BAB II
TEORI DASAR

2.1 STRATEGI CAMPURAN

Strategi permainan adalah rangkaian kegiatan menyeluruh dari salah satu pihak sebagai reaksi atas aksi yang mungkin dilakukan oleh pihak lain yang menjadi saingannya.

Suatu permainan dengan strategi murni adalah suatu permainan dengan posisi terbaiknya bagi setiap pihak dicapai dengan memilih satu strategi saja.

Sedang strategi campuran adalah strategi dimana ada lebih dari satu strategi yang harus dipilih.

Strategi optimal adalah rangkaian kegiatan atau rencana yang menyeluruh yang menyebabkan salah satu pihak yang bermain dalam posisi yang paling menguntungkan tanpa memperhatikan kegiatan-kegiatan para pesaingnya.

Harga permainan adalah harga yang diperoleh pihak I sehingga pihak I harus memaksimalkan kemenangan dan pihak II harus meminimalkan kekalahan atau sebaliknya harga yang diperoleh pihak II sehingga pihak I harus meminimalkan kekalahan dan pihak II harus memaksimalkan kemenangan.

Contoh 2.1

Matriks permainan jumlah nol dua orang 2 x 2 :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{II} \\ & & \begin{array}{cc} \text{II}_1 & \text{II}_2 \end{array} \\ \text{I} & \begin{array}{c} \text{I}_1 \\ \text{I}_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

terlihat bahwa matriks diatas tidak mempunyai titik pelana karena $\max_x \min_y \neq \min_y \max_x$, sehingga permainan di atas bukan merupakan permainan dengan strategi murni.

Pembahasan berikutnya digunakan untuk permainan dengan strategi campuran. Misalkan pihak I memilih strategi ke-1 dengan peluang 1/2 dan memilih strategi ke-2 dengan peluang 1/2 juga. Bila pihak I dianggap pihak yang membuat pilihan, maka jika pihak II memilih strategi ke-1, perolehan yang diharapkan untuk pihak I adalah :

$$1/2.1 + 1/2.(-1) = 0$$

sedangkan jika pihak II memilih strategi ke-2, perolehan yang diharapkan untuk pihak I adalah :

$$1/2.(-1) + 1/2.1 = 0$$

Dengan demikian strategi optimal pihak I adalah memilih strategi ke-1 atau strategi ke-2 dengan peluang masing-masing 1/2 dengan harga permainan sebesar 0.

Contoh 2.2

Misalkan pihak I memilih strategi ke-1 dengan kemungkinan x dan strategi ke-2 dengan kemungkinan 1-x, serta pihak II memilih strategi ke-1 dengan kemungkinan y dan strategi ke-2 dengan kemungkinan 1-y, matriks permainannya adalah :

$$\begin{array}{cc|cc} & & \multicolumn{2}{c}{II} \\ & & II_1 & II_2 \\ I & \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}} \end{array}$$

Jika pihak I mengambil $x = 3/5$, dan pihak II mengambil $y = 1/5$, maka perolehan yang diharapkan untuk pihak I adalah :

$$= (5.3/5 + 1.2/5).1/5 + (3.3/5 + 4.2/5).4/5$$
$$= 17/5$$

Sehingga dipastikan pihak I memperoleh kemenangan maksimal sebesar 17/5 dan pihak II menderita kekalahan minimal 17/5. Strategi optimal pihak I setelah memilih strategi ke-1 dengan peluang 3/5 atau strategi ke-2 dengan peluang 2/5 ditulis (3/5 , 2/5). Begitu juga strategi optimal pihak II setelah memilih strategi ke-1 dengan peluang 1/5 atau strategi ke-2 dengan peluang 4/5 ditulis (1/5, 4/5).

Secara umum, untuk permainan dimana pihak I mempunyai m strategi murni, strategi campuran X dapat diwakili dengan m-tuple $x = (x_1, x_2, \ldots , x_m)$, dimana x_i = peluang menggunakan strategi ke-i, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots , m$ dan $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Begitu juga untuk permainan dimana pihak II mempunyai n strategi murni, strategi campuran Y dapat diwakili dengan n-tuple $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, dimana y_j = peluang menggunakan strategi ke-j, $y_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ dan $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$. Jika pihak I memainkan strategi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dan pihak II memainkan strategi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ maka perolehan yang diharapkan untuk pihak I adalah :

$$e(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i \, e_{ij} \, y_j \qquad (2.1)$$

dimana e_{ij} = elemen-elemen matriks

Contoh 2.3

Dalam permainan Poker yang disederhanakan, misalkan pihak I memilih strategi ke-1 dengan kemungkinan x dan strategi ke-2 dengan kemungkinan 1-x, serta pihak II memilih strategi ke-1 dengan kemungkinan y dan strategi ke-2 dengan kemungkinan 1-y, matriks permainannya adalah :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{II} \\ & & \begin{array}{cc} \text{II}_1 & \text{II}_2 \end{array} \\ \text{I} & \begin{array}{c} \text{I}_1 \\ \text{I}_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka perolehan yang diharapkan adalah :

$$\begin{aligned} e(x, y) &= 0.x.y - 1.x.(1 - y) - 1/2.(1 - x).y \\ &\quad + 0.(1 - x).(1 - y) \\ &= -x - 1/2y + 3/2xy \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Didefinisikan : $V_L^M = \underset{x \in X}{\text{maks}}\ \underset{y \in Y}{\min}\ e(x, y)$

$V_U^M = \underset{y \in Y}{\min}\ \underset{x \in X}{\text{maks}}\ e(x, y)$

dimana : V_L^M = harga bawah

V_U^M = harga atas

Jelas bahwa $V_L^M \leq V_U^M$ (2.3)

Dari contoh 2.3

Jika pihak I memainkan $x^* = (1/3, 2/3)$ dimana x^* adalah strategi optimal untuk pihak I, maka dengan substitusi x = 1/3 pada (2.2) diperoleh :

$e(x^*, y) = -1/3$, untuk $\forall\ y \in Y$ (2.4)

Dengan memainkan $x^* = (1/3, 2/3)$ ini pihak I yakin dapat menerima paling sedikit -1/3.

Alternatif lain, jika pihak II memainkan strategi optimal $y^* = (2/3, 1/3)$, maka dengan substitusi y = 2/3 pada (2.2) diperoleh :

$e(x, y^*) = -1/3$, untuk $\forall\ x \in X$ (2.5)

Sehingga jika pihak II memainkan $y^* = (2/3, 1/3)$, pihak II dapat menahan pihak I untuk memperoleh tidak lebih dari -1/3. Memainkan x^* menjamin pihak I menerima paling sedikit -1/3, sehingga $V_L^M \geq -1/3$, padahal jika pihak II memainkan y^*, pihak II menjamin pihak I tidak lebih dari -1/3, jadi $V_U^M \leq -1/3$. Padahal dari (2.3) diketahui $V_L^M \leq V_U^M$. Jadi $V_L^M = V_U^M = -1/3$. Sehingga solusinya :

pihak I memainkan strategi optimal (1/3, 2/3) dan pihak II memainkan strategi optimal (2/3 , 1/3) dengan harga yang diharapkan -1/3.

Berikut ini akan kami berikan pula contoh untuk menunjukkan perbedaan strategi campuran dalam permainan one-off dan strategi campuran dalam permainan yang dimainkan berulang-ulang.

Contoh 2.4

Dalam PD II strategi normal dari pesawat tempur ketika menyerang pesawat pembom lawan adalah menukik turun pada sasarannya dari arah matahari, dikenal sebagai strategi 'Hun dalam matahari'. Jika tiap pesawat memakai strategi ini, pilot pesawat pembom memakai kacamata hitam dan menjaga pandangan dari matahari untuk melihat pesawat tempur. Metode kedua untuk menyerang yang dianjurkan adalah menyerang lurus kebawah. Ini akan berhasil bila pesawat tempur tidak terlihat. Dinamakan strategi Ezak-Imak. Untuk mendapatkan perhitungan kemungkinan ketahanan hidup dari pesawat tempur ketika menyerang, diberikan matriks permainan yang menggambarkan situasi sebagai berikut :

$$\begin{array}{ll} & \text{Pesawat pembom} \\ & \begin{array}{cc} \text{Lihat atas} & \text{Lihat bawah} \end{array} \\ \text{Pesawat tempur} \begin{array}{r} \text{Hun dalam matahari} \\ \text{Ezak-Imak} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}95 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

diperoleh :

$$x^* = \left(\frac{0 - 1}{0,95 + 0 - 1 - 1} , \frac{0,95 - 1}{0,95 + 0 - 1 - 1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1,05} , \frac{0,05}{1,05} \right)$$

$$= (20/21 , 1/21)$$

$$y^* = \left(\frac{0 - 1}{0,95 + 0 - 1 - 1} , \frac{0,95 - 1}{0,95 + 0 - 1 - 1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1,05} , \frac{0,05}{1,05} \right)$$

$$= (20/21 , 1/21)$$

$$V = \frac{0,95.0 - 1.1}{0,95 + 0 - 1 - 1}$$

$$= \frac{1}{1,05}$$

$$= 20/21$$

$$= 0,9524$$

Jadi strategi maksimin untuk pihak I adalah $x^* = (20/21 , 1/21)$ dengan perhitungan 0,9524.

Pimpinan skuadron dalam serangan skuadron pesawat terbang, menaruh 20 bola putih dan 1 bola hitam dalam topinya dan menyuruh tiap pilot mengambil satu. Putih berarti Hun dalam matahari, hitam berarti Ezak-Imak. Pimpinan skuadron menganggap ini sebagai permainan yang dimainkan dengan waktu yang lama / banyak, satu waktu untuk setiap pilot, sebaliknya pilot menganggap ini sebagai permainan one-off. Ini adalah strategi campuran $x^* = (20/21 , 1/21)$. Jadi, sebelum setiap penerbangan pilot akan mencoba percobaan pimpinan skuadron dan memilih satu dari 21 bola. Pemilihannya antara harapan tingkat keamanan 0,95 dan tingkat keamanan yang diharapkan 0,9524.

Dalam permainan one-off memainkan strategi campuran kelihatannya sebagai pelepasan pertanggungjawaban, sebaliknya dalam permainan yang dimainkan berulang-ulang, strategi campuran menambahkan ketidaktentuan yang membingungkan musuh.

2.2 KESETIMBANGAN

Definisi 2.1

Suatu pasangan strategi optimal pihak I dan pihak II $x^* \in X$, $y^* \in Y$ dinyatakan (x^* , y^*), adalah pasangan kesetimbangan, jika dan hanya jika untuk setiap $x \in X$, $y \in Y$ berlaku :

$$e (x , y^*) \le e (x^* , y^*) \le e (x^* , y) \qquad (2.6)$$

Jika pihak I menggunakan strategi x dan pihak II menggunakan strategi y^*, maka keuntungan pihak I adalah $e_1(x , y^*)$. Sebaliknya jika pihak I menggunakan strategi x^* dan pihak II menggunakan strategi y, maka keuntungan pihak II adalah $e_2(x^* , y)$, sehingga berlaku

$$\text{i. } e_1(x, y^*) \le e_1(x^*, y^*)$$
$$\text{ii. } e_2(x^*, y) \le e_2(x^*, y^*) \qquad (2.7)$$

Definisi 2.2

Dalam permainan N orang tanpa kerjasama, dimana x_i^* adalah strategi optimal pemain ke-i, $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)$ merupakan kesetimbangan N-tuple, jika untuk semua i = 1, 2, . . . , N, berlaku :

$$e_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_i, \ldots, x_N^*) \le$$
$$e_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_N^*)$$
$$(2.8)$$

Lemma 2.1

Jika (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) adalah pasangan kesetimbangan, maka $e(x_1, y_1) = e(x_2, y_2)$.

Bukti :

Karena (x_1, y_1) adalah suatu pasangan kesetimbangan, maka menurut definisi 2.1, berlaku :

$$e(x_2, y_1) \le e(x_1, y_1) \le e(x_1, y_2)$$
$$(2.9)$$

Begitu juga untuk (x_2, y_2) adalah suatu pasangan kesetimbangan, sehingga menurut definisi 2.1, berlaku :

$$e(x_1, y_2) \le e(x_2, y_2) \le e(x_2, y_1)$$
$$(2.10)$$

Dari (2.9) dan (2.10) maka jelas bahwa $e(x_1, y_1)$ harus sama dengan $e(x_2, y_2)$ dan $e(x_2, y_2)$ harus sama dengan $e(x_1, y_1)$.

Theorema 2.1

Jika (x^*, y^*) adalah pasangan strategi dalam permainan 2 orang m x n jumlah nol, maka (x^*, y^*) adalah pasangan kesetimbangan jika dan hanya jika $(x^*, y^*, e(x^*, y^*))$ solusi dari permainan.

Bukti :

Jika (x^*, y^*) adalah pasangan kesetimbangan, maka menurut (2.6) :

$$\max_{x\in X} e(x, y^*) \le e(x^*, y^*) \le \min_{y\in Y} e(x^*, y) \qquad (2.11)$$

Dari (2.11) diperoleh :

$$\begin{aligned} V_U^M &= \min_{y\in Y} \max_{x\in X} e(x, y) \\ &\le \min_{y=y^*} \max_{x\in X} e(x, y) \\ &= \max_{x\in X} e(x, y^*) \\ &\le e(x^*, y^*) \\ &\le \min_{y\in Y} e(x^*, y) \\ &= \max_{x=x^*} \min_{y\in Y} e(x, y) \\ &\le \max_{x\in X} \min_{y\in Y} e(x, y) \\ &= V_L^M \end{aligned}$$

sehingga $V_U^M \le V_L^M$ (2.12)

sebaliknya menurut (2.3) : $V_L^M \leq V_U^M$, karena :

$$\min_{y \in Y} e(x', y) \leq e(x', y') \leq \max_{x \in X} e(x, y')$$

untuk $x' \in X$, $y' \in Y$

maka :

$$\begin{aligned}
V_L^M &= \underset{x \in X}{\text{maks}} \min_{y \in Y} e(x, y) \\
&\leq \underset{x = x'}{\text{maks}} \min_{y \in Y} e(x, y) \\
&= \min_{y \in Y} e(x', y) \\
&\leq e(x', y') \\
&\leq \underset{x \in X}{\text{maks}}\, e(x, y') \\
&= \min_{y = y'} \underset{x \in X}{\text{maks}}\, e(x, y) \\
&\leq \min_{y \in Y} \underset{x \in X}{\text{maks}}\, e(x, y) \\
&= V_U^M
\end{aligned}$$

Jadi $V_L^M \leq V_U^M$ (2.13)

Dari (2.12) dan (2.13) diperoleh :

$$V_L^M = V_U^M = e(x^*, y^*)$$

sehingga $(x^*, y^*, e(x^*, y^*))$ solusi dari permainan.

Sebaliknya, jika $(x^*, y^*, V = e(x^*, y^*))$ solusi dari permainan, maka :

$$\begin{aligned}
e(x, y^*) &\leq \underset{x \in X}{\text{maks}}\, e(x, y^*) \\
&= \min_{y \in Y} \underset{x \in X}{\text{maks}}\, e(x, y) \\
&= e(x^*, y^*) \\
&= \underset{x \in X}{\text{maks}} \min_{y \in Y} e(x, y)
\end{aligned}$$

$$= \min_{y \in Y} e(x^*, y)$$

$$\leq e(x^*, y)$$

karena $e(x, y^*) \leq e(x^*, y^*) \leq e(x^*, y)$, maka (x^*, y^*) adalah pasangan kesetimbangan.

2.3 PERMAINAN META

Permainan meta adalah suatu permainan yang menggunakan asumsi bahwa salah satu pihak mencoba untuk memperkirakan strategi-strategi mana yang akan dipilih lawan-lawannya, sebelum ia merencanakan strategi pilihannya. Dalam permainan meta strategi-strategi pihak yang bermain merupakan fungsi reaksi dari strategi pihak lain. Tujuan permainan meta ini adalah jika salah satu pihak berusaha bersikap rasional obyektif (berdasar keadaan nyata dari konflik), ia harus memilih strateginya dalam permainan meta, agar memiliki keadaan kesetimbangan atau keadaan yang disebut stabilitas nyata. Keadaan stabilitas nyata artinya suatu keadaan dimana pihak yang bermain memperkirakan strategi-strategi yang akan dipilih pihak lain dengan benar, karena sebuah pendapatan dipengaruhi oleh keadaan kesetimbangan. Sehingga strategi yang digunakan pada permainan meta adalah strategi murni yang tidak mengubah permainan asli yang menjadi dasarnya. Untuk itu perlu dipahami pengertian-pengertian sebagai berikut :

G = permainan asli

k G = permainan meta dari pihak ke-k

j k G = permainan meta k G dari pihak ke-j, jadi artinya pihak ke-j memilih strategi pilihannya dengan pedoman pilihan strategi pihak ke-k

n = banyaknya pihak yang bermain, $n \geq 2$; n bulat

sehingga secara umum, jika :

r = tingkat permainan meta, r bulat positif

maka :

$k_1 \; k_2 \; \ldots k_r$ G = permainan meta tingkat ke-r

Untuk lebih jelas, diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.5

n = 4

r = 3

PERMAINAN ASLI	PERMAINAN META TINGKAT 1	PERMAINAN META TINGKAT 2	PERMAINAN META TINGKAT 3
G	1 G	11 G	111 G 211 G 311 G 411 G
		21 G	121 G 221 G 321 G 421 G
		31 G	131 G 231 G 331 G 431 G
		41 G	141 G 241 G 341 G 441 G
	2 G	12 G	112 G 212 G 312 G 412 G
		22 G	122 G 222 G 322 G 422 G
		32 G	132 G 232 G 332 G 432 G
		42 G	142 G 242 G 342 G 442 G
	3 G	13 G	113 G 213 G 313 G 413 G
		23 G	123 G 223 G 323 G 423 G
		33 G	133 G 233 G 333 G 433 G
		43 G	143 G 243 G 343 G 443 G
	4 G	14 G	114 G 214 G 314 G 414 G
		24 G	124 G 224 G 324 G 424 G
		34 G	134 G 234 G 334 G 434 G
		44 G	144 G 244 G 344 G 444 G

Definisi 2.3

Sebuah pendapatan ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ... , $\bar{x}_N$) dalam permainan asli G yang timbul dari sebuah kesetimbangan dalam sebuah permainan $k_1\ k_2\ \ldots k_r$ G, dimana r sebarang bilangan bulat non negatif dan $k_1\ k_2\ \ldots\ k_r$ G sebarang barisan pihak yang bermain termasuk pengulangan disebut suatu kesetimbangan meta.

Definisi 2.4

Sebuah pendapatan rasional untuk pihak i adalah sebuah N-tuple strategi $\bar{x}$ = ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ... , $\bar{x}_N$) dimana :

$$e_i\ (\ \bar{x}_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_i\ ,\ \ldots\ ,\ \bar{x}_N\ )\ \leq$$

$$e_i\ (\ \bar{x}_1\ ,\ \ldots\ ,\ \bar{x}_i\ ,\ \ldots\ ,\ \bar{x}_N\ ) \qquad (2.14)$$

untuk semua $x_i \in X_i$

Dalam permainan meta $k_1\ k_2\ \ldots\ k_r$ G, suatu pendapatan $\bar{x}$ = ($\bar{x}_{F_i}$, $\bar{x}_{P_i}$, $\bar{x}_{U_i}$, $\bar{x}_i$) dalam G adalah rasional meta untuk i dalam $k_1\ k_2\ \ldots\ k_r$ G, jika :

$$\min_{x_{P_i}}\ \max_{x_i}\ \min_{x_{F_i}}\ e_i\ (\ x_{F_i}\ ,\ x_{P_i}\ ,\ \bar{x}_{U_i}\ ,x_i\ )\ \leq\ e_i\ (\ \bar{x}\ ) \qquad (2.15)$$

dimana :

F_i adalah himpunan pihak yang bermain yang terletak di sebelah kanan i terakhir dalam $k_1\ k_2\ \ldots\ k_r$ atau himpunan pihak yang bermain dalam

$k_1\ k_2\ .\ .\ .\ k_r$ bila i tidak berada dalam $k_1\ k_2\ .\ .\ .\ k_r$

P_i adalah himpunan pihak yang bermain yang tidak berada dalam F_i atau himpunan pihak yang bermain yang terletak di sebelah kiri i terakhir dalam $k_1\ k_2\ .\ .\ .\ k_r$

U_i adalah himpunan pihak yang bermain yang tidak berada dalam P_i atau F_i atau { i }

Jika dalam permainan G hanya mempunyai 2 pihak, yaitu pihak 1 dan pihak 2, maka menurut ketentuan diatas berlaku :

- dalam 1 G :

($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) rasional meta untuk 1 jika

$$\underset{x_1}{\text{maks}}\ e_1\ (\ x_1\ ,\ \bar{x}_2\ ) \leq e_1\ (\ \bar{x}_1\ ,\ \bar{x}_2\ ) \tag{2.16}$$

karena $F_1 = P_2 = \emptyset$, $U = \{ 2 \}$ untuk 1 G

($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) rasional meta untuk 2 jika

$$\underset{x_2}{\text{maks}}\ \underset{x_1}{\text{min}}\ e_2\ (\ x_1\ ,\ x_2\ ) \leq e_2\ (\ \bar{x}_1\ ,\ \bar{x}_2\ ) \tag{2.17}$$

karena $F_2 = \{ 1 \}$, $P_2 = U_2 = \emptyset$ untuk 1 G

- dalam 21 G :

($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) rasional meta untuk 1 jika

$$\underset{x_2}{\text{min}}\ \underset{x_1}{\text{maks}}\ e_1\ (\ x_1\ ,\ x_2\ ) \leq e_1\ (\ \bar{x}_1\ ,\ \bar{x}_2\ ) \tag{2.18}$$

karena $P_1 = \{ 2 \}$, $F_1 = U_1 = \emptyset$ untuk 21 G

$(\bar{x}_1 , \bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\underset{x_2}{\text{maks}} \ \underset{x_1}{\text{min}} \ e_2 (x_1 , x_2) \le e_2 (\bar{x}_1 , \bar{x}_2) \tag{2.19}$$

karena $F_2 = \{ 1 \}$, $P_2 = U_2 = \emptyset$ untuk 21 G

- dalam 2 G :

$(\bar{x}_1 , \bar{x}_2)$ rasional meta untuk 1 jika

$$\underset{x_1}{\text{maks}} \ \underset{x_2}{\text{min}} \ e_1 (x_1 , x_2) \le e_1 (\bar{x}_1 , \bar{x}_2) \tag{2.20}$$

karena $F_1 = \{ 2 \}$, $P_1 = U_1 = \emptyset$ untuk 2 G

$(\bar{x}_1 , \bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\underset{x_2}{\text{maks}} \ e_2 (\bar{x}_1 , x_2) \le e_2 (\bar{x}_1 , \bar{x}_2) \tag{2.21}$$

karena $F_2 = P_2 = \emptyset$, $U_2 = \{ 1 \}$ untuk 2 G

- dalam 12 G :

$(\bar{x}_1 , \bar{x}_2)$ rasional meta untuk 1 jika

$$\underset{x_1}{\text{maks}} \ \underset{x_2}{\text{min}} \ e_1 (x_1 , x_2) \le e_1 (\bar{x}_1 , \bar{x}_2) \tag{2.22}$$

karena $F_1 = \{ 2 \}$, $P_1 = U_1 = \emptyset$ untuk 12 G

$(\bar{x}_1 , \bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\underset{x_1}{\text{min}} \ \underset{x_2}{\text{maks}} \ e_2 (x_1 , x_2) \le e_2 (\bar{x}_1 , \bar{x}_2) \tag{2.23}$$

karena $P_2 = \{ 1 \}$, $F_2 = U_2 = \emptyset$ untuk 12 G

Syarat-syarat (2.16) - (2.23) benar karena sesuai dengan definisi 2.4.

Definisi 2.5

Sebuah pendapatan ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ... , $\bar{x}_N$) adalah sebuah kesetimbangan meta yang simetri, jika ini merupakan kesetimbangan meta dalam semua permainan lengkap.

Kesetimbangan meta yang simetri adalah stabil untuk semua pihak jika mereka memikirkan permainan dengan cara semua pihak memikirkan permainan meta dimana mereka memilih strategi pilihannya setelah pihak lain, sehingga mereka dapat terlebih dahulu memperkirakan langkah-langkah pihak lain.

2.4 DUOPOLI DAN OLIGOPOLI

Sebelumnya terlebih dahulu disinggung sedikit tentang permainan pemasaran, dalam hal ini permainan pemasaran model Edgeworth. Edgeworth mengasumsikan :

1. Terdapat dua komoditi yang diperdagangkan dalam pasar, yaitu komoditi tipe A dan komoditi tipe B.
2. Dalam pasar terdapat M penjual komoditi tipe A dan untuk setiap penjual ke-i dengan $i = 1, 2, \ldots, M$ memulai dengan modal $(a_i, 0)$ yang berarti ia memiliki a_i buah komoditi tipe A dan 0 buah komoditi tipe B. Begitu juga untuk komoditi tipe B, terdapat N penjual komoditi tipe B yang memulai pula dengan modal $(0, b_j)$, $j = M+1, M+2, \ldots, M+N$.

Jika terdapat fungsi utiliti penjual ke-i yaitu u_i (a,b) berarti bahwa penjual ke-i memiliki a buah komoditi tipe A dan b buah komoditi tipe B.

Sedang oligopoli adalah organisasi pasar dengan N penjual suatu komoditi yang sejenis (relasi tertutup) dan N > 2, sedang apabila N = 2 disebut duopoli. Oligopoli identik dengan [M , ∞] permainan pemasaran. Jadi dalam pasar dibagi menjadi dua kelompok, yaitu :

1. Para penjual yang memiliki komoditi yang akan dijual.
2. Para pembeli yang akan membeli komoditi.

Diasumsikan :

1. Pembeli mempunyai suatu fungsi utiliti $u\ (\ p_1\ ,\ p_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ p_M\ ,\ q_1\ ,\ q_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ ,\ q_M\ )$
   dimana : p_i = harga komoditi dari penjual ke-i,
   q_i = banyaknya komoditi yang akan dibeli konsumen dari penjual ke-i.
2. Pembeli akan mempertimbangkan harga $p_1\ ,\ p_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ ,p_M$ yang ditawarkan penjual dan kemudian akan memilih $q_1\ ,\ q_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ ,\ q_M$ hingga mencapai fungsi utiliti yang maksimal.

Pengurangan akan suatu komoditi dari konsumen akan mempengaruhi harga permintaan, dan ini akan mempengaruhi penerimaan q_i untuk komoditi penjual ke-i, sehingga fungsi q_i dinyatakan sebagai :

$$q_i = f_i\ (\ p_1\ ,\ p_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ ,\ p_M\ ) \qquad (2.24)$$

Dari (2.24) dapat disusun suatu fungsi utiliti produksi yang tentunya akan menghasilkan keuntungan untuk masing-masing penjual, yaitu :

$$e_i\ (p_1, p_2, \ldots, p_M)$$
$$= p_i q_i - c_i(q_i)$$
$$= p_i f_i(p_1, \ldots, p_M) - c_i(f_i(p_1, \ldots, p_M)) \qquad (2.25)$$

dimana c_i adalah fungsi harga produksi komoditi ke-i

Definisi 2.7

Suatu kesetimbangan Cournot adalah vektor dari harga $p_i^c = (p_1^c, p_2^c, \ldots, p_M^c)$ sehingga untuk semua penjual i = 1, 2, . . . , M berlaku :

$$e_i\ (p_1^c, p_2^c, \ldots, p_i^c, \ldots, p_M^c)$$
$$= \max_{p_i} e_i(p_1^c, p_2^c, \ldots, p_i, \ldots, p_M^c)$$

Setiap konsumen akan mempertimbangkan setiap harga suatu komoditi, sehingga secara sederhana dapat disimpulkan bahwa harga suatu komoditi mempunyai batas atas dan batas bawah yang dimulai dari nol. Ini berhubungan dengan tidak adanya permintaan, jika harga komoditi tersebut diatas harga kesepakatan.

Sedangkan untuk mencari pasangan kesetimbangan dalam hal ini digunakan metode Swastika, yaitu suatu cara untuk mencari pasangan kesetimbangan dengan metode grafik. Diberikan contoh disini permainan jumlah tidak nol 2 x 2 seperti matriks pembayaran dibawah ini :

$$\begin{array}{ccc} & II_1 & II_2 \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc} (2 , 1) & (4 , 3) \\ (6 , 2) & (3 , 1) \end{array}\right]} \end{array} .$$

Perolehan untuk pihak I adalah $e_1(x_1 , x_2)$ dan $x_1 = (x_1 , 1 - x_1)$, $x_2 = (x_2 , 1 - x_2)$, maka

$$\begin{array}{ccc} & II_1 & II_2 \\ & x_2 & 1-x_2 \\ \begin{array}{cc} I_1 & x_1 \\ I_2 & 1-x_1 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{array}\right]} \end{array}$$

sehingga :

$$\begin{aligned} e_1(x_1 , x_2) &= 2.x_1.x_2 + 6.(1-x_1).x_2 + 4.x_1.(1-x_2) \\ &\quad + 3.(1-x_1).(1-x_2) \\ &= 3 + x_1 + 3.x_2 - 5.x_1.x_2 \end{aligned}$$

supaya x_1 maksimum, maka $\dfrac{d(e_1(x_1 , x_2))}{d x_1} = 0$

$$\frac{d (e_1(x_1 , x_2))}{d x_1} = 1 - 5x_2 = 0$$

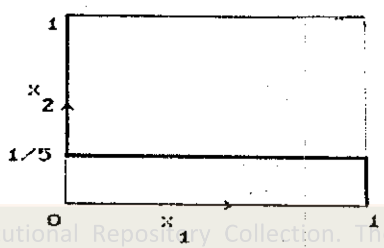
$$x_2 = 1/5$$

diperoleh, jika

$x_2 < 1/5$, maka $e_1(x_1 , x_2)$ maksimal di $x_1 = 1$

$x_2 = 1/5$, maka $e_1(x_1 , x_2)$ maksimal di $0 \leq x_1 \leq 1$

$x_2 > 1/5$, maka $e_1(x_1 , x_2)$ maksimal di $x_1 = 0$



Untuk perolehan pihak II $e_2(x_1, x_2)$

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & I_1 & I_2 \\
 & & x_1 & 1-x_1 \\
II_1 & x_2 & 1 & 2 \\
II_2 & 1-x_2 & 3 & 1
\end{array}
$$

sehingga :

$$e_2(x_1, x_2) = 1.x_2.x_1 + 2.x_2.(1-x_1) + 3.(1-x_2).x_1 + 1.(1-x_2).(1-x_1)$$

$$= 1 + x_2 + 2.x_1 - 3.x_1.x_2$$

$$\frac{d\,(e_2(x_1, x_2))}{d\,x_2} = 0$$

$$= 1 - 3.x_1 = 0$$

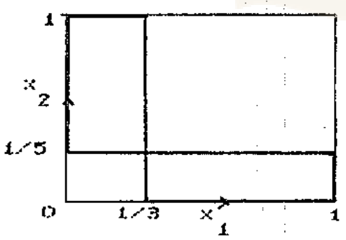
$$x_1 = 1/3$$

diperoleh, jika

$x_1 < 1/3$, maka $e_2(x_1, x_2)$ maksimal di $x_2 = 1$

$x_1 = 1/3$, maka $e_2(x_1, x_2)$ maksimal di $0 \leq x_2 \leq 1$

$x_1 > 1/3$, maka $e_2(x_1, x_2)$ maksimal di $x_2 = 0$



Maka permainan diatas mempunyai tiga pasangan kesetimbangan, yaitu :

1. Untuk $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, disubstitusikan pada (i) dan (ii) mendapatkan perolehan (3 , 1). Ini berkorespondensi dengan (I_2, II_2).

2. Untuk $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, disubstitusikan pada (i) dan (ii) mendapatkan perolehan (6 , 2). Ini berkorespondensi dengan (I_2 , II_1).
3. Untuk $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1/5$, disubstitusikan pada (i) dan (ii) berkorespondensi dengan ((1/3 , 2/3) ; (1/5 ,4/5)) dengan perolehan (3,6 ; 1,6).

Contoh 2.6

Terdapat dua penjual i = 1, 2 dan fungsi harga permintaan adalah :

$$q_1 = f_1(p_1 , p_2) = \text{maks} (1 + 1/3p_2 - 1/2p_1 , 0) \quad (2.26)$$

$$q_2 = f_2(p_1 , p_2) = \text{maks} (1 + 1/4p_1 - 1/2p_2 , 0) \quad (2.27)$$

Untuk menyederhanakan dibuat $c_1(q_1) = c_2(q_2) = 0$, $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$

Karena harga suatu komoditi terbatas kebawah, maka :

$$\begin{aligned} q_1 &\geq 0 \\ 1 + 1/3p_2 - 1/2p_1 &\geq 0 \\ 2 + 2/3p_2 - p_1 &\geq 0 \\ 2 + 2/3p_2 &\geq p_1 \end{aligned}$$

sehingga $0 \leq p_1 \leq 2 + 2/3p_2$

Analog untuk q_2

$$\begin{aligned} q_2 &\geq 0 \\ 1 + 1/4p_1 - 1/2p_2 &\geq 0 \\ 2 + 2/4p_1 - p_2 &\geq 0 \\ 2 + 1/2p_1 &\geq p_2 \end{aligned}$$

sehingga $0 \leq p_2 \leq 2 + 1/2p_1$

Untuk harga dalam range ini, fungsi keuntungan pemain adalah :

$$e_1(p_1, p_2) = p_1 + 1/3p_1p_2 - 1/2p_1^2$$
$$e_2(p_1, p_2) = p_2 + 1/4p_1p_2 - 1/2p_2^2 \qquad (2.28)$$

Dalam metode Swastika untuk mendapatkan pasangan kesetimbangan, dapat ditunjukkan bahwa dalam kesetimbangan Cournot p_1^c harus memaksimalkan $e_1(p_1, p_2^c)$, sehingga harus memenuhi :

$$\frac{d\, e_1(p_1, p_2^c)}{d\, p_1} = 0$$

Begitu juga dalam kesetimbangan Cournot p_2^c harus memaksimalkan $e_2(p_1^c, p_2)$, sehingga memenuhi :

$$\frac{d\, e_2(p_1^c, p_2)}{d\, p_2} = 0$$

diperoleh :

$$\frac{d\, e_1(p_1, p_2)}{d\, p_1} = 1 + 1/3p_2 - p_1 = 0 \qquad (2.29)$$

$$\frac{d\, e_2(p_1, p_2)}{d\, p_2} = 1 + 1/4p_1 - p_2 = 0 \qquad (2.30)$$

Dari (2.29) diperoleh :

$$1 + 1/3p_2 - p_1 = 0$$
$$p_1 = 1 + 1/3p_2 \qquad (2.31)$$

Dengan substitusi (2.31) ke dalam (2.30) diperoleh :

$$p_2 = 15/11$$
$$p_1 = 16/11$$

Sehingga didapat harga keuntungan yang maksimum, yaitu :

e_1 (16/11 , 15/11) = 1,06

e_2 (16/11 , 15/11) = 0,93

Dengan konsep solusi lain yang dikemukakan oleh Stacleberg, yaitu :

1. Jika penjual I lebih dulu menetapkan harga komoditinya sebesar p_1 dan kemudian penjual II ingin masuk dalam pasar maka ia harus menetapkan harga komoditinya dengan memperhatikan harga p_1 , sehingga harga komoditi p_2 didefinisikan sebagai $p_2 = g_2(p_1)$.
2. Jika penjual II lebih dulu dalam pasar dengan menetapkan harga komoditi sebesar p_2 , kemudian penjual I memasuki pasar, maka penjual I menetapkan harga komoditi sebesar $p_1 = g_1(p_2)$.
3. Kedua penjual memulai menetapkan harganya bersama-sama.

Contoh 2.7

Dari contoh 2.6, jika penjual I menetapkan harga lebih dulu, harga komoditi :

$$p_1 = g_1(p_2) = 1 + 1/3p_2 \qquad (2.32)$$

$$p_2 = g_2(p_1) = 1 + 1/4p_1 \qquad (2.33)$$

fungsi keuntungan penjual I :

$$e_1\ (p_1, g_2(p_1)) = p_1 + 1/3p_1p_2 - 1/2p_1^2$$
$$= p_1 + 1/3p_1(1 + 1/4p_1) - 1/2p_1^2$$
$$= 1\ 1/3p_1 - 5/12p_1^2$$

karena penjual 1 memasuki pasar terlebih dahulu maka ia harus memaksimalkan fungsi keuntungan :

$$\frac{d\ e_1\ (p_1, g_2(p_1))}{d\ p_1} = 0$$

diperoleh :

$$\frac{d\ (\ 1\ 1/3p_1 - 5/12p_1^2\ )}{d\ p_1} = 1\ 1/3 - 5/6p_1 = 0$$

$$p_1 = 8/5$$

p_1 disubstitusikan pada (2.33) diperoleh $p_2 = 7/5$ sehingga keuntungan para penjual dengan substitusi pada (2.28) :

$$e_1\ (\ 8/5\ ,\ 7/5\ ) = 1{,}067$$
$$e_2\ (\ 8/5\ ,\ 7/5\ ) = 0{,}98$$

Jika penjual II memasuki pasar terlebih dahulu maka ia harus memaksimalkan fungsi keuntungan :

$$e_2\ (g_1(p_2), p_2) = p_2 + 1/4p_1p_2 - 1/2p_2^2$$
$$= p_2 + 1/4(1 + 1/3p_2)p_2 - 1/2p_2^2$$
$$= 1\ 1/4p_2 - 5/12p_2^2$$

$$\frac{d\ e_2\ (g_1(p_2), p_2)}{d\ p_2} = 0$$

$$\frac{d\,(\,1\,1/4p_2 - 5/12p_2^{\,2}\,)}{d\,p_2} = 1\,1/4 - 5/6p_2 = 0$$

$$p_2 = 3/2$$

p_2 disubstitusikan pada (2.32) diperoleh $p_1 = 3/2$ sehingga keuntungan para penjual :

e_1 (3/2 , 3/2) = 1,125

e_2 (3/2 , 3/2) = 0,9375

Jika kedua penjual memulai menetapkan harganya bersama-sama, maka penjual I menetapkan $p_1 = 8/5$ dan penjual II menetapkan $p_2 = 3/2$, sehingga keuntungan para penjual :

e_1 (8/5 , 3/2) = 1,12

e_2 (8/5 , 3/2) = 0,975