BAB III

MASALAH STRUM LIOUVILLE DAN NILAI EIGENNYA

3.1. MASALAH STRUM LIOUVILLE

Masalah Strum liouville sebagai masalah nilai eigen adalah persamaan differensial orde dua dengan syarat batas pada dua titik yang dinyatakan dalam persamaan

$$Ly + \lambda r(x)y = 0 \qquad a \le x \le b \qquad (3.1)$$

dengan r(x) fungsi real, kontinu dan positif pada interval [a,b] dan λ suatu parameter, disertai syarat batas pada x = a dan x = b

$$L = \frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x)$$

dengan $\frac{dp}{dx}$, q(x) fungsi real dan kontinu pada [a,b] sedang p positif pada interval [a,b]

Masalah ini selalu mempunyai penyelesaian y = 0 yang disebut penyelesaian trivial, penyelesaian yang tak trivial tidak diperoleh untuk setiap λ.

Nilai λ yang memberikan penyelesaian tak trivial yang disebut nilai eigen operator L dan penyelesaian tak trivial yang berkaitan dengan nilai eigen λ tersebut dinamakan fungsi eigen operator L yang berkaitan dengan nilai eigen λ.

Definisi 3.1.1

Operator L disebut Simetri jika perkalian skalar

$$\langle L y_1 , y_2 \rangle = \langle y_1 , L y_2 \rangle$$

untuk setiap y_1, y_2 merupakan fungsi-fungsi yang diperkenankan terhadap perkalian skalar

$$\langle y_1 , y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x)\, y_2(x) dx \quad , a \le x \le b \qquad (3.2)$$

Definisi 3.1.2

Perkalian skalar (y_1 , y_2) dari dua fungsi berharga real y_1 dan y_2 pada interval [a,b] didefinisikan sebagai

$$\langle y_1 , y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x)\, y_2(x)\, dx$$

dan fungsi $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ dikatakan orthogonal pada $a \le x \le b$ jika

$$\int_a^b y_1(x)\, y_2(x)\, dx = 0$$

Apabila diberikan persamaan differensial orde dua dengan bentuk

$$L y + \lambda r(x) y = 0 \text{ dengan } L = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

dengan λ merupakan nilai eigen / parameter dalam interval [a,b] dengan syarat batas

$$\alpha_1 y(a) + \alpha\ y_2'(a) = 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

maka untuk suatu operator L yang diberikan dapat dicari

$$(Ly_1)y_2 - y_1(Ly_2) = 0$$

dengan y_1, y_2 merupakan fungsi-fungsi yang kontinu dalam interval [a,b].

Contoh 3.1.1

Misal diberikan dua fungsi kontinu y_1 dan y_2 dalam interval [a,b] maka bila dibentuk perkalian skalar y_1 dan y_2, akan dibuktikan bahwa :

$$(Ly_1)\, y_2 - y_1(Ly_2) = 0$$

Bukti

$$\int_a^b ((Ly_1)y_2 - y_1(Ly_2))\, dx = \int_a^b \left[\left[\left(\frac{dp(x)}{dx} \quad \frac{d}{dx} + q(x)\right]y_1\right]y_2\right.$$

$$-y_1\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)\right)\, y_2\Big] \quad dx$$

$$= \int_a^b \left[\left\{\frac{d}{dx}\, p(x)\, \frac{dy_1}{dx} + q(x)\, y_1\right\} y_2\right.$$

$$\left. - y_1\left(\frac{d}{dx}\, p(x)\, \frac{dy_2}{dx}\right) + q(x)\, y_2\right) \quad \Big] \, dx$$

$$= \int_a^b \left[\left(p(x)y_1'\right)' + q(x)\, y_1\right]\, y_2$$

$$- y_1\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)y_1'\right] + q(x)y_1\right]y_2$$

$$= \int_a^b \left(\left[p(x)y_1'\right]' y_2 + q(x)y_1 y_2\right.$$

$$\left. - y_1 \left[p(x)y_2'\right]' - q(x)y_1 y_2\right) dx$$

$$= \int_a^b \left[\left(\left[p(x)y_1'\right]' y_2 + q(x)y_1 y_2\right) - y_1\left(\left[p(x)y_2'\right]' - q(x)\, y_1 y_2\right)\right]dx$$

$$= \int_a^b \left[\left(p'(x)y_1' + p(x)y_1''\right)y_2 - y_1\left(p'(x)y_2' + p(x)y_2''\right)\right]dx$$

$$= \int_a^b \left[\left(p'(x)y_1'y_2 + p(x)y_1'' y_2\right) - \left(p'(x)y_2'y_1 + p(x)y_2''y_1\right)\right]dx$$

$$= \int_a^b \left[p'(x)y_1'y_2 + p(x)y_1'' y_2 - p'(x)y_2'y_1 - p(x)y_2''y_1\right]dx$$

Dengan menambahkan $\left(p(x)y_1'y_2' - p(x)y_1' y_2'\right)$ di dapat

$$= \int_a^b \left[p'(x)y_1'y_2 + p(x)y_1'' y_2 + p(x)y_1'y_2' - p(x)y_1'y_2'\right.$$

$$\left. - p'(x)y_2'y_1 - p(x)y_2''y_1\right]dx$$

$$= \int_a^b \left[p'(x)\, y_1'y_2 + p(x)y_1''\, y_2 + p(x)y_1'y_2' \right] dx$$

$$- \int_a^b \left[p'(x)\, y_2'y_1 + p(x)y_2''y_1 + p(x)y_1'\, y_2' \right] dx$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)\, y_1'y_2\right) - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)y_1y_2'\right)dx$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)\, y_1'y_2 - p(x)y_1y_2'\right)dx$$

$$= p(x)\left(y_1(x)y_2 - y_1(x)y_2'(x)\right) \Big|_a^b$$

$$= p(b)\left(y_1'(b)y_2(b) - y_1(b)y_2'(b)\right) - p(a)\left(y_1'(a)y_2(a) - y_1(a)y_2'(a)\right)$$

$$= p(b)\left(- \frac{\beta_1}{\beta_2} y_1(b)y_2(b) + y_1(b)\frac{\beta_1}{\beta_2} y_2(b)\right)$$

$$- p(a)\left[-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \; y_1(a)y_2(a) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y_1(a)y_2(a)\right]$$

$$= \; p(b)\;(0) - p(a)\;(0)$$

$$= \quad 0 \qquad\qquad \text{dengan } \alpha_2 \neq 0 \text{ dan } \beta_2 \neq 0$$

jadi $\int_a^b \left[(Ly_1)\, y_2 - y_1(Ly_2)\right] dx = 0$

karena $\int_a^b \left[(Ly_1)\, y_2 - y_1(Ly_2)\right] dx = 0$

dan dari definisi(3.1.1)

maka dapat dipenuhi $(Ly_1)y_2 = y_1(Ly_2)$

atau

$$(Ly_1)y_2 - y_1(Ly_2) = 0$$

Theorema 3.1.1

Operator L dikatakan simetri jika dan hanya jika syarat batas memenuhi.

$$p\;(y_1y_2' - y_2y_1')\Big|_a^b = 0 \qquad \text{dalam interval } [a,b] \; .....(3.3)$$

Bukti :

Karena Operator L *simetri maka* $y_1(Ly_2) - (Ly_1)y_2 = 0$ akan dibuktikan

$$\int_a^b \left[y_1(Ly_2) - (Ly_1)y_2\right] dx = p(y_1y_2' - y_1'y_2)\Big|_a^b$$

$(\longrightarrow)$

$$\int^b \left[y_1(Ly_2) - (Ly_1)y_2 \right] dx = \int_a^b \left[y_1\left(\left(\frac{d}{dx}\ (p(x)\ \frac{d}{dx}) + q\ (x)\right]y_2\right] \right.$$

$$\left. - \left[\left(\frac{d}{dx}\ (p(x)\ \frac{d}{dx}) + q\ (x)\right]\ y_1\right]y_2 \right]\ dx$$

$$= \int_a^b \left[y_1\left(\frac{d}{dx}\ (p(x)\ \frac{dy_2}{dx}) + q\ (x)y_2\right) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{d}{dx}\ (p(x)\ \frac{dy_1}{dx}) + q\ (x)y_1\right]y_2 \right]\ dx$$

$$= \int_a^b \left[y_1\left(\frac{d}{dx}\ (p(x)y_2' + q\ (x)y_2\right) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{d}{dx}\ (p(x)\ \frac{dy_1}{dx})\right] + q_1(x)y_1\right]y_2 \right]\ dx$$

$$= \int_a^b \left[y_1\left((p(x)y_2'\right)' + q(x)y_1y_2 \right.$$

$$\left. - \left((p(x)y_1'\right]y_1' - q(x)y_1y_2 \right]\ dx$$

$$= \int_a^b \left[y_1\left((p'(x)y_2' + p(x)\ y_2''\right) \right.$$

$$\left. - \left((p'(x)y_1' + p(x)y_1''\right]y_2 \right]\ dx$$

$$= \int_a^b \left[p'(x)y_1y_2' + p(x)y_1y_2'' \right.$$

$$\left. - p'(x)y_1'y_2 - p(x)y_1''\ y_2\right]\ dx$$

dengan menambahkan $\left[p(x)y_1'y_2' - p(x)y_1'y_2'\right]$ didapat

$$= \int_a^b \left[p'(x)y_1y_2' + p(x)y_1y_2'' + p(x)y_1'y_2' \right.$$

$$\left. - p(x)y_1'y_2' - p'(x)y_1'y_2 - p(x)y_1''y_2\right]\ dx$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dx}\left(p\ y_1y_2'\right)dx - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(p\ y_1'y_2\right)dx$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dx} \left[p\, y_1 y_2' - p y_1' y_2 \right] dx$$

$$= p \left(y_1 y_2' - y_1' y_2 \right) \Big|_a^b$$

jadi $\int_a^b \left[y_1(Ly_2) - (Ly_1)y_2 \right] dx = p \left(y_1 y_2' - y_1' y_2 \right) \Big|_a^b$

karena $y_1(Ly_2) - (Ly_1)y_2 = 0$ maka

$$\int_a^b \left[y_1(Ly_2) - (Ly_1)y_2 \right] dx = 0$$

padahal $\int_a^b \left[y_1(Ly_2) - (Ly_1)y_2 \right] dx = 0$

maka

$$p \left(y_1 y_2' - y_1' y_2 \right) \Big|_a^b = 0$$

($\longleftarrow$)

Diketahui $p \left(y_1 y_2' - y_1' y_2 \right) \Big|_a^b = 0$

akan dibuktikan $p\left[y_1 y_2' - y_1' y_2\right] \Big|_a^b = \int_a^b \left[y_1(Ly_2) - (Ly_1)y_2 \right] dx$

$$p\left[y_1 y_2' - y_1' y_2\right] \Big|_a^b = \int_a^b \frac{d}{dx} \left[p\, y_1 y_2' \right] dx - \int_a^b \frac{d}{dx} \left[p\, y_1' y_2 \right] dx$$

$$= \int_a^b \Big[p'(x) y_1 y_2' + p(x) y_1 y_2'' + p(x) y_1' y_2'$$

$$- p(x) y_1' y_2' - p'(x) y_1' y_2 - p(x) y_1'' y_2 \Big] dx$$

$$= \int_a^b \Big[p'(x) y_1 y_2' + p(x) y_1 y_2''$$

$$- p(x)y_1'y_2 - p(x)y_2''\Big]dx$$

$$= \int_a^b \Big[y_1\big[p'(x)y_2' + p(x)y_2''\big]$$

$$- \big[p'(x)y_1' + p(x)y_1''\big]y_2\Big]dx$$

$$= \int_a^b \Big[y_1(py_2')' - (py_1')'y_2\Big]dx$$

dengan menambahkan $\Big[q(x)y_1y_2 - q(x)y_1y_2 \Big]$ didapat

$$= \int_a^b \Big[y_1\big[p\ y_2'\big]' + q(x)y_1y_2 - \big[p\ y_1'\big]'y_2 - q(x)y_1y_2\Big]dx$$

$$= \int_a^b \Big[y_1\Big(\big[p\ y_2'\big]' + q(x)y_2\Big) - \Big(\big[p\ y_1'\big]' + q(x)y_1\Big)y_2\Big]dx$$

$$= \int_a^b \Big[y_1\Big(\frac{d}{dx}\ (p(x)y_2'\Big) + q(x)\ y_2\Big) - \Big(\frac{d}{dx}p(x)y_1'\Big) + q(x)y_1\Big)y_2\Big]dx$$

$$= \int_a^b \Big[y_1\Big(\frac{d}{dx}\ p(x)\frac{dy_2}{dx}\Big) + q(x)y_2\Big) - \Big(\frac{d}{dx}\ p(x)\frac{dy_1}{dx} + q(x)y_1\Big)y_2\Big]dx$$

$$= \int_a^b \Big[y_1\Big(\frac{d}{dx}\ p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\Big)y_2 - \Big(\frac{d}{dx}\ p(x)\frac{d}{dx} + q(x)y_1\Big)y_2\Big]dx$$

$$= \int_a^b \Big[\ y_1(Ly_2) - (Ly_1)y_2\Big]dx$$

jadi $p\Big[y_1y_2' - y_1'y_2\Big]\Big|_a^b = \int_a^b \Big[y_1(Ly_2) - (Ly_1)y_2\Big]dx$

Karena diketahui $p\Big[y_1y_2' - y_1'y_2\Big]\Big|_a^b = 0$

maka $\int_a^b \Big[y_1(Ly_2) - (Ly_1)y_2\Big]dx = 0$

$$\int_a^b y_1(Ly_2)dx - \int_a^b (Ly_1)y_2\, dx = 0$$

$$\langle y_1, Ly_2\rangle - \langle Ly_1, y_2\rangle = 0$$

atau $\langle y_1, Ly_2\rangle = \langle Ly_1, y_2\rangle$

dari definisi (3.1.1) maka L simetri.

Dari teorema (3.1.1) diperoleh beberapa syarat batas yang mengakibatkan operator L simetri yaitu :

(1) Untuk p(a) dan p(b) sebarang

$\alpha_1\, y(a) + \alpha_2 y'(a)=0$

$\beta_1\, y(b) + \beta_2 y'(b)=0$

dengan $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ bilangan real

$|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ dan $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$

(2) Untuk p(a)=p(b)

y(a)=y(b) dan y'(a)=y'(b)

(3) Untuk p(a)=p(b)=0

dapat diberikan syarat batas sebarang pada x=a dan x=b.

Definisi 3.1.3

Misalkan y_1 dan y_2 merupakan fungsi eigen dari operator L yang berkaitan dengan nilai eigen λ_1 dan λ_2 yang berbeda, maka fungsi eigen y_1 dan y_2 didefinisikan dengan perkalian skalar.

$$\langle y_1, y_2 \rangle_r = \int_a^b r(x)\ y_1(x)\ y_2(x)\ dx \qquad (3.4)$$

dengan r(x) merupakan fungsi pemberat dan perkalian skalar tersebut dikatakan orthogonal dalam [a,b] jika

$$\int_a^b r(x)\ y_1(x)\ y_2(x)\ dx = 0$$

Operator L ini bukan simetri terhadap perkalian skalar (3.4) akan tetapi simetri terhadap perkalian skalar (3.2).

<u>Theorema 3.1.2</u>

Jika operator L simetri maka setiap nilai eigen L adalah bilangan real.

<u>Bukti</u> :

Misalkan nilai eigen L berharga kompleks dengan $\lambda = u + iv$ jika λ nilai eigen maka $\bar{\lambda}$ juga nilai eigen. Misal y merupakan fungsi eigen L yang berkaitan dengan nilai eigen λ tersebut dan $\bar{y}$ adalah juga fungsi eigen L yang berkaitan dengan nilai eigen $\bar{\lambda}$.
karena operator L simetri, maka

$$\langle Ly, \bar{y} \rangle = \langle y, L\bar{y} \rangle$$

$$\langle -\lambda r(x)y, \bar{y} \rangle = \langle y, -\lambda r(x)\bar{y} \rangle$$

$$\int_a^b -r(x)\lambda\ y(x)\ \overline{y}(x)\ dx = \int_a^b -\overline{\lambda} r(x)\ y(x)\ \overline{y}(x)\ dx$$

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b r(x)\lambda\ y(x)\ \overline{y}(x)\ dx = 0$$

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b r(x)|\ y(x)|^2\ dx = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{karena } r(x) > 0 \\ y(x) \neq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow |\ y(x)\ |^2 > 0$$

maka

$$\int_a^b r(x)\ |\ y(x)|^2\ dx \neq 0$$

berarti $(\lambda - \overline{\lambda}) = (u + iv) - (u - iv) = 0$

$$(u - u) + i(2v) = 0$$

$$v = 0$$

Karena $(\lambda - \overline{\lambda}) = 0 \longrightarrow \lambda = \overline{\lambda}$

Jadi λ bilangan real (terbukti)

<u>Theorema 3.1.3</u>

Misalkan operator L simetri jika $\lambda_1 \neq \lambda_2$ maka $<y_1, y_2>r$ orthogonal.

<u>Bukti :</u>

Karena operator L simetri maka

$<Ly_1, y_2> = <y_1, Ly_2>$

$<-\lambda_1 r(x)y_1, y_2> = <y_1, -\lambda_2 r(x)y_2>$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b r(x)\, y_1(x)\, y_2(x)\, dx = 0$$

karena $\lambda_1 \neq \lambda_2$ maka $\int_a^b r(x)\, y_1(x)\, y_2(x)\, dx = 0$

Dari definisi 3.1.3 maka $\langle y_1, y_2 \rangle_r$ orthogonal

Dengan demikian dapat kita katakan bahwa :

- Jika p atau r bernilai nol di x = a atau x = b maka persamaan differensial (3.1) dengan syarat batas di x = a dan x = b dinamakan masalah Sturm Liouville tipe singular.
- Jika p dan r positip pada [a,b] maka persamaan diferensial (3.1) dengan syarat batas di x = a dan x = b dinamakan masalah Sturm Liouville tipe tak singular.

Dan untuk pembahasan selanjutnya difokuskan pada masalah sturm Liouville tak singular.

3.2 NILAI EIGEN MASLAH STURM LIOUVILLE

Diberikan persamaan Sturm Liouville tak singular

$$Ly + \lambda r(x) y = 0 \qquad a \le x \le b \tag{3.6}$$

Menurut theorema (2.7.1) persamaan differensial (3.6) setara dengan persamaan differensial

$$\theta' = (\lambda r + q) \operatorname{Sin}^2 \theta + \frac{1}{p} \operatorname{Cos}^2 \theta \tag{3.7}$$

dan

$$\rho' = \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{p} - (\lambda r + q) \text{ Sin } 2\theta \right) \tag{3.8}$$

Jika trasnformasi Pruffer digunakan pada syarat batas persamaan differensial (3.6) maka syarat batas persamaan differensial yang setara tersebut akan terjadi dalam bentuk polar.

Sesuai dengan pembahasan dalam bab II dan dengan menuliskan persamaan (2.3.3) yaitu

$$\theta = \text{arc tg } \frac{y}{py'}$$

syarat batas persamaan differensial (3.7) pada $x = a$ akan terjadi

$$\theta_a = \text{arc tg } \frac{y(a)}{p(a)\, y'(a)} \qquad 0 \le \theta_a \le \pi$$

atau

$$y(a) \text{ Cos } \theta - p(a)\, y'(a) \text{ Sin } \theta = 0 \qquad 0 \le \theta \le \pi \tag{3.9}$$

dan syarat batas pada $x = b$ akan menjadi

$$y(b) \text{ Cos } \theta - p(b)\, y'(b) \text{ Sin } \theta = 0 \qquad 0 \le \theta \le \pi \tag{3.10}$$

Dalam pembahasan selanjutnya persamaan differensial (3.7) dibatasi hanya untuk syarat batas (3.9) dan (3.10).

Jika θ merupakan penyelesaian (3.7) maka persamaan differensial (3.8) mempunyai penyelesaian

$$\rho(x,\lambda) = \rho(a) \exp \frac{1}{2} \int_a^x \left[\left[\frac{1}{p} - (\lambda r + q) \right] \text{Sin } 2\theta \right] dt \tag{3.11}$$

dengan $\rho(a)$ merupakan nilai awal ρ di $x = a$. dan ditentukan oleh $\rho(a)^2 = y(a)^2 + (p(a)y'(a))^2$ menurut persamaan pertama transpormasi Pruffer

$$y(x,\lambda) = \rho(x,\lambda) \text{ Sin } \theta(x,\lambda)$$

penyelesaian $y(x,\lambda)$ bernilai nol hanya jika

Sin $\theta(x,\lambda) = 0$ atau $\theta(x,\lambda) = 0 \pmod \pi$

Jadi jika $y(x,\lambda)$ penyelesaian persamaan differensial (3.6) dengan syarat batas di $x = a$, maka menurut persamaan differensial (3.7) dan (3.8) akan dicari nilai λ sehingga memenuhi

$$y(a) \text{ Cos } \theta_a - p(a)\, y'(a) \text{ Sin } \theta_a = 0$$

nilai λ yang didapatkan dinamakan nilai dari masalah Sturm liouville.

Theorema 3.2.1

Persamaan differensial (3.6) dengan syarat batas (3.9) dan (3.10) mempunyai tak hingga nilai-nilai eigen λ_n, nilai nilai eigen tersebut membentuk barisan naik

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots \text{ dengan } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty \qquad (3.12)$$

fungsi eigen $y_n(x) = y(x,\lambda_n)$ yang berkaitan dengan λ_n nilai eigennya mempunyai tepat n titik nol dalam interval bika (a,b).

Bukti :

Keujudan barisan (3.12) dibuktikan dengan menggunakan sifat θ dan sifat $\theta(x,\lambda)$ yang merupakan fungsi naik terhadap parameter λ, menunjukkan adanya barisan naik.

Untuk $\lambda = \lambda_o$ memenuhi $\theta(b,\lambda_o) = \theta b$

$\lambda = \lambda_1$ " $\theta(b,\lambda_1) = \theta b + \pi$

$\lambda = \lambda_2$ " $\theta(b,\lambda_2) = \theta b + 2\pi$

:

dengan $\lambda = \lambda_n$ " $\theta(b,\lambda_n) = \theta b + n\pi$

untuk $= 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

persamaan (2.3.1) λ_n dan $y_n(x)$ dengan $y_n(x) = y(x,\lambda_n) = \rho(x,\lambda_n) \sin \theta(x,\lambda_n)$ merupakan pasangan nilai eigen dan fungsi eigen persamaan differensial (3.2.1) dengan syarat batas (3.9) dan (3.10) karena $0 < \theta b \leq \pi$ dan menurut theorema 2.4.3 maka fungsi y_n hanya memenuhi tepat n titik nol dalam interval buka (a,b).

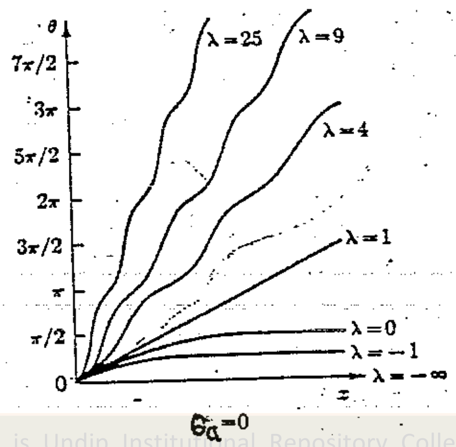
Bila $\lambda \neq \lambda_n$ maka $\theta(b,\lambda_n) \neq \theta b$

menurut theorema 2.4.6 diperoleh $\lim\limits_{\lambda\to\sim} \theta(x,\lambda) = \sim$

Jadi didapat barisan $\{\lambda_n\}$

$\lambda_o < \lambda_1 < \ldots\ldots < \lambda_n < \ldots.$ dengan $\lim\limits_{\lambda\to\sim} \lambda_n = \sim$

Contoh 3.2.1



gambar $\theta(x,\lambda)$ untuk $y''+ \lambda y = 0$

$$\frac{d\theta}{dx} = Q \sin^2\theta + \frac{1}{p} \cos^2\theta$$

untuk $Q > 0$ berarti $\frac{d\theta}{dx} > 0$

jika $\theta = (n + 1/2)\pi$

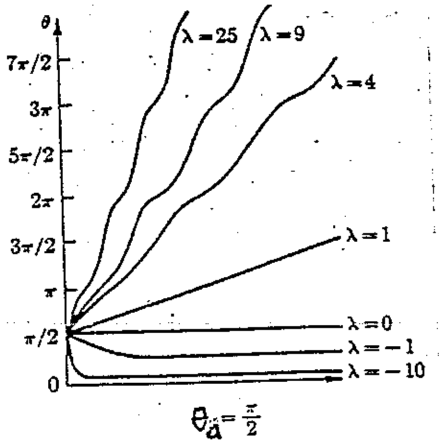
$n = 0,1,2,\ldots$

$\theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{d\theta}{dx} = Q(x,\lambda_o) > 0$ dengan $\lambda=\lambda_o$

$\theta = \frac{3\pi}{2} \longrightarrow \frac{d\theta}{dx} = Q(x,\lambda_1) > 0$ dengan $\lambda=\lambda_1$

$\theta = \frac{5\pi}{2} \longrightarrow \frac{d\theta}{dx} = Q(x,\lambda_2) > 0$ dengan $\lambda=\lambda_2$ dst

Contoh 3.2.2



gambar $\theta(x,\lambda)$ untuk $y''+\lambda y = 0$

$$\frac{d\theta}{dx} = Q \sin^2\theta + \frac{1}{p}\cos^2\theta$$

untuk $Q > 0$ berarti $\frac{d\theta}{dx} > 0$

jika $\theta = (n + 1/2)\pi$

$n = 0,1,2,\ldots$

$\theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{d\theta}{dx} = Q(x,\lambda_0) > 0$ dengan $\lambda=\lambda_0$

$\theta = \frac{3\pi}{2} \longrightarrow \frac{d\theta}{dx} = Q(x,\lambda_1) > 0$ dengan $\lambda=\lambda_1$

$\theta = \frac{5\pi}{2} \longrightarrow \frac{d\theta}{dx} = Q(x,\lambda_2) > 0$ dengan $\lambda=\lambda_2$ dst

3.3 FUNGSI GREEN DARI MASALAH STURM LIOUVILLE

Misalkan f kontinu pada interval [a,b] , akan dicari suatu fungsi Y sehingga memenuhi persamaan

$$LY + \lambda r(x)\, Y = f(x)\ , \qquad a \le x \le b \qquad (3.12)$$

dan syarat batas

$$Y(a)\cos\theta_a - p(a)\,Y'(a)\sin\theta_a = 0$$

untuk $x = a$; $0 \le \theta_a < \pi$

dan

$$Y(b)\cos\theta_b - p(b)\,Y'(b)\sin\theta_b = 0$$

untuk $x = b$; $0 < \theta_b \le \pi$

Akan ditunjukkan , jika λ bukan nilai eigen L maka persamaan (3.12) dengan syarat batas (3.9) dan (3.10) mempunyai penyelesaian yang dinyatakan secara tunggal sebagai

$$Y(t) = y(t,f:\lambda) = \int_a^b G(x,t;\lambda) f(x)\, dx.$$

dengan $G(x,t:\lambda)$ fungsi Green persamaan differensial

$Ly + \lambda r(x)\ y = 0$ dengan syarat batas (3.9) dan (3.10).

Pada persamaan differensial $Ly + \lambda r(x)\ y = 0$

Misalkan :

$y_a(x) = y_a\ (x,\lambda)$ merupakan penyelesaian yang memenuhi syarat batas pada $x = a$ (3.9).

$y_b(x) = y_b\ (x,\lambda)$ merupakan penyelesaian yang memenuhi syarat batas pada $x = b$ (3.10).

Theorema 3.3.1

i). jika λ suatu nilai eigen operator L maka y_a dan y_b bergantung linier

ii) jika λ bukan suatu nilai eigen operator L maka y_a dan y_b bebas linier.

Bukti :

i) Jika λ suatu eigen L, maka $y_1(x,\lambda)$ memenuhi syarat batas (3.9) dan (3.10) serta $y_2(x,\lambda)$ memenuhi syarat batas yang sama, jadi y_1 dan y_2 adalah penyelesaian atau fungsi-fungsi eigen L yang berkaitan dengan nilai eigen λ, sehingga dipenuhi kombinasi linier dengan konstanta-konstanta $C_1 \neq 0$ dan $C_2 \neq 0$ sedemikian hingga

$$C_1\ y_a(x) + C_2 y_b(x) = 0 \quad \Big| \text{ dikali } y_b'(x)$$
$$C_2\ y_a'(x) + C_2 y_b'(x) = 0 \quad \Big| \text{ dikali } y_b(x)$$

didapat

$$C_1\ y_a(x)\ y_b'(x) + C_2 y_b(x)\ y_b'(x) = 0$$
$$C_2\ y_a'(x)\ y_b(x) + C_2 y_b(x)\ y_b'(x) = 0$$
$$\overline{\hspace{8cm}} \ -$$
$$C_1(y_a(x)y_b'(x) - y_a'(x)y_b(x)\ ) = 0$$

analog dengan mengalikan $y_a'(x)$ dan $y_a(x)$ didapat

$$C_2\left[\ y_a(x)y_b'(x) - y_a'(x)y_b(x)\right] = 0$$

Karena untuk C_1 dan C_2 tidak nol maka didapat

$\left[\ y_a(x)\ y_b'(x) - y_a'(x)\ y_b(x)\ \right] = 0$ atau $W(y_a, y_b) = 0$

Karena $W(y_a, y_b) = 0$ maka y_a dan y_b bergantung linier.

ii) Pilih λ bukan suatu nilai eigen L

Andaikan y_a dan y_b bergantung linier berarti ada konstanta $C \neq 0$ sehingga memenuhi $y_b = Cy_a$ pada $[a,b]$ karena y_b memenuhi syarat batas (3.10) diperoleh

$$y_b \cos \theta_b - p(x)\ y_b' \sin \theta_b = 0$$

$$Cy_a(b) \cos \theta_b - p(b)\ Cy_a'(b) \sin \theta_b = 0$$

karena $C \neq 0$ maka $y_a(b) \cos \theta_b - p(b)\ y_a'(b) \sin \theta_b = 0$

Jadi y_a memenuhi syarat batas (3.9) dan (3.10) artinya y_a suatu fungsi eigen L dengan nilai eigen λ hal ini bertentangan dengan pengandaian serta dipilihnya λ bukan suatu nilai eigen L.

Jadi haruslah y_a dan y_b bebas linier.

Misalkan λ bukan nilai eigen λ, berarti $y_a(x)$ dan y_b (x) bebas linier, dengan demikian konstruksi fungsi Green pada 2.5 dapat dipergunakan yaitu mengganti q(x) dengan q(x) +

$\lambda r(x)$ atau $Ly = 0$ dengan $Ly + \lambda r(x)y = 0$ sehingga y_a dan y_b tergantung pada λ maka menurut (2.5.3) yaitu

$$p(x)\ \{\ y_b(x)\ y_a'(x) - y_a(x)\ y_b'(x)\ \} = K$$

dan K akan tergantung pada λ atau $K = K(\lambda)$

Jadi fungsi Green (2.5.4) dapat ditulis

$$G(x,t;\lambda)\quad \begin{cases} -y_a(x)y_b(t)/K & ,\ a \le x \le t \\ -y_b(x)\ y_a(t)/K & ,\ t \le x \le b \end{cases} \tag{3.13}$$

<u>Teorema 3.3.2</u>

Jika λ bukan suatu nilai eigen L maka $G = G(x,t;\lambda)$ adalah tunggal

<u>Bukti</u> :

Misalkan λ bukan suatu nilai eigen L

Andaikan ada dua fungsi green G_1 dan G dengan $G_1 \neq G$ sebagai fungsi dari x dan t

G_1 dan G masing-masing memenuhi persamaan

$$L\ G_1 + \lambda r\ G_1 = f(x)$$

dan

$$LG + \lambda rG = f(x)$$

Dari kedua fungsi Green tersebut maka

$$LG_1 + \lambda rG_1 = f(x)$$
$$LG + \lambda rG = f(x)$$
$$\overline{L(G_1 - G) + \lambda r\ (G_1 - G) = 0}$$

persamaan ini dengan (G_1 − G) merupakan suatu fungsi eigen L dengan nilai eigen λ

Jadi bertentangan dengan yang diketahui bahwa λ bukan nilai eigen L

maka haruslah $G_1 = G$

sehingga $G = G(x, t; \lambda)$ adalah tunggal

Theorema 3.3.3

Misalkan f(x) kontinu dalam interval [a, b]

Jika λ bukan nilai eigen L maka

$$Y(t) = y(t,f,\lambda) = \int_a^b G(x,t,\lambda)\ f(x) \qquad (3.14)$$

merupakan penyelesaian tunggal persamaan differensial

$$LY + \lambda r(x)Y = f(x) \quad a \le x \le b \qquad (3.15)$$

dengan syarat batas (3.9) dan (3.10)

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa Y(t) memenuhi persamaan differensial (3.15)

menurut (3.13) persamaan (3.14) menjadi

$$Y(t) = -\frac{1}{K}\int_a^t y_a(x)\ y_b(t)\ f(x)\ dx$$

$$- \frac{1}{K} \int_t^b y_b(x)\, y_a(t)\, f(x)\, dx \qquad (3.16)$$

jika persamaan (3.16) diturunkan terhadap t, maka

$$\frac{d\Upsilon(t)}{dt} = \Upsilon'(t) = - \frac{y_b'(t)}{K} \int_a^t y_a(x)\, f(x)\, dx$$

$$- \frac{1}{K}\, y_b(t)\, y_a(t)\, f(t)$$

$$- \frac{y_a'(t)}{K} \int_t^b y_b(x)\, f(x)\, dx$$

$$+ \frac{1}{K}\, y_a(t)\, y_b(t)\, f(t)$$

$$= - \frac{y_b'(t)}{K} \int_a^t y_a(x) f(x) dx - \frac{y_a'(t)}{K} \int_t^b y_b(x)\, f(x)\, dx$$

jika p(t) $\Upsilon'(t)$ diturunkan terhadap t diperoleh

$$\left(p(t)\, \Upsilon'(t) \right)' = \frac{d}{dx} \left[p(t) \left\{ - \frac{y_b'(t)}{K} \int_a^t y_a(x) f(x)\, dx \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{y_a'(t)}{K} \int_t^b y_b(x) f(x)\, dx \right\} \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \left[p(t) \; - \frac{y_b'(t)}{K} \int_a^t y_a(x) f(x)\, dx \right]$$

$$- \frac{d}{dx} \left[p(t) \frac{y_a'(t)}{K} \int_t^b y_b(x) f(x)\, dx \right\} \Big]$$

$$= - \left(p(t)\, y_b'(t) \right)' \frac{\int_a^t y_a(x)\, f(x)\, dx}{K}$$

$$\frac{- p(t)\, y_b'(t)\, y_a(t)\, f(t)}{K}$$

$$- \left[p(t)\, y_a'(t) \right]' \int_t^b \frac{y_b(x)\, f(x)\, dx}{K}$$

$$+ \frac{p(t)\, y_a'(t)\, y_b(t)\, f(t)}{K}$$

$$= - \left[p(t)\, y_b'(t) \right]' \int_a^t \frac{y_a(x)\, f(x)\, dx}{K}$$

$$- \left[p(t)\, y_a'(t) \right]' \int_t^b \frac{y_b(x)\, f(x)\, dx}{K}$$

$$\frac{p(t) \left[y_a'(t)\, y_b(t) - y_a(t)\, y_b'(t) \right] f(t)}{K}$$

$$= - \left[p(t)\, y_b'(t) \right]' \int_a^t \frac{y_a(x)\, f(x)\, dx}{K}$$

$$- \left[p(t)\, y_a'(t) \right]' \int_t^b \frac{y_b(x)\, f(x)\, dx}{K} + f(t)$$

$$= - \left[p(t)\, y_b'(t) \right]' \left[- \int_a^t \frac{y_a(x)\, f(x)\, dx}{K} \right]$$

$$+ \left[p(t)\, y_a'(t) \right]' \left[- \int_t^b \frac{y_b(x)\, f(x)\, dx}{K} \right] + f(t)$$

$$\left(p(t)\, Y'(t) \right)' = - \left[\lambda r(t) + q(t) \right] y_b(t) \left[- \int_a^t \frac{y_a(x) f(x) dx}{K} \right]$$

$$- \left[\lambda r(t) + q(t) \right] y_a(t) \left[\frac{ - \int_t^b y_b(x) f(x) dx}{K} \right] + f(x)$$

$$= - \left[\lambda r(t) + q(t) \right] \left\{ - \frac{y_b(t)}{K} \int_a^t y_a(x) f(x)\ dx - \frac{y_a(t)}{K} \int_t^b y_b(x) f(x)\ dx \right\} + f(t)$$

$$= - \left[\lambda r(t) + q(t) \right] Y(t) + f(t)$$

$$\left[p(t)\ Y'(t) \right]' + \left[\lambda r(t) + q(t) \right] Y(t) = f(t)$$

$$\left[p(t)\ Y'(t) \right]' + q(t)\ Y(t) + \lambda r(t)\ Y(t) = f(t)$$

$$\left[\frac{d}{dx}\ p(t)\ \frac{d}{dt} + q(t) \right] Y(t) + \lambda r(t)\ Y(t) = f(t)$$

$$L\ Y + \lambda r(t)\ Y = f(t)$$

Karena $y_a(x)$ dan $y_b(x)$ memenuhi persamaan $Ly + \lambda r(x)y = 0$ dan $Y(t)$ memenuhi persamaan differensial $LY + \lambda r(t)Y = f(t)$ berarti persamaan (3.14) memenuhi persamaan (3.15).

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa persamaan (3.15) memenuhi syarat batas (3.9) dan (3.10).

Jika mengganti t dengan a pada persamaan (3.16) dan (3.17) maka :

$$Y(a) = -\frac{1}{K_a}\int^{a} y_a(x)\ y_b(a)f(x)\ dx - \frac{1}{K_a}\int^{b} y_a(a)\ y_b(x)f(x)\ dx$$

$$= -\frac{1}{K_a}\int^{b} y_a(a)\ y_b(x)f(x)\ dx$$

dan

$$Y'(a) = -\frac{y_b'(a)}{K}\int_a^a y_a(x)f(x)dx - \frac{y_a'(a)}{K}\int_a^b y_b(x)\ f(x)\ dx$$

$$= -\frac{y_a'(a)}{K}\int_a^b y_b(x)f(x)dx$$

Karena $y_a(a)$ memenuhi syarat batas (3.9) berarti

$$y_a(a)\ \mathrm{Cos}\ \theta_a - p(a)\ y_a'(a)\ \mathrm{Sin}\ \theta_a = 0$$

maka akan ditunjukkan bahwa $y(a)$ memenuhi syarat batas (3.9) dengan $Y(a)\ \mathrm{Cos}\ \theta_a - p(a)\ Y'(a)\ \mathrm{Sin}\ \theta_a =$

$$-\frac{1}{K_a}\int^{a} y_a(a)\ y_b(x)f(x)\ dx\ \mathrm{Cos}\ \theta_a$$

$$+\ p(a)\frac{y_a'(a)}{K}\int_a^b y_b(x)\ f(x)\ dx\ \mathrm{Sin}\ \theta_a$$

$$= -\frac{\int_a^b y_b(x)\ f(x)\ dx}{K}\left[\underbrace{y_a(a)\ \mathrm{Cos}\ \theta_a - p(a)\ y_a'(a)\ \mathrm{Sin}\ \theta_a}_{0}\right] = 0$$

Jadi

$$Y(a)\ \mathrm{Cos}\ \theta_a - p(a)\ Y'(a)\ \mathrm{Sin}\ \theta_a = 0$$

Ini berarti $y(a)$ memenuhi syarat batas (3.9) begitu pula dengan cara yang sama yaitu mengganti t dengan b diperoleh

$$Y(b) \cos \theta_b - p(b) Y'(b) \sin \theta_b = 0$$

Jadi persamaan (3.15) memenuhi syarat batas (3.9) dan (3.10).

Sekarang akan ditunjukkan ketunggalan penyelesaian y(t)

Diberikan λ bukan nilai eigen L

Andaikan ada ψ yang merupakan penyelesaian persamaan differensial (3.15) dengan syarat batas (3.9) dan (3.10) yang tidak identik dengan Y atau ($\psi \neq Y$)

Dari kedua persamaan tersebut maka

$$LY + \lambda rY = f(x)$$

$$L\psi + \lambda r\psi = f(x)$$

$$L(Y - \psi) + \lambda r(Y - \psi) = 0$$

Ini berarti $(Y - \psi)$ merupakan penyelesaian persamaan differensial homogen dari (3.15) yang memenuhi syarat batas (3.9) dan (3.10) berarti pula bahwa λ merupakan suatu nilai eigen dengan $(Y - \psi)$ sebagai fungsi eigennya, hal ini bertentangan dengan yang diketahui bahwa λ bukan suatu nilai eigen L, jadi haruslah $\psi = Y$.

Jadi Y(t) merupakan penyelesaian yang tunggal.