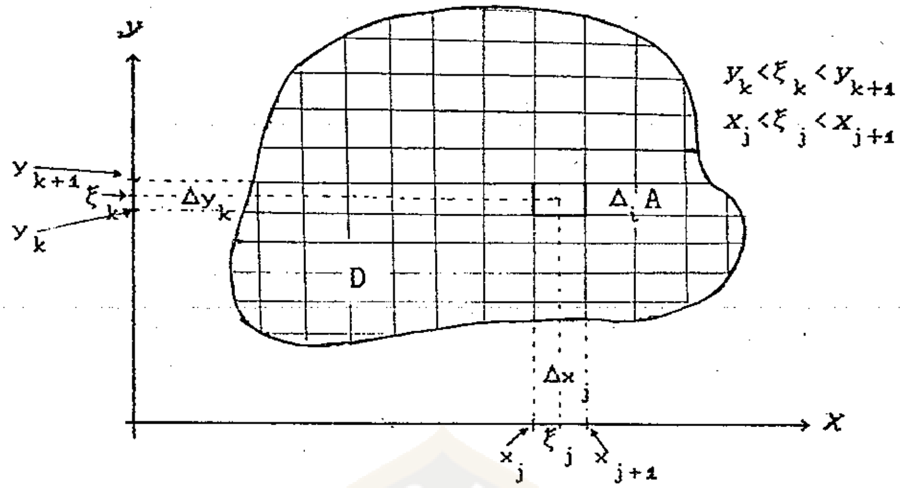
$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(\alpha,\beta).d\alpha.d\beta$$

Sekarang akan ditunjukan bahwa probabilitas titik (**X**,**Y**) ada pada daerah D dengan perkataan lain

$$P\{(X,Y)\in D\} = \iint_D f(x,y).dx.dy$$

Dengan $\{(X,Y)\in D\}$ adalah peristiwa yang terdiri dari hasil-hasil ξ sedemikian hingga $[X(\xi),Y(\xi)]$ ada dalam D.

Sebelum membuktikan pernyataan diatas, terlebih dahulu akan diberikan pengertian integral rangkap $\iint_D f(x,y).dx.dy$, integral ini didefinisikan dalam daerah tertutup D seperti dikonfigurasikan pada Gambar 2-6 dibawah ini.



Gambar 2-6

kawasan D dibagi-bagi dengan menarik garis sejajar pada sumbu x dan sumbu y, sehingga terbentuk suatu partisi $P_\delta[D]$ dengan $D=\Delta_1A+\Delta_2A+\Delta_3A+...+\Delta_iA+...$ dan $\Delta_iA\cap\Delta_jA=\phi$ untuk setiap $i\neq j$. Δ_iA menyatakan luas kotak ke-i di titik (ξ_j,ξ_k) dimana $\Delta_iA = \Delta x_j.\Delta y_k$. Ambil sebarang $\Delta_iA\in D$, sedemikian hingga untuk δ bilangan positif yang sangat kecil $\Delta_iA<\delta$. Apabila dipilih $\Delta x_j<\delta_1$ dan $\Delta y_k<\delta_2$maka $\Delta_iA=\Delta x_j.\underbrace{\Delta y_k}_{<\delta_1}<\delta$ atau $\Delta_iA=\underbrace{\Delta x_j.\Delta y_k}_{<\delta_2}<\delta$

Padahal diketahui $x_j<\xi_j<x_{j+1}$ dan $y_k<\xi_k<y_{k+1}$ maka integrasi hampirannya = $\sum\limits_{j,k} f(\xi_j,\xi_k)\Delta x_j\Delta y_k$

dengan demikian integrasi sesungguhnya adalah;

$$\underset{\delta_2\to 0}{\text{limit}}\ \underset{\delta_1\to 0}{\text{limit}}\ \sum_{j,k} f(\xi_j,\xi_k)\Delta x_j.\Delta y_k$$

$$= \underset{\delta_2\to 0}{\text{limit}} \sum_k \left[\underset{\delta_1\to 0}{\text{limit}} \sum_j f(\xi_j,\xi_k)\Delta x_j\right]\Delta y_k = \iint_D f(x,y).dx.dy$$

Diandaikan daerah D merupakan suatu ruang sampel, akan dibuktikan bahwa $P\{(X,Y)\in D\} = \iint_D f(x,y).dx.dy$.

Ambil sebarang bilangan real ξ_j dan ξ_k pada daerah D dengan $x_j<\xi_j<x_{j+1}$ dan $y_k<\xi_k<y_{k+1}$ sedemikian hingga untuk setiap hasil ξ, $X(\xi)=\xi_j$ dan $Y(\xi)=\xi_k$. Apabila ditentukan bilangan positif δ_1 dan δ_2 yang sangat kecil maka;

$$P\{X=\xi_j,Y=\xi_k\}=P\{x_j<X\le x_j+\Delta x_j,\ y_k<Y\le y_k+\Delta y_k\}$$

dengan $\emptyset<\Delta x_j<\delta_1$ dan $\emptyset<\Delta y_k<\delta_2$

$$P\{X=\xi_j,Y=\xi_k\} = F(x_j+\Delta x_j,y_k+\Delta y_k) - F(x_j+\Delta x_j,y_k) - F(x_j,y_k+\Delta y_k) + F(x_j,y_k)= \partial^2F(x_j,y_k)$$

Padahal;

$$\frac{d^2F(x_j,y_k)}{dx_j dy_k}=\lim_{\substack{\Delta x_j\to 0\\ \Delta y_k\to 0}}\frac{F(x_j+\Delta x_j,y_k+\Delta y_k)-F(x_j+\Delta x_j,y_k)-F(x_j,y_k+\Delta y_k)+F(x_j,y_k)}{\Delta x_i\,\Delta y_i}$$

karena $\dfrac{d^2F(x_j,y_k)}{dx_j dy_k} = f(\xi_j,\xi_k)$ maka;

$P\{x_j<X\le\Delta x_j,\ y_k<Y\le\Delta y_k\} \simeq f(\xi_j,\xi_k)\ \Delta x_j.\Delta y_k$ adalah salah satu probabilitas out come di titik $[X(\xi)=\xi_j,Y(\xi)=\xi_k\}$ dalam ruang sampel D. Jadi jumlah probabilitas out come pada seluruh ruang sampel D, dengan $\Delta x_j<\delta_1$ dan $\Delta y_k<\delta_2$ adalah;

$$\sum_{j,k} P\{X=\xi_j,Y=\xi_k\}=\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} \sum_{j,k} f(\xi_j,\xi_k).\Delta x_j.\Delta y_k$$

$\Leftrightarrow$ $\qquad P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y).dx.dy$ .....terbukti.

$F_x(x,y)$ dan $F_y(x,y)$ masing-masing menentukan statistik marginalnya yang disebut distribusi marginal.

Definisi 12:

Distribusi marginal variabel random X didefinisikan

$F_x(x,y) = P\{X\le x,Y=y\}$ dan

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = f_x(x,y) = f_x(x) = \int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dy$$

Distribusi marginal variabel random Y didefinisikan

$F_y(x,y) = P\{X=x, Y\le y\}$ dan

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y) = f_y(y) = \int_{-\infty}^{x} f(x,y)\, dx$$

2.6. **Distribusi Bersyarat Dan Kepadatan Bersyarat**

Definisi 2.13:

Distribusi bersyarat dinotasikan dengan $F(x|M)$ dari variabel random X dengan diketahui peristiwa M didefinisikan sebagai probabilitas bersyarat peristiwa $\{X\le x\}$. Jadi $F(x|M) = P\{X\le x|M\} = \frac{P\{x\le x, M\}}{P\{M\}}$.

Pada bentuk diatas peristiwa $\{X\le x, M\} = \{X\le x\} \cap \{M\}$ yaitu semua peristiwa yang terdiri dari semua hasil ξ sedemikian hingga $X(\xi) \le x$ dan $\xi \in \{M\}$.

Sifat-sifat distribusi bersyarat $F(x|M\}$;

1. $F(\infty|M) = 1$ dan $F(-\infty|M) = \emptyset$
2. $P\{x_1\le X\le x_2|M\} = \frac{P\{x_1\le x\le x_2, M\}}{P\{M\}} = F(x_2|M) - F(x_1|M)$

Kepadatan bersyarat $f(x|M)$ adalah derevatif dari $F(x|M)$

$$f(x|M) = \frac{dF(x|M)}{dx} = \lim_{\Delta x\to\emptyset} \frac{P\{x\le x\le x+\Delta x|M\}}{\Delta x}$$

Fungsi ini tak negatif dan luas daerahnya sama dengan satu.

<u>Contoh 2.6</u> :

Tentukan distribusi bersyarat dari variabel random X dengan andaian bahwa $b<X\le a$, a dan b merupakan bilangan real sedemikian hingga $F(a) - F(b) \ne \emptyset$.

Jawab :

Disini $M = \{b<X\le a\}$ jadi persoalannya akan ditentukan

$$F(x|\,b<X\le a) = \frac{P\{x\le x, b<x\le a\}}{P\{b<x\le a\}} = \frac{P\{x\le x, b<x\le a\}}{F(a) - F(b)}$$

Bila $x\ge a$, maka $\{X\le x, b<X\le a\} = \{b<X\le a\}$ sehingga

$F(x|\,b<X\le a) = 1$ untuk $x\ge a$

Bila $x<a$, maka $\{X\le x, b<X\le a\} = \{b<X\le x\}$ sehingga

$$F(x|\,b<X\le a) = \frac{P\{b<x\le x\}}{P\{b<x\le a\}} = \frac{F(x) - F(b)}{F(a) - F(b)}$$

Teorema 2.1 :

Diberikan dua variabel random X dan Y dengan fungsi kepadatan gabungannya $f(x,y)$. Jika kepadatan marginal variabel random X didefinisikan oleh $f_x(x)$ dan kapadatan marginal variabel random Y didefinisikan oleh $f_y(x)$ maka kepadatan bersyarat variabel random Y dengan diketahui X = x ditulis $f_y(y|x)$ dapat ditentukan ;

$$f_y(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)}$$

Bukti :

Dari definisi 2.13 didapatkan ;

$F(y|M) = \dfrac{P\{y\le y,M\}}{P\{M\}} = \dfrac{P\{M,y\le y\}}{P\{M\}}$ misalkan $M = \{x_1<X\le x_2\}$ maka ;

$$F(y|\,x_1<X\le x_2) = \frac{P\{x_1<x\le x_2, y\le y\}}{P\{x_1<x\le x_2\}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

dari sifat ke-2 fungsi distribusi gabungan $F(x,y)$ $P\{x_1<X\le x_2, Y\le y\} = F(x_2,y) - F(x_1,y)$ dan dari sifat ke-4 fungsi distribusi $F(x)$ didapat $P\{x_1<X\le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$, disubstitusikan persamaan (1) terlihat bahwa;

$$F(y|\,x_1<X\le x_2) = \frac{F(x_2,y) - F(x_1,y)}{F(x_2) - F(x_1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

Jika persamaan (2) didefferensialkan ke y maka ruas kiri;

$$\frac{\partial F(y|x_1<x\le x_2)}{\partial y}= f_y(y|x_1<X\le x_2)$$ dan ruas kanan ;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{F(x_2,y)-F(x_1,y)}{F(x_2)-F(x_1)}\right] = \frac{1}{F(x_2)-F(x_1)}\left[f_y(x_2,y)-f_y(x_1,y)\right]$$

$$= \frac{1}{F(x_2)-F(x_1)}\left[\int_{-\infty}^{x_2} f(x,y)\ dx- \int_{-\infty}^{x_1} f(x,y)\ dx\right]$$

$$= \frac{1}{F(x_2)-F(x_1)}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\ dx$$

sehingga jika persamaan (2) didefferensialkan ke y didapatkan ;

$$f_y(y|x_1<X\le x_2)= \frac{1}{F(x_2)-F(x_1)}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\ dx \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Variabel random $X=x$ bila diambil $x_1=x$ dan $x_2=x+\Delta x$, disubstitusikan kepersamaan (3) diperoleh ;

$$f_y(y|x<X\le x+\Delta x)= \frac{1}{F(x+\Delta x)-F(x)}\int_{x}^{x+\Delta x} f(x,y)\ dx \qquad \ldots\ldots(4)$$

Padahal $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x)\ -\ F(x)}{\Delta x}= \frac{\partial F(x)}{\partial x}= f_x(x)$ sehingga

$$F(x+\Delta x)\ -\ F(x)\ =\ f_x(x).\Delta x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

diketahui bahwa $\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\ dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} f(x_i,y)\ \Delta x_i$ maka;

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(x,y)\ dx= \lim_{n\to 1} \sum_{n=1}^{n} f(x_i,y)\ \Delta x_i\simeq f(x,y).\Delta x \qquad \ldots\ldots (6)$$

persamaan (5) dan (6) disubstitusikan kepersamaan (4) diperoleh;

$$f_y(y|x<X\le x+\Delta x)= \frac{1}{F(x+\Delta x)-F(x)}\int_{x}^{x+\Delta x} f(x,y)\ dx$$

$$f_y(y|X=x)\ =\ \frac{f(x,y).\Delta x}{f_x(x).\Delta x}= \frac{f(x,y)}{f_x(x)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{terbukti.}$$

Selanjutnya $f_y(y|x)$ ditulis $f(y|x)$ dan $f_x(x)$ ditulis $f(x)$, sehingga penulisan teorema 2.1 menjadi; $f(y|x)\ =\ \frac{f(x,y)}{f(x)}$

Contoh 2.5 :

Diberikan variabel random X dan Y dengan fungsi kepadatannya ;

$f(x,y) = x+y$ untuk $0<x<1$ dan $0<y<1$

$= 0$ untuk x dan y yang lain.

Tentukan $f(y|x)$!

Jawab :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{1} (x+y)dy = xy + \tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1$$

$= \frac{1}{2} + x$ untuk $0<x<1$

$= 0$ untuk x lainnya

sehingga ;

$f(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f(x)} = \dfrac{2(x+y)}{(1+2x)}$ untuk $0<y<1; 0<x<y$

$=0$ untuk y lainnya

2.7. Mean Dan Variansi

Definisi 2.14 :

Diberikan variabel random X dengan fungsi kepadatannya $f(x)$. Dan diberikan $\mu(X)$ adalah fungsi yang dibentuk oleh variabel random X, maka harga harapan atau mean dituliskan $E\{\mu(X)\}$ didefinisikan oleh ; $E\{\mu(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x)\, f(x)\, dx$

Contoh 2.6 :

Diberikan Variabel random X dan fungsi kepadatannya

$f(x) = 2(1-x)$ untuk $0<x<1$

$= 0$ untuk x lainnya

Tentukan $E\{X\}$ dan $E\{X^2\}$!

Jawab : $E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x)f(x)dx = \int_{0}^{1} x.2(1-x)dx = \int_{0}^{1} (2x-2x^2)dx$

$$= \left[x^2-(2/3)x^3\right]_0^1 = 1/3 \qquad \text{untuk } 0<x<1$$

$$E\{X\} = 0 \qquad \text{untuk } x \text{ lainnya}$$

$$E\{X^2\} = \int_0^1 x^2.2(1-x)dx = \int_0^1 (2x^2-2x^3)dx$$

$$= (2/3)x^3-(1/2)x^4\Big]_0^1 = 1/6 \qquad \text{untuk } 0<x<1$$

$$= 0 \qquad \text{untuk } x \text{ lainnya}$$

Definisi 2.15 :

Diberikan n variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dengan fungsi kepadatan gabungannya $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dan diberikan fungsi $\mu(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ yang dibentuk oleh $X_1, X_2, \ldots, X_n$ maka harga harapan $\mu(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ didefinisikan oleh;

$$E\{\mu(X_1, X_2, \ldots, X_n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x_1, \ldots, x_n)\ f(x_1, \ldots, x_n)\ dx$$

Contoh 2.7 :

Diberikan dua variabel random X dan Y dengan fungsi kepadatan gabungannya adalah ;

$$f(x,y) = x + y \qquad \text{untuk } 0<x<1 \text{ dan } 0<y<1$$

$$= 0 \qquad \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ lainnya}$$

Tentukanlah harga harapan variabel random XY^2!

Jawab :

$$E\{\mu(X,Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,y)\ f(x,y)\ dxdy$$

$$E\{XY^2\} = \int_0^1 \int_0^1 xy^2(x+y)\ dxdy = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{3}x^3y^2+\tfrac{1}{2}x^2y^3\right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 (\tfrac{1}{3}y^2+\tfrac{1}{2}y^3)dy = \left[\tfrac{1}{9}y^3+\tfrac{1}{8}y^4\right]_0^1$$

$$= 17/72 \qquad \text{untuk } 0<x<1 \text{ dan } 0<y<1$$

$$= 0 \qquad \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ lainnya}$$

Definisi 2.16 :

Harga harapan bersyarat $\mu(X)$ dengan diketahui peristiwa M dinotasikan $E\{\mu(x)|M\}$, didefinisikan sebagai ;

$$E\{\mu(X)|M\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x)\ f(x|M)\ dx$$

Contoh 2.8 :

Bila X dan Y variabel random dengan fungsi kepadatan gabungannya ;

$f(x,y) = x+y$ untuk $0<x<1; 0<y<1$

$= 0$ untuk lainnya

Tentukan $E\{X|y\}$!

Jawab : untuk $0<x<1; 0<y<1$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx = \int_{0}^{1} (x+y)dx = \tfrac{1}{2}x^2 + xy\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2} + y$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{2(x+y)}{1+2y}$$

$$E\{\mu(X)|y\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x)\ f(x|y)\ dx = \int_{0}^{1} x.\frac{2(x+y)}{1+2y}\ dx$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{2(x^2+xy)}{1+2y}\ dx = \frac{3y+2}{3(1+2y)}$$

Sifat-sifat dari mean :

1. $E\{ax+b\} = aE\{x\}+b$

   dengan a dan b konstanta sebarang;

2. $E\{a_1 g_1(x) + \dots\dots\dots + a_n g_n(x)\} = a_1 E\{g_1(x)\} + \dots\dots$

   $+ a_n E\{g_n(x)\}$

Definisi 2.17 :

Variansi variabel random X dinotasikan σ^2 didefinisikan sebagai ;

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\eta)^2\ f(x)\ dx$$

dengan $\eta = \eta_x = E\{X\}$, konstanta σ yang juga dinyatakan dengan σ_x disebut deviasi standar variabel random X.

Dari definisi terlihat bahwa σ^2 adalah mean variabel random $(x-\eta)^2$ jadi;

$$\sigma^2 = E\{(X-\eta)^2\} = E\{X^2-2X\eta+\eta^2\} = E\{X^2\} - 2\eta E\{X\} + \eta^2$$

karena $\eta = E\{X\}$, maka didapatkan ;

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E\{X\}]^2 = E\{X^2\} - E^2\{X\}$$

Definisi 2.18 :

Kovariansi C atau C_{xy} dua variabel random X dan Y didefinisikan sebagai ;

$$C = E\{(X-\eta_x)(Y-\eta_y)\}$$

dengan $E\{X\} = \eta_x$ dan $E\{Y\} = \eta_y$.

Definisi 2.19 :

Dua variabel random X dan Y disebut independen bila peristiwa $\{X\in A\}$ dan $\{Y\in B\}$ independen, yaitu bila;

$$P\{X\in A, Y\in B\} = P\{X\in A\}.P\{Y\in B\}$$

dengan A adalah himpunan bilangan real pada sumbu x, dan B adalah himpunan bilangan real pada sumbu y.

2.8. Konsep Konvergensi

Definisi 2.20 :

Deret tak berhingga dari fungsi-fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ dikatakan konvergen di dalam inteval [a,b]. Jika barisan jumlah-jumlah parsial $\langle S_n(x)\rangle$; n=1,2,3,..... dengan $S_n(x)=U_1(x)+U_2(x)+...+U_n(x)$ konvergen untuk setiap x didalam interval [a,b]. Jadi deret $\sum U_n(x)$ dikatakan konvergen ke $S(x)$ atau $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$ untuk setiap x di dalam interval [a,b], jika untuk setiap $\varepsilon>0$ dan setiap x di dalam interval [a,b] dapat ditemukan bilangan natural N>0 sehingga untuk semua n>N berlaku $|S_n(x)-S(x)| < \varepsilon$.Bilangan N dapat bergantung pada x juga pada ε. Jika bilangan N tersebut hanya bergantung pada ε dan tidak bergantung pada x, maka urutan tersebut dikatakan konvergen ke $S(x)$ secara uniform didalam interval [a,b]. Deret $\sum U_n$ dikatakan konvergen mutlak, jika $\sum|U_n|$ konvergen.

Contoh 2.9 :

Buktikan bahwa deret $\sum U_n(x)= \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ untuk $-1<x<1$.

Bukti: Bila $x=0$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} x^n=1+0+0+0+\ldots= 1$ (konvergen).

Untuk $-1<x<1$ dan $x\neq 0$, maka; $S_0(x)=1$; $S_1(x)=1+x$; $S_2(x)=1+x+x^2$; $S_n(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n = \frac{1-x^n}{1-x}$; karena $\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}$, maka untuk setiap $\varepsilon>0$ dan $-1<x<1$, $x\neq 0$ terdapat suatu bilangan natural N>0, sedemikian hingga untuk semua n>N berlaku $|S_n(x)-\frac{1}{1-x}|<\varepsilon$.

$$|S_n(x)-\frac{1}{1-x}|=|\frac{1-x^n}{1-x}-\frac{1}{1-x}|=|\frac{x^n}{1-x}|=\frac{|x^n|}{1-x}=\frac{|x|^n}{1-x}<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x|^n<\varepsilon(1-x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{1/|x|}\right]^n = \frac{1}{p^n} <\varepsilon(1-x) \qquad \text{dengan } p=\frac{1}{|x|}>1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon(1-x)} < p^n \qquad \Leftrightarrow \quad \log 1/\varepsilon(1-x) < n.\log p$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log 1/\varepsilon(1-x)}{\log p} <n \Rightarrow N=I\left[\frac{\log 1/\varepsilon(1-x)}{\log 1/|x|}\right]=I\left[\frac{\log (1-x)}{\log|x|}\right]$$

Sehingga bila diberikan $\varepsilon>0$, dan $-1<x<1$ dapat ditemukan bilangan natural $N = I\left[\frac{\log \varepsilon(1-x)}{\log|x|}\right] >0$ sedemikian hingga untuk semua n>N berlaku $|S_n(x)-\frac{1}{1-x}|<\varepsilon$.

Terbukti.

Pengujian M. Weierstrass.

Jika sebuah urutan konstanta-konstanta positif $m_1, m_2, m_3, \ldots.$ dapat dicari sehingga untuk setiap x didalam interval [a,b] berlaku $|U_n(x)| \leq m_n$; $n=1,2,3,\ldots.$ dan $\sum m_n$ konvergen maka $\sum U_n(x)$ konvergen uniform dan konvergen mutlak didalam interval tersebut.

Bukti:

$m_1, m_2, m_3, \ldots.$ adalah konstanta-konstanta positif dan $\sum m_n$ konvergen. Misalkan deret $\sum m_n$ konvergen ke V atau $\lim_{n\to\infty} V_n = V$ dengan $V_n = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n$; maka jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan natural N_ε, sedemikian hingga untuk semua $n > N_\varepsilon$ berlaku $|V_n - V| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow |V_n - V| = |V - V_n| = m_{n+1} + m_{n+2} + m_{n+3} + \ldots.. < \varepsilon$

Misalkan $S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \ldots. + U_n(x)$ dan $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$. Jadi bila diberikan $\varepsilon_1 > 0$ dan setiap x didalam interval [a,b] dapat ditemukan bilangan natural $N_{x,\varepsilon_1} > 0$ sedemikian hingga untuk semua $n > N_{x,\varepsilon_1}$ berlaku;

$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$. Karena untuk setiap x didalam [a,b] berlaku $|U_n(x)| \leq m_n$ maka;

$$|S_n(x) - S(x)| = |S(x) - S_n(x)| = U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + U_{n+3}(x) + \ldots..$$

$$< m_{n+1} + m_{n+2} + m_{n+3} + \ldots.. < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ untuk setiap x didalam [a,b].

yang berarti untuk setiap $\varepsilon_1 = \varepsilon > 0$ dan setiap x didalam interval [a,b] dapat ditemukan bilangan natural $N_{x,\varepsilon_1} = N_\varepsilon > 0$ sedemikian hingga untuk semua $n > N_\varepsilon$ berlaku;

$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$. Terbukti deret $\sum U_n(x)$ konvergen uniform didalam interval [a,b].

Contoh 2.10 :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ konvergen uniform dan konvergen mutlak didalam interval $[0,2\pi]$. Karena $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ dan $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen.

2.10. Transformasi Fourier

Sifat integral sinus dan kosinus untuk setiap n dan m bilangan integer yang besar adalah sebagai berikut;

a) $\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\, dx = 0$ untuk $m \neq n$

$= L$ untuk $m = n$

b) $\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\, dx = 0$ untuk $m \neq n$

$= L$ untuk $m = n$

c) $\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\, dx = 0$ untuk setiap m,n.

Sebuah fungsi $f(x)$ dikatakan periodik dengan periode T jika untuk setiap x, berlaku $f(x+T)=f(x)$ dengan T sebuah konstanta positif. Nilai $T>0$ terkecil dinamakan periode dari $f(x)$.

Teorema 2.2 :

Misalan $f(x)$ didefinisikan dalam interval $[-L,L]$ dan diluar interval ini oleh $f(x+2L)=f(x)$ yakni $f(x)$ mempunyai periode 2L. Deret Fourier pada interval $[-L,L]$ tersebut diberikan oleh; $f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L})$

maka koefisien Fouriernya adalah ;

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \text{ dan } b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

serta $a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$

Bukti :

Diberikan deret Fourier pada interval [-L,L] dalam persamaan ; $f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ ...(1)

Jika persamaan (1) dikalikan dengan $\cos\frac{m\pi x}{L}$ kemudian diintegralkan didapat;

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L}\frac{a_o}{2}\cos\frac{m\pi x}{L}dx + \int_{-L}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

Dari sifat integral sinus dan cosinus a) dan c) untuk m=n maka ;

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = a_n L \quad \text{..............(2)}$$

Persamaan (1) dikalikan dengan $\sin\frac{m\pi x}{L}$ kemudian diintegralkan didapatkan ;

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L}\frac{a_o}{2}\sin\frac{m\pi x}{L}dx + \int_{-L}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

dari sifat integral sinus cosinus b) dan c) untuk m=n maka didapatkan;

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = b_n L \quad \text{.................(3)}$$

Persamaan (1) diintegralkan didapat;

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{L}\frac{a_o}{2}dx + \int_{-L}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{a_o}{2}[x]_{-L}^{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L} - b_n\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_{-L}^{L}$$

$$= \frac{a_o}{2}2L + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \frac{L}{n\pi} \{\sin(n\pi)-\sin(-n\pi)\}-\emptyset]$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = a_o L \quad \text{..................(4)}$$

Dari persamaan (2),(3), dan (4) maka teorema 2.4 terbukti.

Syarat Direchlet :

a. $f(x)$ terdefinisi dan berharga tunggal kecuali pada sejumlah berhingga titik di interval $[-L,L]$;

b. $f(x)$ periodik diluar interval $[-L,L]$ dengan periode 2L

c. $f(x)$ dan $f'(x)$ kontinu bagian demi bagian diinterval $[-L,L]$. Dengan $f'(x)$ adalah derevatif pertama dari $f(x)$, jadi $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$

maka deret fourier dengan koefisien fouriernya konvergen ke; i. $f(x)$ jika x titik kontinuitas, dan

ii. $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ jika x titik diskontinu.

Bukti :

Dianggap $L=\pi$ sehingga deret fourier yang bersesuaian mempunyai periode $2L=2\pi$, dan koefisien fourier yang bersesuaian adalah; $a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{\pi} f(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nu\,du$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\sin\frac{n\pi u}{L}du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu\,du$$

Sedangkan deret fourier untuk M suku dapat dituliskan oleh;

$$S_M(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{M} [a_n.\cos nx + b_n.\sin nx] \text{ ; dengan } M=1,2,3,\ldots$$

sedemikian hingga; $a_n\cos nx + b_n\sin nx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\cos nu.\cos nx.du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\sin nu.\sin nx.du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\ [\cos nu.\cos nx + \sin nu.\sin nx].du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\cos(nu-nx).du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\cos n(u-x).du$$

sehingga diperoleh;

$$S_M(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u).du + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\cos n(u-x).du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{M}\cos n(u-x)\right\}du$$

Substitusikan $u-x=t \Rightarrow u=t+x \Rightarrow du=dx$, sedemikian hingga;

$$S_M(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{M}\cos nt\right\}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x)\frac{\sin(M+1/2)t}{2\sin 1/2\ t}dt$$

Karena integral diatas mempunyai periode 2π, maka interval $[\pi-x,-\pi-x]$ dapat digantikan dengan $[-\pi,\pi]$.

$$S_M(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left\{\frac{f(t+x)-f(x-\emptyset)}{2\sin 1/2\ t}\right\}\sin(M+1/2)t\,dt$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left\{\frac{f(t+x)-f(x+\emptyset)}{2\sin 1/2\ t}\right\}\sin(M+1/2)t\,dt$$

Jika $f(x)$ dan $f'(x)$ kontinu sepotong-sepotong di dalam $[-\pi,\pi]$ maka fungsi $\dfrac{f(t+x)-f(x+\emptyset)}{2\sin 1/2\ t}$ kontinu sepotong-sepotong untuk $\emptyset<t\leq\pi$, karena $f(x)$ kontinu sepotong-sepotong.

$$\lim_{t\to\emptyset^+}\frac{f(t+x)-f(x+\emptyset)}{2\sin 1/2\ t}=\lim_{t\to\emptyset^+}\frac{f(t+x)-f(x+\emptyset)}{t}\ \frac{t}{2\sin 1/2 t}$$
$$=\lim_{t\to\emptyset^+}\frac{f(t+x)-f(x+\emptyset)}{t}=f'(x)$$

Karena diasumsikan $f'(x)$ kontinu sepotong-sepotong maka turunan kanan dari $f(x)$ ada pada setiap x.

Analog untuk fungsi $\dfrac{f(t+x)-f(x-\emptyset)}{2\sin 1/2\ t}$ kontinu sepotong-sepotong untuk $-\pi\leq t\leq\emptyset$. Sehingga untuk $M\to\infty$ didapatkan;

$$\lim_{M\to\infty} S_M(x) - \frac{f(x+\emptyset)+f(x-\emptyset)}{2} = \emptyset$$

i. Jika x titik kontinu maka $f(x+\emptyset)=f(x-\emptyset)=f(x)$;

$\lim_{M\to\infty} S_M(x) - \frac{f(x)+f(x)}{2} = \emptyset \Leftrightarrow \lim_{M\to\infty} S_M(x) = f(x).$

ii. Jika x titik diskontinu, $f(x+\emptyset)=f(x^+)$ dan $f(x-\emptyset)=f(x^-)$, $\lim_{M\to\infty} S_M(x) = \frac{f(x^+)-f(x^-)}{2}$

.... terbukti.

Teorema 2.3 :

Diasumsikan kedua syarat dibawah ini berlaku untuk fungsi $f(x)$, yaitu ;

1. Pada tiap interval $[-L,L]$; $f(x)$ memenuhi syarat Direchlet.
2. Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ konvergen, yaitu $f(x)$ dapat diintegralkan secara multak dalam interval $[-\infty,\infty]$.

Maka integral Fourier $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(u-x)du$

dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen ;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\ e^{i\alpha(u-x)}du d\alpha$$

Bukti :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Terlihat bahwa ; $a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\ \cos\frac{n\pi u}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\ du + \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\ \sin\frac{n\pi u}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\ du$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\ \left[\cos\frac{n\pi u}{L}\cos\frac{n\pi x}{L} + \sin\frac{n\pi u}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]du$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\ \cos\left[\frac{n\pi u}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right] du = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\ \cos\frac{n\pi}{L}(u-x)\ du$$

sehingga didapatkan ;

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)du + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(u)\ \cos\frac{n\pi}{L}(u-x)\ du$$

menurut asumsi $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|f(u)|du$ konvergen, maka untuk $L\to\infty$ integral $\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)du$ mendekati nol, sehingga ;

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi}{L}(u-x)\,du \qquad \text{...........(5)}$$

diambil $\Delta\alpha = \frac{\pi}{L}$; untuk $n\to\infty$ maka $\alpha = n.\Delta\alpha$, bila dibentuk

$$F(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(u)\cos\alpha(u-x)\,du \qquad \text{...........(6)}$$

maka persamaan (5) dapat ditulis sebagai;

$$f(x) = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha.F(n.\Delta\alpha) \qquad \text{..........(7)}$$

dari persamaan (7) diperoleh;

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\emptyset}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(u-x)du=\frac{1}{\pi}\int_{\emptyset}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(u-x)\,dud\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\emptyset}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\frac{e^{i\alpha(u-x)}+e^{-i\alpha(u-x)}}{2}\right]dud\alpha \text{ ;dengan } i^2=-1$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\emptyset}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)[e^{i\alpha(u-x)}+e^{-i\alpha(u-x)}]dud\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\emptyset}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)[e^{i\alpha(u-x)}]dud\alpha+\frac{1}{2\pi}\int_{\emptyset}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)[e^{-i\alpha(u-x)}]dud\alpha$$

menurut asumsi f terintegral mutlak maka integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(u-x)}du$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha(u-x)}du$ konvergen uniform terhadap α, untuk semua $\alpha>\emptyset$ menurut uji Weierstrass. Konvergensi ini dan kontinuitas fungsi f menghasilkan integral ; $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(u-x)}du$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha(u-x)}du$ sebagai fungsi α yang kontinu, sehingga $f(x)$ dapat ditulis;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-i\alpha x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}dud\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{i\alpha x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}dud\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(u-x)}dud\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha(u-x)}dud\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(u-x)}dud\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(u-x)}dud\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(u-x)}du\,d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(u-x)}du\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(u-x)}du\,d\alpha \qquad .... \quad \text{terbukti}$$

Dengan mengambil $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}du$ maka ;

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha$. Fungsi $F(\alpha)$ disebut *transformasi fourier* dari $f(x)$. Dan fungsi $f(x)$ disebut *invers transformasi fourier* dari $F(\alpha)$.

2.11. Variabel Kompleks Dan Transformasi Laplace.

Definisi 2.21 :

Variabel kompleks dinyatakan dalam bentuk $s=\alpha+i\beta$ dengan α dan β merupakan variabel-variabel riel dan $i^2=-1$. $Re[s]=\alpha$ merupakan nilai riel variabel s, dan $Im[s]=\beta$ merupakan nilai imaginer variabel s. Konjugasi (sekawan) kompleks dari variabel $s=\alpha+i\beta$ ditulis sebagai $s^*=\alpha-i\beta$.

Definisi 2.22 :

Modulus atau harga mutlak dari variabel kompleks $s=\alpha+i\beta$ dituliskan $|s|=(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$ selalu positif atau nol. Jadi $s.s^*=(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)=\alpha^2+\beta^2=|s|^2$.

Definisi 2.23 :

Diberikan f(t) adalah suatu fungsi riel dalam interval $[0,\infty)$. Transformasi laplace dari fungsi f(t) adalah suatu fungsi F(s) yang didefinisikan oleh;

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-st}f(t).dt$$

F(s) dinotasikan pula dengan $\mathcal{L}\{f\}(s)$. Domain dari fungsi tersebut adalah semua nilai s yang memenuhi integral tersebut, sedangkan t>0 menunjukan waktu atau dapat dikatakan t merupakan bilangan riel positif.

Contoh 2.10

Tentukan tansformasi laplace dari $f(t)=e^{at}$ dengan a suatu konstanta.

Jawab :

$$F(s)=\mathscr{L}\{f\}(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}dt=\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^{N} e^{-(s-a)t}dt=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^N$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{s-a}-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]=\frac{1}{s-a}$$

Definisi 2.24 :

Transformasi laplace invers dinotasikan dengan $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$ adalah fungsi f(t) yang kontinu dalam interval $[0,\infty)$ sedemikian hingga $\mathscr{L}\{f\}(s)=F(s)$.

Contoh 2.11:

Tentukan $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$ dengan $F(s)=\frac{1}{s-a}$.

Jawab :

$\mathscr{L}\{f\}(s)=\frac{1}{s-a}$ maka $f(t)=e^{at}$ sehingga $\mathscr{L}^{-1}\{F\}=\frac{1}{s-a}$

2.12. Matriks

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riel atau kompleks) yang disusun secara empat persegi panjang menurut baris-baris dan kolom-kolom. Matriks pada pembahasan skripsi ini akan diberi simbol dengan huruf yunani besar, seperti Λ, Π, Ψ, Y, dan lain-lain.

Diberikan a_{ij} adalah elemen-elemen matriks Λ, dengan indeks $i=1,2,3,\ldots,n$ menyatakan baris ke-i dan indeks $j=1,2,3,\ldots,m$ menyatakan kolom ke-j. Matriks Λ dituliskan dengan $\Lambda=[a_{ij}]$ atau secara lengkap ;

$$\Lambda=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

dan $(m\times n)$ menyatakan ukuran atau orde dari matriks Λ. Dua buah matriks $\Lambda=[a_{ij}]$ dan $\Pi=[b_{ij}]$ dikatakan sama $\Lambda=\Pi$ bila ukurannya sama dan berlaku $a_{ij}=b_{ij}$ untuk setiap i dan j.

Definisi 2.25:

Diberikan matriks $\Lambda=[a_{ij}]$ berukuran $(p\times q)$ dan matriks $\Pi=[b_{ij}]$ berukuran $(q\times r)$. Maka perkalian dua buah matriks tersebut $\Lambda.\Pi$ adalah suatu matriks $\Psi=[c_{ij}]$ berukuran $(p\times r)$ dengan $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{iq}b_{qj}$ untuk setiap $i=1,2,3,\ldots,p$ dan $j=1,2,3,\ldots,r$.

Contoh 2.12 :

$$\Lambda=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \Pi=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Lambda.\Pi$ = tak terdefinisi

$$\Pi.\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 12 \\ 10 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.26 :

Matriks identitas (satuan) ialah matriks dengan banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. Dan elemen-elemennya terdiri dari $a_{ij}=0$ untuk setiap $i\neq j$ dan $a_{ij}=1$ untuk setiap $i=j$. Matriks identitas dinotasikan oleh I atau I_n dengan n menunjukan ukuran matriks tersebut.

Contoh 2.13 :

$$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Differensial Fungsi Matriks

Jika diberikan suatu vektor $\bar{r}$ dalam ruang R^m yang memiliki vektor-vektor satuan $\bar{i}_1,\bar{i}_2,\bar{i}_3,\ldots,\bar{i}_m$ maka $\bar{r}$ dapat dituliskan dalam persamaan berikut;

$$\bar{r}=\bar{r}(t)=x_1(t)\bar{i}_1+x_2(t)\bar{i}_2+x_3(t)\bar{i}_3+\ldots+x_m(t)\bar{i}_m$$

titik terminal $\bar{r}$ menggambarkan kurva dalam ruang R^m yang memiliki persamaan-persamaan parameter;

$$x_1=x_1(t)\ ;\ x_2=x_2(t)\ ;\ x_3=x_3(t)\ ;\ \ldots;\ x_m=x_m(t)$$

$$\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta\bar{r}(t+\Delta t)-\bar{r}(t)}{\Delta t} \qquad \text{atau}$$

$$\frac{d\bar{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}(t+\Delta t)-\bar{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{[x_1(t+\Delta t)-x_1(t)]\bar{i}_1]+[x_2(t+\Delta t)-x_2(t)]\bar{i}_2]}{\Delta t}\right.$$

$$\left.\frac{+\ldots\ldots+[x_m(t+\Delta t)-x_m(t)]\bar{i}_m]}{}\right]$$

$$=\frac{dx_1}{dt}.\bar{i}_1+\frac{dx_2}{dt}.\bar{i}_2+\ldots\ldots+\frac{dx_m}{dt}.\bar{i}_m$$

Bila diberikan n buah vektor $\bar{r}$ dalam ruang R^m, yaitu;

$$\bar{r}_1(t)=x_{11}(t)\bar{i}_1+x_{12}(t)\bar{i}_2+x_{13}(t)\bar{i}_3+\ldots\ldots+x_{1m}(t)\bar{i}_n$$

$$\bar{r}_2(t)=x_{21}(t)\bar{i}_1+x_{22}(t)\bar{i}_2+x_{23}(t)\bar{i}_3+\ldots\ldots+x_{2m}(t)\bar{i}_n$$

$$\vdots$$

$$\bar{r}_m(t)=x_{n1}(t)\bar{i}_1+x_{n2}(t)\bar{i}_2+x_{n3}(t)\bar{i}_3+\ldots\ldots+x_{nm}(t)\bar{i}_n$$

Persamaan-persamaan tersebut diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks, sebagai berikut;

$$\begin{bmatrix}\bar{r}_1(t)\\ \bar{r}_2(t)\\ \vdots\\ \bar{r}_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}(t) & x_{12}(t) & x_{13}(t) & \ldots & x_{1m}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & x_{23}(t) & \ldots & x_{2m}(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & x_{n3}(t) & \ldots & x_{nm}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{i}_1\\ \bar{i}_2\\ \vdots\\ \bar{i}_n\end{bmatrix}=[x_{ij}(t)]\begin{bmatrix}\bar{i}_1\\ \bar{i}_2\\ \vdots\\ \bar{i}_n\end{bmatrix}$$

Jika matriks $\Lambda(t)=[x_{ij}(t)]$, maka matriks $\Lambda(t)$ dinamakan matriks fungsi dengan variabel t. Defferensial dari fungsi matriks tersebut diperoleh dengan mendefferensialkan matriks vektor $\bar{r}(t)$.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\bar{r}_1(t)\\ \bar{r}_2(t)\\ \vdots\\ \bar{r}_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}.\bar{r}_1(t)\\ \frac{d}{dt}.\bar{r}_2(t)\\ \vdots\\ \frac{d}{dt}.\bar{r}_n(t)\end{bmatrix}=\frac{d}{dt}\left[x_{ij}(t)\right]\begin{bmatrix}\bar{i}_1\\ \bar{i}_2\\ \vdots\\ \bar{i}_n\end{bmatrix}$$

karena; $\frac{d}{dt}.\bar{r}_1 = \frac{dx_{11}}{dt}.\bar{i}_1+\frac{dx_{12}}{dt}.\bar{i}_2+\ldots\ldots\ldots+\frac{dx_{1m}}{dt}.\bar{i}_m$

$$\frac{d}{dt}.\bar{r}_2 = \frac{dx_{21}}{dt}.\bar{i}_1+\frac{dx_{22}}{dt}.\bar{i}_2+\ldots\ldots\ldots+\frac{dx_{2m}}{dt}.\bar{i}_m$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dt}.\bar{r}_n = \frac{dx_{n1}}{dt}.\bar{i}_1+\frac{dx_{n2}}{dt}.\bar{i}_2+\ldots\ldots\ldots+\frac{dx_{nm}}{dt}.\bar{i}_m$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\bar{r}_1(t)\\ \bar{r}_2(t)\\ \vdots \\ \bar{r}_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}x_{11}(t) & \frac{d}{dt}x_{12}(t) & \dots & \frac{d}{dt}x_{1m}(t)\\ \frac{d}{dt}x_{21}(t) & \frac{d}{dt}x_{22}(t) & \dots & \frac{d}{dt}x_{2m}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{d}{dt}x_{n1}(t) & \frac{d}{dt}x_{n2}(t) & \dots & \frac{d}{dt}x_{nm}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{i}_1\\ \bar{i}_2\\ \vdots\\ \bar{i}_n\end{bmatrix}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa defferensial dari fungsi matriks $\Lambda(t)=[x_{ij}(t)]$ merupakan defferensial tiap-tiap elemen $x_{ij}(t)$. Jadi;

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\,[x_{ij}(t)] = [\frac{d}{dt}.x_{ij}]$$

<u>Contoh 2.14</u> :

$$\Pi(t)=\begin{bmatrix}t^2+1 & \cos t\\ e^t & 1\end{bmatrix} \quad \text{maka} \quad \Pi'(t)=\begin{bmatrix}2t & -\sin t\\ e^t & 0\end{bmatrix}$$

Fungsi Matriks Eksponensial

Diberikan $e^{\Lambda t}$ dengan e bilangan eksponensial dan Λ matriks berukuran (nxn) dengan elemen-elemen skalar. Maka $e^{\Lambda t}$ dinamakan matrikas eksponensial yang dapat didefinisikan dengan menempatkan Λ untuk mengganti konstanta k pada ekspansi deret pangkat e^{kt}.

Menurut Maclaurin ekspansi dari e^{kt} dengan k suatu konstanta berbentuk;

$$e^{kt} = 1 + kt + k^2\frac{t^2}{2!} + k^3\frac{t^3}{3!} + \dots + k^n\frac{t^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} k^n\frac{t^n}{n!}$$

sehingga bila k diganti dengan Λ, didapatkan;

$$e^{\Lambda t} = 1 + \Lambda t + \Lambda^2\frac{t^2}{2!} + \Lambda^3\frac{t^3}{3!} + \dots + \Lambda^n\frac{t^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n\frac{t^n}{n!}$$