BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. LIMIT DAN KONTINUITAS

DEFINISI 2.1

Suatu fungsi $f : S \longrightarrow E^1$, $S \subset E^m$. Jika $A \in E^m$ dan $b \in E^1$, maka $\lim_{X \to A} f(X) = b$ (atau $f(X) \longrightarrow b$ bila $X \longrightarrow A$) yang berarti $\lim_{|X-A| \to 0} |f(X)-b| = 0$.

Dengan istilah ε, δ ini berarti : Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(X)-b| < \varepsilon$ untuk $|X-A| < \delta$.

CONTOH 2.1

Diketahui $f(x,y) = x^2 + y^2$

maka $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$, karena dengan memilih $\delta = \varepsilon^{0.5}$ diperoleh $|\ x^2 + y^2 - 0\ | < \varepsilon$ untuk $x^2+y^2 < \delta^2$

DEFINISI 2.2

Fungsi $f : E^m \longrightarrow E^1$ disebut kontinu di $A \in E^m$ apabila $f(A)$ terdefinisi dan $\lim_{X \to A} f(X) = f(A)$.

CONTOH 2.2

Ambil $m = 2$ sehingga fungsi $f : E^2 \longrightarrow E^1$

Diketahui $f(x,y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$ $\quad (0 \leq x^2+y^2 < 1)$

$f(0,0) = 1$

$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 1 = f(0,0)$

sehingga $f(x,y)$ kontinu di $(0,0)$

DEFINISI 2.3

f kontinu pada suatu daerah definisi D apabila f kontinu pada setiap titik $\in$ D.

CONTOH 2.3

Pandang contoh 2.2

$f(x,y)$ kontinu di $(0,0)$ dimana $D = \{ (x,y) \mid 0 \leq x^2+y^2 < 1 \}$. Misalkan $x = {}^1/_2$ dan $y = {}^1/_2$ sehingga diperoleh

$f({}^1/_2, {}^1/_2) = 2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2 = f({}^1/_2, {}^1/_2)$$

Jadi $f(x,y)$ kontinu di $({}^1/_2, {}^1/_2)$. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa $f(x,y)$ kontinu pada setiap titik $\in$ D. Kesimpulannya f kontinu pada suatu daerah definisi D.

2.2. HIMPUNAN TITIK

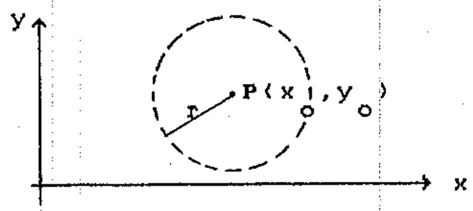
Suatu kumpulan titik - titik di bidang XY dinamakan suatu himpunan titik berdimensi dua (E^2) dan setiap titiknya dinamakan suatu anggota atau unsur himpunan tersebut.

DEFINISI 2.4

Suatu sekitar (neighbourhood) dari suatu titik $P(x_o,y_o)$ adalah himpunan dari semua titik (x,y) dimana untuk radius r positif memenuhi hubungan

$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < r^2$

Notasi untuk sekitar adalah $N_p(r)$.



Gambar 2.1 Neighbourhood

DEFINISI 2.5

Himpunan M disebut terbatas jika ada suatu $P(x_o,y_o)$ dan r sedemikian sehingga $M \subset N_p(r)$.

DEFINISI 2.6

Titik $P(x_o,y_o)$ disebut titik dalam (interior point) dari himpunan M jika dapat ditemukan suatu sekitar r dari $P(x_o,y_o)$ yang semua titiknya termasuk dalam M.

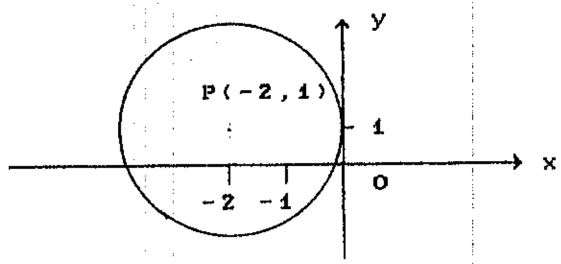
Jika setiap sekitar r dari $P(x_o,y_o)$ memuat titik di M dan juga titik di luar M, maka $P(x_o,y_o)$ disebut titik batas (boundary point).

Jika suatu titik bukan suatu titik dalam atau titik batas dari himpunan M, maka titik ini disebut titik luar dari M (exterior point).

Titik $P(x_o,y_o)$ disebut titik limit (limit point) dari himpunan M apabila setiap sekitar dari $P(x_o,y_o)$ memuat titik-titik dari himpunan M yang bukan titik $P(x_o,y_o)$.

CONTOH 2.4

$$M = \{ (x,y) \mid (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 4 \}$$



Gambar 2.2

$N_P(r) = \{ (x,y) \mid (x+2)^2 + (y-1)^2 < 4 \}$

Himpunan M terbatas.

Titik (-1,0) adalah titik dalam.

Titik (0,1) adalah titik batas.

Titik (-1,-2) adalah titik luar.

Titik-titik pada lingkaran $(x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 4$ adalah titik limit.

DEFINISI 2.7

Himpunan terbuka (open set) adalah suatu himpunan yang hanya terdiri dari titik dalam.

Himpunan tertutup (closed set) adalah himpunan yang memuat semua titik limitnya.

CONTOH 2.5

Himpunan titik (x,y) sehingga $x^2+y^2 < 1$ adalah himpunan terbuka.

Himpunan titik (x,y) sehingga $x^2+y^2 \leq 1$ adalah himpunan tertutup.

DEFINISI 2.8

Himpunan terbuka M disebut tersambung jika untuk setiap 2 titik di himpunan tersebut dapat dihubungkan oleh suatu lintasan berbentuk ruas garis yang semua titiknya terletak di dalam M.

DEFINISI 2.9

Daerah terbuka adalah suatu himpunan terbuka tersambung.

CONTOH 2.6

Pandang contoh 2.5

Himpunan titik (x,y) sedemikian sehingga $x^2+y^2 < 1$ merupakan daerah terbuka.

DEFINISI 2.10

Kurva bidang terbatas C adalah himpunan dari titik - titik (x,y) yang ditentukan dengan

$$x = f(t) \quad , \quad y = g(t) \qquad a \le t \le b .$$

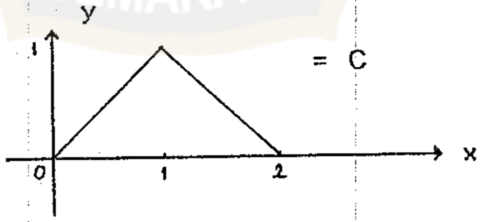
DEFINISI 2.11

C disebut busur Jordan jika tidak ada 2 harga t yang berlainan yang berkorespondensi dengan satu titik (x,y) atau

$\forall\ t_1, t_2 \in [a,b]$ dengan $t_1 \neq t_2$ maka $[f(t_1),g(t_1)] \neq [f(t_2),g(t_2)]$.

CONTOH 2.7

$$\begin{aligned} C :\quad x &= t \quad , & 0 \le t \le 2 \\ y &= t \quad , & 0 \le t \le 1 \\ y &= 2 - t \ , & 1 < t \le 2 \end{aligned}$$



Gambar 2.3

C merupakan kurva bidang terbatas.

C adalah busur Jordan.

DEFINISI 2.12

C disebut kurva tertutup sederhana (kurva Jordan) jika f(a) = f(b). g(a) = g(b) dan tidak ada lagi 2 harga t yang berlainan yang berkorespondensi dengan satu titik (x,y).

CONTOH 2.8

C : $x = 2 \cos t$

$y = 2 \sin t \quad , \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

C merupakan kurva Jordan.

DEFINISI 2.13

Busur licin adalah busur Jordan yang f' dan g' nya kontinu dan tidak bersama - sama berharga nol untuk harga t yang manapun.

DEFINISI 2.14

Kontur adalah rangkaian kontinu (union) dari sejumlah berhingga busur licin.

CONTOH 2.9

Pandang contoh 2.7

Garis patah pada contoh 2.7 merupakan suatu kontur.

DEFINISI 2.15

Kontur tertutup adalah suatu kontur yang tidak pernah memotong dirinya sendiri.

CONTOH 2.10

Pandang contoh 2.8

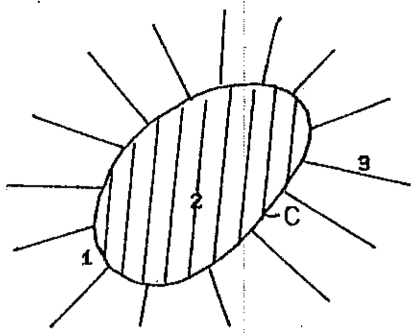
Contoh 2.8 dinamakan kontur tertutup.

THEOREMA 2.1

Untuk sembarang kurva Jordan C (kontur tertutup sederhana) pada bidang datar membagi daerah menjadi 3 bagian yang saling asing, yaitu

1. C sendiri.
2. Interior dari C yaitu merupakan daerah yang terbuka dan terbatas.
3. Exterior dari C yaitu merupakan daerah yang

tak terbatas.



Gambar 2.4 Kurva Jordan C

Theorema ini mudah dimengerti tetapi sulit untuk dibuktikan.

2.3. DERET TAYLOR

THEOREMA 2.2

Misalkan $u : E^1 \to E^1$ mempunyai turunan dengan orde $n+1$, $u^{(n+1)}(x)$ di selang $(a-r,a+r)$ dan misalkan ada konstanta $M > 0$ demikian sehingga berlaku $|u^{(n+1)}(x)| \leq M$ untuk semua x di selang tersebut , maka untuk setiap x di selang itu , $u(x)$ dapat diuraikan menjadi bentuk :

$$u(x) = u(a) + u'(a)(x-a) + u''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + u^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n ,$$

dengan $$|R_n| \leq \frac{M\,|x-a|^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

BUKTI :

$|u^{(n+1)}(x)| \leq M$ dapat ditulis sebagai

$-M \leq u^{(n+1)}(x) \leq M$

Jika semua ruas diintegrasikan dari a hingga x , diperoleh

$$-M\ (x-a) \le u^{(n)}(x) - u^{(n)}(a) \le M\ (x-a)$$

Hasil ini diintegrasikan pula dari a hingga x maka diperoleh :

$$\frac{-M(x-a)^2}{2!} \le u^{(n-1)}(x) - u^{(n-1)}(a) - u^{(n)}(a)\ (x-a) \le \frac{M(x-a)^2}{2!}$$

Proses integrasi ini diulang (n-1) kali lagi dan hasilnya adalah sebagai berikut

$$\frac{-M(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \le u(x) - u(a) - u'(a)\ (x-a) - u''(a)\ \frac{(x-a)^2}{2!} - \ldots - u^{(n)}(a)\ \frac{(x-a)^n}{n!} \le \frac{M(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

Jika ruas tengah $u(x)-u(a)-u'(a)(x-a)- \ldots -u^{(n)}(a)\ \frac{(x-a)^n}{n!}$ dimisalkan R_n maka akan diperoleh

$$u(x) = u(a) + u'(a)\ (x-a) + u''(a)\ (x-a)^2 + \ldots + u^{(n)}(a)\ \frac{(x-a)^n}{n!} + R_n\ ,$$

dengan $|R_n| \le M\ \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ (terbukti)

Hasil ini disebut uraian Taylor untuk u(x) di sekitar x=a , R_n dinamakan suku sisa.

Sedangkan deret Taylor untuk u(x,y) di sekitar titik (x_i,y_j) adalah

$$u(x,y) = u(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y)$$

$$= u(x_i,y_j) + \Delta x\ \frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial x} + \Delta y\ \frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y} + \frac{1}{2!}\ \Delta x^2\ \frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2} + \Delta x\ \Delta y\ \frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x\ \partial y}$$

$$+ \frac{1}{2!}\, \Delta y^2\, \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} + \frac{1}{3!}\, \Delta x^3\, \frac{\partial^3 u(x_i, y_j)}{\partial x^3} +$$

$$\frac{1}{2!}\, \Delta x^2\, \Delta y\, \frac{\partial^3 u(x_i, y_j)}{\partial x^2\, \partial y} + \frac{1}{2!} \Delta x\, \Delta y^2 \frac{\partial^3 u(x_i, y_j)}{\partial x\, \partial y^2}$$

$$+ \frac{1}{3!}\, \Delta y^3\, \frac{\partial^3 u(x_i, y_j)}{\partial y^3} + \;\ldots\; +$$

$$\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \frac{u(x_i, y_j)}{n!} + R_n \quad ,$$

dimana $\Delta x = h$ dan $\Delta y = k$ dengan $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$.

Sebagai titik tolak untuk uraian Taylor daripada fungsi dengan dua perubah , ditinjau deret Maclaurin untuk fungsi dengan satu perubah

$$u(x) = u(0) + u'(0)\, x + u''(0)\, \frac{x^2}{2!} + \ldots + u^{(n)}(0)\, \frac{x^n}{n!} + R_n$$

dimana

$$|R_n| \le M \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \quad \text{jika } |\, u^{(n+1)}(0)\, | \le M \quad \text{untuk}$$

suatu konstanta M.

Misalkan fungsi u(x,y) demikian sehingga $u(t) = u(r,s)$ dengan $r = x_i + ht$ dan $s = y_j + kt$ memenuhi persyaratan yang diperlukan untuk uraian Taylor .

x_i, h, y_j, k adalah konstanta dan t perubah dengan $0 \le t \le 1$, jadi $\frac{dr}{dt} = h$ dan $\frac{ds}{dt} = k$.

Sekarang u(t) adalah fungsi dari satu perubah dan uraiannya menjadi

$$u(t) = u(0) + u'(0)\, t + u''(0)\, \frac{t^2}{2!} + \ldots + u^{(n)}(0)\, \frac{t^n}{n!} + R_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.1)$$

dengan $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$

$$u'(t) = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{\partial u}{\partial r} h + \frac{\partial u}{\partial s} k$$

Sehingga $u'(0) = h \dfrac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial r} + k \dfrac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial s}$

Jelas bahwa untuk $t = 0$, $\left[\dfrac{\partial u(r,s)}{\partial r} \right]_{\substack{r=x_i \\ s=y_j}} = \left[\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right]_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}}$

Jadi $u'(0) = h \dfrac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + k \dfrac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y}$

$$u''(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\partial u}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt} \right\}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial r}\frac{ds}{dt}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{d^2 r}{dt^2} +$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial s}\frac{dr}{dt}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$u''(t) = h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2hk \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial s} + k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

karena $\dfrac{d^2 r}{dt^2}$ dan $\dfrac{d^2 s}{dt^2}$ sama dengan nol.

Untuk $t = 0$ bentuk ini menjadi

$$u''(0) = h^2 \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial r^2} + 2hk \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial r\ \partial s} + k^2 \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial s^2}$$

atau

$$u''(0) = h^2 \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x\ \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2}$$

Dengan cara seperti di atas diperoleh

$$u'''(0) = h^3 \frac{\partial^3 u(x_i,y_j)}{\partial x^3} + 3h^2k \frac{\partial^3 u(x_i,y_j)}{\partial x^2\, \partial y} + 3hk^2 \frac{\partial^3 u(x_i,y_j)}{\partial x\, \partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3 u(x_i,y_j)}{\partial y^3}$$

sehingga dapat juga ditentukan untuk $u^{(n)}(0)$.

Pandang operator $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)$

$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x_i,y_j)$ berarti $h \frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial x} + k \frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y}$.

Demikian juga

$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u(x_i,y_j)$ berarti $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x_i,y_j)$ atau $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(h \frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial x} + k \frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y} \right)$ atau

$$h^2 \frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x\, \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2}$$

Secara umum diperoleh bentuk :

$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u(x_i,y_j) = h^n \frac{\partial^n u(x_i,y_j)}{\partial x^n} + n\, h^{(n-1)}k \frac{\partial^n u(x_i,y_j)}{\partial x^{(n-1)} \partial y} + \ldots + k^n \frac{\partial^n u(x_i,y_j)}{\partial y^n}$ dan ini sama dengan $u^{(n)}(0)$.

Jadi deret (2.1) menjadi

$$u(x_i+ht, y_j+kt) = u(x_i, y_j) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right) u(x_i, y_j)\ t\ +$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u(x_i, y_j) \frac{t^2}{2!} + \ \ldots\ +$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^n u(x_i, y_j) \frac{t^n}{n!} + R_n$$

dengan $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Untuk $t = 1$ diperoleh

$$u(x_i+h, y_j+k) = u(x_i, y_j) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right) u(x_i, y_j) + \ \ldots$$

$$+ \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \frac{u(x_i, y_j)}{n!} + R_n$$

dengan $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$

Jadi $u(x_i+h, y_j+k) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \frac{u(x_i, y_j)}{n!}$

Deret Taylor untuk $u(x,y)$ ini dapat digunakan untuk mencari pendekatan-pendekatan selisih untuk turunan-turunan parsial orde pertama dan kedua terhadap x atau y . Misal pendekatan selisih untuk turunan parsial orde pertama dan kedua terhadap x dapat diperoleh dari 2 persamaan dimana $\Delta x = h$ dan $\Delta x = -h$ dengan $\Delta y = 0$, yaitu :

$$u(x_i+h, y_j) = u(x_i, y_j) + h\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{1}{3!} h^3 \frac{\partial^3 u(x_i, y_j)}{\partial x^3} + \ \ldots$$

$$u(x_i-h,y_j) = u(x_i,y_j) - h\,\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial x} + \frac{1}{2!}\,h^2\,\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2} - \frac{1}{3!}\,h^3\,\frac{\partial^3 u(x_i,y_j)}{\partial x^3} + \dots$$

$$u(x_i+h,y_j) - u(x_i-h,y_j) = 2h\,\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial x} + \frac{1}{3!}h^3\,\frac{\partial^3 u(x_i,y_j)}{\partial x^3} + \dots$$

$$\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial x} = \frac{1}{2h}\left[\,u(x_i+h,y_j) - u(x_i-h,y_j)\,\right] + O\,(h^2)$$

dimana $O(h^2)$ adalah kesalahan pemotongan yang berorde h^2. Persamaan ini merupakan pendekatan selisih terpusat (diferensi sentral) untuk turunan pertama.

Jika $u(x_i+h,y_j)$ + $u(x_i-h,y_j)$ akan diperoleh pendekatan selisih untuk turunan kedua.

$$u(x_i+h,y_j) + u(x_i-h,y_j) = 2\;u(x_i,y_j) + h^2\,\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2} + \frac{2}{4!}\,h^4\,\frac{\partial^4 u(x_i,y_j)}{\partial x^4} + \dots$$

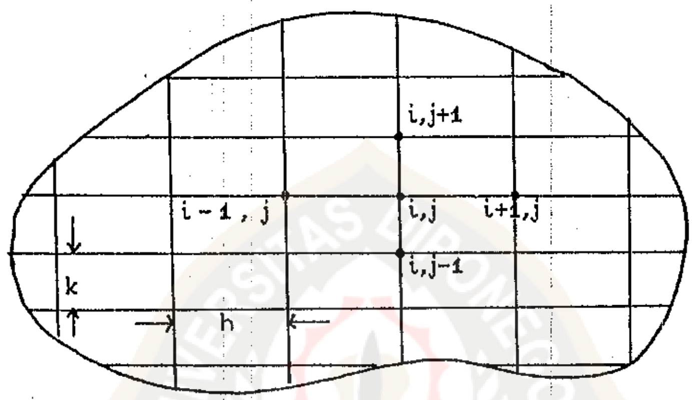
$$\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\left[\,u(x_i+h,y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_i-h,y_j)\right] + O(h^2)$$

Dengan cara yang sama pendekatan selisih untuk turunan parsial orde pertama dan kedua terhadap y dapat diperoleh dari 2 persamaan dimana $\Delta y = k$ dan $\Delta y = -k$ dengan $\Delta x = 0$ sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y} = \frac{1}{2k}\left[\,u(x_i,y_j+k) - u(x_i,y_j-k)\,\right] + O(k^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2} = \frac{1}{k^2}\left[u(x_i,y_j+k)-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_j-k) \right] +O(k^2)$$

Titik kisi - kisi yang digunakan untuk mendapatkan pendekatan selisih untuk turunan orde pertama dan kedua dapat digambarkan sebagai berikut, dimana i,j mempunyai koordinat (x_i,y_j).



Gambar 2.5

2.4. PERMUTASI BILANGAN ASLI

DEFINISI 2.16

Barisan bilangan-bilangan $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ dimana berlaku $j_i \neq j_k$ untuk $i \neq k$ (i dan k = 1,2,...,n) serta j_i salah satu dari bilangan asli (1,2,...,n) disebut suatu permutasi bilangan asli.

CONTOH 2.11

Permutasi (2,3,1,4,5)

DEFINISI 2.17

Apabila kita mempunyai n buah bilangan asli 1,2,...,n maka banyaknya permutasi yang dapat dibentuk $n! = n.(n-1).(n-2) \ldots 2.1$

CONTOH 2.12

$n = 3$, maka terdapat $3! = 3.2.1 = 6$ buah permutasi yaitu

(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(3,1,2),(2,3,1),(3,2,1)

DEFINISI 2.18

Inversi pada suatu permutasi $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ adalah adanya j_k mendahului j_i jika $j_k > j_i$ (i dan k = 1,2,...,n).

CONTOH 2.13

Permutasi $\begin{array}{cccc}(4 , & 3 , & 1 , & 2) \\ j_1 & j_2 & j_3 & j_4\end{array}$

Inversi pada permutasi di atas adalah

(1) $j_1 = 4$ mendahului $j_2 = 3$ dan $4 > 3$

(2) $j_1 = 4$ mendahului $j_3 = 1$ dan $4 > 1$

(3) $j_1 = 4$ mendahului $j_4 = 2$ dan $4 > 2$

(4) $j_2 = 3$ mendahului $j_3 = 1$ dan $3 > 1$

(5) $j_2 = 3$ mendahului $j_4 = 2$ dan $3 > 2$

DEFINISI 2.19

Banyaknya inversi suatu permutasi $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ adalah banyaknya inversi yang terjadi pada permutasi tersebut.

CONTOH 2.14

Pandang contoh 2.13

Banyaknya inversi pada permutasi (4,3,1,2) ada lima.

DEFINISI 2.20

Jika banyaknya inversi suatu permutasi adalah bilangan ganjil maka disebut permutasi ganjil dan dalam hal lain disebut permutasi genap.

CONTOH 2.15

Permutasi (4,3,1,2) adalah ganjil karena banyaknya inversi adalah 5.

DEFINIFI 2.21

Misalkan $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ suatu permutasi maka TANDA (SIGN) dari permutasi tersebut ditulis $o(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ adalah

$$o(j_1,j_2,\ldots,j_n) = +1, \text{ bila } (j_1,j_2,\ldots,j_n) \text{ genap },$$
$$= -1, \text{ bila } (j_1,j_2,\ldots,j_n) \text{ ganjil.}$$

2.5. MATRIKS DAN DETERMINAN

DEFINISI 2.22

Matriks adalah sekumpulan bilangan yang disusun dalam sebuah empat persegi panjang secara teratur di dalam baris-baris dan kolom-kolom.

CONTOH 2.16

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks A mempunyai ordo (mxn).

DEFINISI 2.23

Sebuah matriks disebut matriks bujur sangkar jika banyaknya baris (m) sama dengan banyaknya kolom (n) atau m = n.

CONTOH 2.17

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ adalah matriks bujur sangkar 3×3

DEFINISI 2.24

Matriks transpose dari matriks $A = (a_{ij})$ berukuran $(m\times n)$ adalah matriks A^T berukuran $(n\times m)$ yang didapatkan dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A , $i=1,2,3,\ldots,m$ sebagai kolom ke-i dari A^T.

CONTOH 2.18

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 & 8 \\ 5 & 3 & -4 & 4 \\ 6 & -4 & -5 & -12 \end{bmatrix}$$, matriks transposenya

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & -5 \\ 8 & 4 & -12 \end{bmatrix}$$

DEFINISI 2.25

Matriks simetris adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri, $A = A^T$ atau $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j.

Jelas bahwa matriks simetris adalah bujur sangkar.

CONTOH 2.19

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

maka A adalah matriks simetris.

DEFINISI 2.26

Matriks diagonal adalah matriks yang semua unsur di atas dan di bawah diagonal utama adalah nol.

CONTOH 2.20

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

DEFINISI 2.27

Matriks identitas (satuan) adalah matriks diagonal yang elemen-elemen diagonal utamanya semua = 1 dengan perkataan lain (a_{ij}) adalah matriks identitas bila $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$. Matriks identitas ditulis dengan I atau I_n , dimana n menunjukkan ukuran matriks bujur sangkar.

CONTOH 2.21

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DEFINISI 2.28

Matriks C (nxn) disebut diagonal dominan secara tepat jika nilai mutlak masing-masing elemen diagonal utama lebih besar dari jumlah nilai mutlak elemen yang selebihnya pada baris yang sama atau

$$|c_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |c_{ij}| \quad , i = 1,2,\ldots,n$$

CONTOH 2.22

$$C = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 5 & 12 & -4 \\ 4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

adalah matriks diagonal dominan karena

$|7| > |-2| + |3|$

$|12| > |5| + |-4|$

$|-6| > |4| + |1|$

Pandang matriks bujur sangkar A berordo n x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

DEFINISI 2.29

Determinan dari matriks bujur sangkar A berordo n adalah jumlah dari semua n! hasil kali bertanda dari elemen-elemen matriks A tersebut.

Dengan perkataan lain

$$|A| = \sum o(j_1, j_2, \dots, j_n)\ a_{1j_1} . a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

CONTOH 2.23

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka terdapat n! = 2! = 2.1 = 2 hasil kali sebagai berikut

(1) $a_{11}\ a_{22}$, permutasi (1,2) , banyaknya inversi = 0

(permutasi genap) maka $o(1,2) = +1$

(2) $a_{12}\ a_{21}$, permutasi (2,1) , banyaknya inversi = 1

(permutasi ganjil) maka $o(2,1) = -1$

Jadi $|A| = + a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}$

DEFINISI 2.30

Submatriks M_{ij} dari A adalah suatu matriks dengan ukuran $(n-1)\times(n-1)$ dimana baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dihilangkan.

CONTOH 2.24

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ maka } M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

DEFINISI 2.31

Minor dari matriks A adalah $|M_{ij}|$.

CONTOH 2.25

Pandang contoh 2.24

$|M_{32}| = 4 - 6 = -2$

DEFINISI 2.32

Kofaktor dari elemen a_{ij} (C_{ij}) pada matriks A adalah $(-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$.

CONTOH 2.26

Pandang contoh 2.24

$C_{32} = (-1)^{3+2}\,|M_{32}| = (-1).(-2) = 2$

DEFINISI 2.33

Matriks adjoint dari A adalah transpose dari matriks (C_{ij}).

$$\text{adj }(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

CONTOH 2.27

Pandang contoh 2.24

$C_{11} = 1$, $C_{12} = -10$, $C_{13} = 7$

$C_{21} = 1$, $C_{22} = 4$, $C_{23} = -3$

$C_{31} = -1$, $C_{32} = 2$, $C_{33} = -1$

Jadi

$$\text{adj }(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Dengan penguraian (ekspansi) baris dan kolom suatu matriks bujur sangkar dapat dihitung determinannya. Determinan suatu matriks = jumlah perkalian elemen-elemen sebarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya (C_{ij}). Dengan perkataan lain :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

dengan sebarang i disebut uraian baris ke-i.

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$$

dengan sebarang j disebut uraian kolom ke-j.

Apabila $|A| \neq 0$ maka A mempunyai invers.

CONTOH 2.28

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Dengan menguraikan kolom ke-1 diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \mid M_{11} \mid = + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \mid M_{21} \mid = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \mid M_{31} \mid = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

Jadi $\mid A \mid = a_{11} C_{11} + a_{21} C_{21} + a_{31} C_{31}$

$= 1 \,.\, 1 + 2 \,.\, 1 + 1 \,.\, (-1) = 2$

Dengan pertolongan matriks adjoint dan determinan suatu matriks dapat dicari invers suatu matriks dengan rumus

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} \quad \text{dengan } |A| \neq 0$$

CONTOH 2.29

Pandang contoh 2.28

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3.5 & -1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

2.6. SISTIM PERSAMAAN LINIER

Pandang sistim persamaan linier berikut :

$$\begin{matrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{matrix} \quad \ldots\ldots(2.2)$$

Persamaan (2.2) dapat disajikan dalam bentuk matriks $\mathbb{A}\ X = \mathbb{B}$, dimana

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$ adalah matriks koefisien sistim persamaan linier.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ adalah matriks kolom dari variabel x suatu sistim persamaan linier.

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ adalah matriks kolom dari konstanta $\mathbb{B}$ suatu sistim persamaan linier.

DEFINISI 2.34

Sistim persamaan linier m x n adalah suatu sistim yang mempunyai m persamaan linier dan n bilangan tak diketahui dimana a_{ij} adalah bilangan riil yang tidak semuanya nol, $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$.

CONTOH 2.30

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

DEFINISI 2.35

$(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$ disebut solusi dari sistim persamaan linier m x n apabila memenuhi persamaan (2.2) atau

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ r_j = b_i \quad , \quad i = 1,2,3,\ldots,m$$

CONTOH 2.31

Pandang contoh 2.30

(1 , 2 , 3) adalah solusi dari sistim persamaan linier di atas, karena

1 . 1 + 1 . 2 + 2 . 3 = 9

2 . 1 + 4 . 2 - 3 . 3 = 1

3 . 1 + 6 . 2 - 5 . 3 = 0

Apabila b_i = 0 maka sistim persamaan linier disebut homogen namun bila $b_i \neq 0$ maka sistim persamaan linier disebut non homogen.

Untuk mencari solusi sistim persamaan linier non homogen dengan banyaknya persamaan sama dengan banyaknya perubah dapat digunakan 2 metode, yaitu :

1. Metode langsung.

   Metode ini menghasilkan solusi yang eksak setelah sejumlah langkah-langkah yang berhingga.

   Misal : Aturan Cramer.

2. Metode tidak langsung atau metode iteratif.

   Metode ini memberikan serangkaian solusi pendekatan yang konvergen setelah sejumlah langkah yang cenderung tak berhingga.

   Misal : Metode Gauss Seidel.

Untuk menyelesaikan sistim persamaan linier non homogen derajat besar dan banyak koefisien yang merupakan nol, metode iterasi lebih baik.

2.6.1. ATURAN CRAMER.

THEOREMA 2.3 (Aturan Cramer)

Jika $\mathbb{A}\,X = \mathbb{B}$ adalah sistim yang terdiri dari n persamaan linier dalam n bilangan tak diketahui sehingga $|\mathbb{A}| \neq 0$, maka sistim tersebut mempunyai pemecahan yang unik. Pemecahan ini adalah

$$x_1 = \frac{|\mathbb{A}_1|}{|\mathbb{A}|} \quad , \quad x_2 = \frac{|\mathbb{A}_2|}{|\mathbb{A}|} \quad , \ \ldots , \quad x_n = \frac{|\mathbb{A}_n|}{|\mathbb{A}|}$$

dimana $\mathbb{A}_j$ ($j = 1,2,\ldots,n$) adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti elemen-elemen dalam kolom ke-j dari $\mathbb{A}$ dengan elemen-elemen dalam matriks

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

BUKTI :

Jika $|\mathbb{A}| \neq 0$ maka $\mathbb{A}$ mempunyai invers (dapat dibalik) dan $X = \mathbb{A}^{-1}\,\mathbb{B}$ adalah pemecahan unik dari $\mathbb{A}\,X = \mathbb{B}$. Sehingga dengan rumus invers suatu matriks

$$X = \mathbb{A}^{-1}\,\mathbb{B} = \frac{1}{|\mathbb{A}|}\ \mathrm{adj}(\mathbb{A}).\,\mathbb{B}$$

$$= \frac{1}{|\mathbb{A}|} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \ldots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \ldots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Dengan mengalikan matriks-matriks ini akan memberikan

$$X = \frac{1}{|\mathbb{A}|} \begin{bmatrix} b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \ldots + b_n C_{n1} \\ b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \ldots + b_n C_{n2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ b_1 C_{1n} + b_2 C_{2n} + \ldots + b_n C_{nn} \end{bmatrix}$$

Elemen dalam baris ke-j dari X adalah

$$x_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \ldots + b_n C_{nj}}{|\mathbb{A}|}$$

Sekarang misalkanlah

$$\mathbb{A}_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Karena $\mathbb{A}_j$ berbeda dari $\mathbb{A}$ hanya dalam kolom ke-j maka kofaktor dari elemen-elemen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dalam $\mathbb{A}_j$ adalah sama seperti kofaktor dari elemen-elemen yang bersesuaian dalam kolom ke-j dari $\mathbb{A}$. Ekspansi kofaktor $|\mathbb{A}_j|$ sepanjang kolom ke-j dengan demikian adalah

$$|\mathbb{A}_j| = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \ldots + b_n C_{nj}$$

sehingga terbukti bahwa

$$x_j = \frac{|\mathbb{A}_j|}{|\mathbb{A}|} \qquad , \ j = 1, 2, \ldots, n$$

CONTOH 2.32

$$\begin{aligned} 20x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - 10x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 &= 18 \end{aligned}$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 20 & 1 & -1 \\ 1 & -10 & 1 \\ -1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 17 & 1 & -1 \\ 13 & -10 & 1 \\ 18 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 20 & 17 & -1 \\ 1 & 13 & 1 \\ -1 & 18 & 10 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{A}_3 = \begin{bmatrix} 20 & 1 & 17 \\ 1 & -10 & 13 \\ -1 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

Maka

$$x_1 = \frac{|\mathbb{A}_1|}{|\mathbb{A}|} = \frac{-2022}{-2022} = 1$$

$$x_2 = \frac{|\mathbb{A}_2|}{|\mathbb{A}|} = \frac{2022}{-2022} = -1$$

$$x_3 = \frac{|\mathbb{A}_3|}{|\mathbb{A}|} = \frac{-4044}{-2022} = 2$$

2.6.2. METODE GAUSS SEIDEL

Pandang sistim persamaan linier nxn

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

mempunyai persis satu pemecahan dan elemen diagonal utama $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ merupakan bilangan tak nol. Persamaan di atas dapat ditulis kembali dalam bentuk :

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}\,x_2 - a_{13}\,x_3 - \dots - a_{1n}\,x_n}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}\,x_1 - a_{23}\,x_3 - \dots - a_{2n}\,x_n}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}\,x_k - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}\,x_k}{a_{ii}} \quad , \; i = 1.2,\dots,n$$

Langkah pertama diawali dengan menetapkan aproksimasi awal untuk x_1 , x_2 , ... , x_n dan setiap langkah dihitung aproksimasi baru untuk x_1 , x_2 , ... , x_n dari harga sebelumnya. Namun nilai x yang baru ini tidak semuanya dihitung secara simultan, mula-mula x_1 yang diperoleh dari persamaan pertama , kemudian x_2 yang diperoleh dari persamaan kedua, selanjutnya x_3 dan demikian seterusnya. Nilai x yang baru umumnya lebih dekat terhadap pemecahan eksak. Iterasi ke (p+1) dapat ditulis dalam bentuk :

$$x_i^{(p+1)} = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}\,x_k^{(p+1)} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}\,x_k^{(p)}}{a_{ii}}$$

dimana i = 1,2,...,n dan p = 0,1,2,...

Persamaan ini digunakan untuk memperbaiki aproksimasi suatu solusi sampai nilai yang tepat untuk nilai yang tidak diketahui itu diperoleh atau sampai sejumlah iterasi namun tidak memperbaiki taksiran suatu solusi yang disebut berdivergen.

Test untuk menentukan ketepatan dari suatu solusi dalam pengulangan yang berhasil apabila :

$$\varepsilon_s = \left| x_i^{(p+1)} - x_i^{(p)} \right| < \varepsilon \quad \text{untuk } i = 1,2,\ldots,n \quad p = 0,1,2,\ldots$$

dimana ε adalah standar kesalahan yang dapat diterima.

DEFINISI 2.36

Suatu aproksimasi disebut berkonvergen apabila dengan melakukan iterasi yang jumlahnya memadai, solusi dapat diperoleh hingga mencapai derajat ketelitian yang diinginkan.

THEOREMA 2.4

Untuk $n \geq 2$, jika $\mathbb{A} = (a_{ij})$ matriks nxn yang riil, tidak tereduksi dan diagonal dominan secara tepat maka untuk setiap pilihan aproksimasi awal, metode Gauss Seidel berkonvergensi terhadap pemecahan $\mathbb{A}\ X = \mathbb{B}$

CONTOH 2.33

Pandang contoh 2.32 dengan $\varepsilon = 0.00001$

Persamaannya dapat ditulis kembali sebagai

$x_1 = 0.850 - 0.05\ x_2 + 0.05\ x_3$ .... (1)

$x_2 = -\ 1.3 + 0.1\ x_1 + 0.1\ x_3$ .... (2)

$x_3 = 1.8 + 0.1\ x_1 - 0.1\ x_2$ .... (3)

Iterasi pertama dari metode Gauss Seidel yaitu dengan memasukkan aproksimasi awal $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ ke dalam persamaan pertama sehingga diperoleh perkiraan baru $x_1=0.850$, kemudian dengan x_1 baru ini $x_1=0.850$, $x_2=0$, $x_3=0$ dimasukkan ke dalam persamaan kedua diperoleh perkiraan baru $x_2 = -1.215$ dan selanjutnya $x_1=0.850$, $x_2= -1.215$, $x_3=0$ dimasukkan ke dalam persamaan ketiga diperoleh perkiraan baru $x_3=2.0065$. Jadi pada akhir iterasi pertama aproksimasi baru tersebut adalah

$x_1 = 0.850$, $x_2 = -1.215$, $x_3 = 2.0065$

Untuk iterasi berikutnya dapat dilihat pada tabel di bawah ini

	Aproksimasi awal	Iterasi pertama	ε_s	Iterasi kedua	ε_s	Iterasi ketiga
x_1	0	0.850	0.850	1.01108	0.16108	0.99995
x_2	0	-1.215	1.215	-0.99824	0.21676	-0.99992
x_3	0	2.0065	2.0065	2.00093	0.00557	2.00000

ε_s	Iterasi keempat	ε_s	Iterasi kelima	ε_s
0.01113	1.00000	0.00005	1.00000	0.00000
0.00168	-1.00000	0.00008	-1.00000	0.00000
0.00093	2.00000	0.00000	2.00000	0.00000

Tabel 2.1 Iterasi Gauss Seidel

Terlihat bahwa $\varepsilon_s < \varepsilon$ sehingga solusi untuk sistim persamaan linier di atas yaitu :

$x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$

2.7. PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

DEFINISI 2.37

Persamaan diferensial adalah persamaan yang didalamnya terdapat turunan-turunan serta hubungan antara variabel bebas dan variabel tak bebas.

CONTOH 2.34

1. $$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2 + \frac{dy}{dx} = x^2$$

2. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Ditinjau dari banyaknya variabel bebas, persamaan diferensial dibedakan menjadi 2 yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

DEFINISI 2.38

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat variabel bebas yang tunggal dan turunannya merupakan turunan biasa.

CONTOH 2.35

Pandang contoh 2.34 , persamaan 1 adalah persamaan diferensial biasa.

DEFINISI 2.39

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat paling sedikit dua variabel bebas dan turunannya merupakan turunan parsial.

CONTOH 2.36

Pandang contoh 2.34 , persamaan 2 adalah persamaan diferensial parsial.

DEFINISI 2.40

Tingkat (orde) persamaan diferensial adalah turunan tertinggi yang timbul pada persamaan diferensial tersebut.

DEFINISI 2.41

Derajat (degree) persamaan diferensial adalah pangkat turunan tertinggi dari persamaan diferensial tersebut.

CONTOH 2.37

Pandang contoh 2.34

Persamaan 1 mempunyai tingkat 3 dan derajat 1.

Persamaan 2 mempunyai tingkat 2 dan derajat 1.

DEFINISI 2.42

Persamaan diferensial parsial linier adalah persamaan diferensial parsial yang berderajat satu.

CONTOH 2.38

$$(x^2+y^2)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2x\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 5xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + x^3\frac{\partial z}{\partial x} + yz = e^{x+y}$$

DEFINISI 2.43

Solusi dari suatu persamaan diferensial parsial adalah sebuah fungsi dari variabel bebas yang memenuhi suatu persamaan diferensial.

Solusi umum dari persamaan diferensial parsial terdiri dari konstanta-konstanta sebarang atau fungsi-fungsi sebarang.

CONTOH 2.39

Solusi umum dari

$y\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x} = z$ adalah $\phi(xy, \frac{y}{z}) = 0$, ϕ fungsi sebarang.