BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. MASALAH NILAI BATAS

Diberikan persamaan differensial linier orde dua

$$P_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = f(x) \quad .....(2.1.1)$$

dimana koefisien-koefisien $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ dan fungsi f(x) merupakan fungsi fungsi yang kontinu dalam interval [a,b] dengan $P_0(x) \neq 0$.

Penyelesaian y(x) dari persamaan differensial (2.1.1) pada sebuah titik $x = x_0$ dalam interval [a.b] memenuhi dua syarat awal yang diberikan

$y(x_0) = y_0$ dan $y'(x_0) = y_1$ ....(2.1.2)

Persamaan differensial (2.1.1) bersama sama dengan syarat awal (2.1.2) merupakan suatu masalah nilai awal (MNA).

Dalam MNA peubah bebas x dari persamaan differensial pada umumnya menyatakan waktu, x_0 menyatakan waktu awal dan y_0 dan y_1 menyatakan syarat awal.

Apabila penyelesaian y(x) dari persamaan differensial (2.1.1) memenuhi syarat pada titik akhir dari interval [a,b] sebagai contoh

y(a) = A dan y(b) = B ....(2.1.3)

dengan A dan B dua buah konstanta maka dikatakan syarat batas.

Selanjutnya persamaan differensial (2.1.1) bersama sama dengan syarat batas (2.1.3) merupakan suatu masalah nilai batas (MNB)

Contoh 2.1.1

Masalah nilai batas

$$y'' + y = 0 \text{ untuk } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

$$y(0) = 2 \text{ dan } y(\frac{\pi}{2}) = 1$$

Penyelesaian Umum

$$y(x) = c_1 \text{Cos } x + c_2 \text{Sin } x$$

Syarat batas $y(0) = 2$

$$y(0) = c_1 \text{Cos } 0 + c_2 \text{Sin } 0 = 2$$

$$c_1 = 2 \text{ maka } y(x) = 2 \text{ Cos } x$$

Syarat batas $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$y(\frac{\pi}{2}) = c_1 \text{Cos } \frac{\pi}{2} + c_2 \text{ Sin } \frac{\pi}{2} = 1$$

$$c_2 = 1$$

Jadi

$$y(x) = c_1 \text{Cos } x + c_2 \text{Sin } x$$

$$= 2 \text{ Cos } x + \text{Sin } x$$

Contoh 2.1.2

Masalah nilai batas

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{untuk } 0 \le x \le \pi$$

$$y(0) - 2y'(0) = -2$$

$$y(\pi) + 3y'(\pi) = 3$$

Penyelesaian Umum

$$y(x) = c_1 \text{Cos } 2x + c_2 \text{Sin } 2x$$

dengan $y'(x) = -2\, c_1 \text{Sin } 2x + 2\, c_2 \text{Cos } 2x$

Syarat batas

$$y(0) - 2y'(0) = c_1 \text{Cos } 0 + c_2 \text{Sin } 0 - 4c_2 \text{Cos } 0 + 4c_1 \text{Sin } 0$$

$$-2 = c_1 - 4\, c_2$$

Syarat batas

$$y(\pi) + 3y'(\pi) = c_1 \text{ Cos } 2\pi + c_2 \text{ Sin } 2\pi + 6\, c_2 \text{Cos } 2\pi - 6\, c_1 \text{Sin } 2\pi$$

$$3 = c_1 + 6\, c_2$$

dari $c_1 - 4\, c_2 = -2$

$c_1 + 6\, c_2 = 3$

di dapat $c_1 = 0$ dan $c_2 = \frac{1}{2}$

jadi

$$y(x) = \frac{1}{2} \text{ Sin } 2x$$

2.2. NILAI EIGEN DAN FUNGSI EIGEN

Diberikan persamaan differensial

$$(p(x)\, y')' + (q(x) + \lambda)\, y = 0 \quad \text{.............(2.2.1)}$$

dimana $p(x) > 0$ dan $q(x)$ kontinu dalam interval $[a,b]$ dan λ sebuah parameter yang riil disertai syarat batas titik ujung a dan b berbentuk

$$\begin{aligned} \alpha_1\, y(a) + \alpha_2 y'(a) &= 0 \\ \beta_1\, y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{.....................(2.2.2)}$$

Masalah nilai batas (2.2.1) dan (2.2.2) selalu dipenuhi oleh penyelesaian trivial $y(x) = 0$, tetapi yang penting dalam masalah ini menentukan nilai λ agar masalah nilai batas (2.2.1) dan (2.2.2) mempunyai penyelesaian non trivial, dan nilai λ ini disebut nilai eigen dari MNB (2.2.1) dan (2.2.2). Sedangkan penyelesaian non trivial kaitannya disebut fungsi eigen MNB (2.2.1) dan (2.2.2).

<u>contoh 2.2.1</u>

Masalah nilai batas

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{untuk} \quad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 0 \text{ dan } y(1) = 0$$

Penyelesaian Umum : $y(x) = c_1 \operatorname{Sin} \sqrt{\lambda}\, x + c_2 \operatorname{Cos} \sqrt{\lambda}\, x$

Syarat batas $y(0) = c_1 \operatorname{Sin} 0 + c_2 \operatorname{Cos} 0 = 0$

$$c_2 = 0$$

maka

$$y(x) = c_1 \operatorname{Sin} \sqrt{\lambda}\, x$$

Syarat batas $y(1) = c_1 \operatorname{Sin} \sqrt{\lambda} = 0$

karena $c_1 \neq 0$ maka $\sqrt{\lambda}$ adalah kelipatan dari π

jadi

$\lambda_n = (n\pi)^2 = n^2\pi^2$, $n = 1,2,...$ nilai eigen

$y_n = c_1 \operatorname{Sin} n\pi x$, $n = 1,2,...$ fungsi eigen

<u>Contoh 2.2.2</u>

Hitung nilai eigen dan fungsi eigen dari masalah nilai batas

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{untuk} \quad 0 \le x \le \pi$$

$$y(0) = 0 \text{ dan } y(\pi) = 0$$

<u>Jawab</u>

Akan dicari semua nilai eigen parameter λ yang riil, yang untuk nilai λ tersebut mempunyai penyelesaian non trivial dan mencari pula penyelesaian non trivial kaitannya.

Akar karakteristik persamaan differensial itu $\pm\sqrt{-\lambda}$.
Jadi bentuk penyelesaiannya tergantung pada λ negatif, nol atau positif, sehingga kita harus memeriksa tiga kasus.

<u>Kasus 1</u>

$\lambda < 0$

ambil $\lambda = -k^2$ dimana $k > 0$ maka persamaan differensial menjadi $y'' - k^2\lambda = 0$ dan mempunyai penyelesaian umum

$$y(x) = c_1 e^{-kx} + c_2 e^{kx}$$

Syarat batas $y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0$

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_2 = -c_1$$

syarat batas $y(\pi) = c_1 e^{-k\pi} + c_2 e^{k\pi} = 0$

$$c_1 e^{-k\pi} - c_1 e^{k\pi} = 0$$

$$c_1(e^{-k\pi} - e^{k\pi}) = 0$$

karena $k > 0$ dan $e^{-k\pi} \neq e^{k\pi}$ maka haruslah $c_1 = 0$

Jadi karena $c_1 = -c_1$ diperoleh $c_2 = 0$

Sehingga penyelesaian tersebut identik dengan nol. Ini berarti masalah nilai batas dari persamaan differensial diatas tidak mempunyai nilai eigen yang negatif.

Kasus 2

$\lambda = 0$ .Maka persamaan differensial menjadi $y'' = 0$

dan mempunyai penyelesaian umum $y(x) = c_1 + c_2\, x$

Syarat batas $y(0) = c_1 + c_2\,.0 = 0$

$c_1 = 0$

Syarat batas $y(\pi) = c_1 + c_2\,\pi = 0$

$c_2\pi = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

Karena Penyelesaian identik nol maka $\lambda = 0$ bukan nilai eigen.

Kasus 3

$\lambda > 0$

Ambil $\lambda = k^2$ dimana $k > 0$

maka persamaan differensial menjadi $y'' + k^2 y = 0$

mempunyai penyelesaian umum

$$y(x) = c_1 \text{ Sin } kx + c_2 \text{ Cos } kx$$

Syarat batas $y(0) = c_1 \text{ Sin } 0 + c_2 \text{ Cos } 0 = 0$

$c_2 = 0$

Syarat batas $y(\pi) = c_1 \text{ Sin } k\pi + c_2 \text{ Cos } k\pi = 0$

$c_1 \text{ Sin } k\pi = 0$

Jadi diperoleh $c_2 = 0$ dan c_1 Sin $k\pi = 0$

Penyelesaian tak trivial dimungkinkan hanya jika c_1 dapat dipilih tak sama dengan nol, tentu saja $c_1 \sin k\pi = 0$ jika Sin $k\pi = 0$ atau $k\pi = n\pi$

sehingga $n = k$ untuk $n = 1,2,3,\ldots..$

karena diambil $\lambda = k^2$ maka diperoleh

$\lambda_n = k^2 = n^2$; $n = 1,2,3,\ldots$ disebut nilai eigen

$\lambda_n(x) = c_1 \text{Sin } nx$; $n = 1,2,3,\ldots$ disebut fungsi eigen

Contoh 2.2.3

Tentukan nilai eigen dan fungsi eigen dari masalah nilai batas.

$$y'' + (-4 + \lambda)y = 0 \quad \text{untuk} \quad 0 \le x \le 1$$

$$y'(0) = 0 \qquad y'(1) = 0$$

Jawab

Persamaan karakteristik $D^2 + (-4 + \lambda) = 0$

$$D^2 = 4 - \lambda$$

$$D = \pm \sqrt{4 - \lambda}$$

maka akar-akar karakteristik dan persamaan differensial itu adalah $\pm \sqrt{4 - \lambda}$, jadi penyelesaiannya tergantung dari $(4 - \lambda)$ negatif, nol atau positif.

Kasus 1

$4 - \lambda < 0$

Ambil $4 - \lambda < -k^2$ dimana $k > 0$ maka persamaan differensial menjadi $y'' + k^2 y = 0$ dan mempunyai penyelesaian umum $y(x) = c_1 \text{ Sin } kx + c_2 \text{ Cos } kx$

dan

$$y'(x) = c_1 k \text{ Cos } kx - c_2 k \text{ Sin } kx$$

Syarat batas $y'(0) = c_1 k \text{ Cos } 0 - c_2 k \text{ Sin } 0 = 0$

$$c_1 k = 0$$

karena $k \neq 0$ maka $c_1 = 0$

Syarat batas $y'(1) = c_1 k \text{ Cos } k - c_2 k \text{ Sin } k = 0$

$$-c_2 k \text{ Sin } k = 0$$

karena $k \neq 0$ maka $c_2 \neq 0$ maka

k adalah kelipatan dari dari π

ditulis $k = n\pi$; $n = 1,2,3,\ldots$

jadi

$\lambda_n = 4 + k^2 = 4 + n^2\pi^2$; disebut nilai eigen

$y_n(x) = c_2 \text{Cos } kx = c_2 \text{ Cos } n\pi x$; disebut fungsi eigen

Kasus 2

$4 - \lambda = 0$

Maka persamaan diferrensial menjadi $y'' = 0$

dan mempunyai penyelesaian umum $y(x) = c_1 + c_2 x$

dan $y'(x) = c_2$

Syarat batas $y'(0) = c_2$

Syarat batas $y'(1) = c_2 = 0$

jadi dalam hal ini penyelesaian tak trivial diperoleh $y(x) = c_1$ atau kelipatan dari konstanta $y(x) = 1$ maka $\lambda = 4$ merupakan nilai eigen dan $y(x) = 1$ merupakan fungsi eigen.

Kasus 3

$4 - \lambda > 0$

Ambil $4 - \lambda > k^2$ dimana $k > 0$ maka persamaan differensial menjadi $y'' - k^2y = 0$ mempunyai penyesaian umum

$$y(x) = C_1 e^{-kx} + C_2 x^{kx}$$

$$\text{dan } y'(x) = -C_1 ke^{-kx} + C_2 ke^{kx}$$

Syarat batas $y'(0) = -C_1 k + C_2 k$

$$= k(C_2 - C_1)$$

karena $k \neq 0$ maka $C_1 = C_2$

Syarat batas $y'(1) = -C_1 ke^{-k} + C_2 ke^{k} = 0$

$$-C_2 ke^{-k} + C_2 ke^{k} = 0$$

$$C_2 k(e^{k} - e^{-k}) = 0$$

karena $k > 0$ dan $(e^{k} \neq e^{-k})$ maka haruslah $C_2 = 0$

Jadi diperoleh $C_1 = C_2 = 0$

Sehingga penyelesaian tersebut identik dengan nol ini berarti masalah nilai batas dari persamaan differensial dalam kasus 3 tidak mempunyai nilai eigen.

2.3 TRANSFORMASI PRUFFER

Diberikan persamaan differensial homogen

$Ly + \lambda r(x)y = 0$; $a \leq x \leq b$ ....(2.3.1)

dengan

$$L = \frac{d}{dx}\left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x)$$

di mana $\frac{dp}{dx}$, $q(x)$ dan $r(x)$ merupakan fungsi-fungsi berharga real dan kontinu dalam $[a,b]$ serta λ merupakan parameter.

Misalkan $y = y(x,\lambda)$ merupakan penyelesaian tak nol dari persamaan differensial (2.3.1) yang memenuhi masalah nilai awal di $x = a$.

Dimisalkan

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x,\lambda) = \rho(x,\lambda)\ \mathrm{Sin}\ \theta(x,\lambda) \\ py' &= p(x)y'(x,\lambda) = \rho(x,\lambda)\ \mathrm{Cos}\ \theta(x,\lambda) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.2)$$

dengan $\rho(x,\lambda)$ dan $\theta(x,\lambda)$ merupakan fungsi-fungsi yang belum diketahui.

Dari persamaan (2.3.2) diperoleh

$$\mathrm{tg}\ \theta = \frac{y}{py'} \quad \text{atau} \quad \theta = \mathrm{arc\ tg}\ \frac{y}{p\ y'} \qquad (2.3.3)$$

dan

$$\rho^2 = y^2 + (p\ y')^2 \qquad (2.3.4)$$

jika dari persamaan (2.3.3) didefferensialkan terhadap x dengan terlebih dahulu menuliskan sebagai

$$\mathrm{Cotg}\ \theta = \frac{p\ y'}{y}$$

didapat $$-\operatorname{Cosec}^2\theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{(p\,y')'}{y} - \frac{p(y')^2}{y^2}$$

karena y merupakan penyelesaian tak nol dari persamaan differensial (2.3.1) maka

$$(p\,y')' = -(q + \lambda r)y$$

jadi

$$-\operatorname{Cosec}^2\theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{-(q + \lambda r)y}{y} - \frac{p^2(y')^2}{p\,y^2}$$

$$-\operatorname{Cosec}^2\theta \frac{d\theta}{dx} = -q - \lambda r - \frac{\operatorname{Cotg}^2\theta}{p}$$

jika kedua ruas dari persamaan tersebut dikalikan dengan $-\operatorname{Sin}^2\theta$ diperoleh

$$\frac{d\theta}{dx} = (\,q + \lambda r\,)\operatorname{Sin}^2\theta + 1/p\,\operatorname{Cos}^2\theta \qquad (2.3.5)$$

Sedangkan dari persamaan (2.3.4) diturunkan / didefferensialkan terhadap x dan dengan menggunakan persamaan (2.3.1) didapat

$$2\rho \frac{d\rho}{dx} = 2y\,y' + 2\,(p\,y')(p\,y')'$$

$$\rho \frac{d\rho}{dx} = y \frac{p\,y'}{p} + (p\,y')(p\,y')'$$

$$\rho \frac{d\rho}{dx} = \frac{\rho \text{ Sin } \theta \ \rho \text{ Cos } \theta}{p} + \rho \text{ Cos } \theta \ (-(\lambda r + q) \ \rho \text{ Sin } \theta)$$

$$\rho \frac{d\rho}{dx} = \frac{\rho^2 \text{Sin } 2\theta}{2p} - \frac{\rho^2 \text{ Sin } 2\theta}{2} (\lambda r + q)$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{\rho \text{ Sin } 2\theta}{2p} - \frac{\rho \text{ Sin } 2\theta}{2} (\lambda r + q)$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{\rho}{2} \left[\frac{1}{p} - (\lambda r + q) \right] \text{Sin } 2\theta \quad (2.3.6)$$

Theorema 2.3.1

Fungsi $y = y(x,\lambda)$ merupakan penyelesaian tak nol dari persamaan differensial (2.3.1) jika dan hanya jika ρ dan θ merupakan penyelesaian tak nol dari persamaan diffeensial (2.3.5) dan (2.3.6)

Bukti

$\Leftarrow$ (Syarat cukup)

Misalkan ρ dan θ merupakan penyelesaian tak nol dari persamaan differenssial (2.3.5) dan (2.3.6).

Akan ditunjukkan bahwa $y = y(x,\lambda)$ merupakan penyelesaian tak nol dari persamaan differensial (2.3.1).

Dengan menurunkan persamaan kedua dari transformasi pruffer pada persamaan (2.3.2) terhadap x dan kemudian disubstitusikan pada persamaan (2.3.5) dan (2.3.6) diperoleh

untuk $p\,y' = \rho(x,\lambda)\,\mathrm{Cos}\,\theta(x,\lambda)$

$$\frac{d\theta}{dx} = (\,q + \lambda r\,)\,\mathrm{Sin}^2\,\theta + \frac{1}{p}\,\mathrm{Cos}^2\theta$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{\rho}{2}\left[\frac{1}{p} - (\lambda r + q)\right]\mathrm{Sin}\,2\theta$$

maka

$$\frac{d}{dx}\,p\,y' = \frac{d\rho}{dx}\,\mathrm{Cos}\,\theta - \rho\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\,p\,y' = \frac{\rho}{2}\left[\frac{1}{p} - (\lambda r + q)\right]\mathrm{Sin}\,2\theta\,\mathrm{Cos}\theta$$

$$- \rho\,\mathrm{Sin}\,\theta\left[(\lambda r + q)\,\mathrm{Sin}^2\theta + \frac{1}{p}\,\mathrm{Cos}^2\theta\right]$$

$$\frac{d}{dx}\,p\,y' = \frac{\rho}{2}\left[\frac{1}{p} - (\lambda r + q)\right]2\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Cos}\theta.\mathrm{Cos}\theta$$

$$- \rho\,\mathrm{Sin}\,\theta\left[(\lambda r + q)\,\mathrm{Sin}^2\theta + \frac{1}{p}\,\mathrm{Cos}^2\theta\right]$$

$$\frac{d}{dx}\,p\,y' = \frac{\rho}{p}\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Cos}^2\theta - \rho(\lambda r + q)\mathrm{Sin}\,\theta$$

$$\mathrm{Cos}^2\theta - \rho\,\mathrm{Sin}\,\theta\left\{(\lambda r + q)\,\mathrm{Sin}^2\theta\right.$$

$$\left. - \frac{\rho}{p}\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Cos}^2\theta\right\}$$

$$\frac{d}{dx}\, p\, y' = -\rho\ (\lambda r + q)\ \text{Sin}\ \theta\ (\text{Sin}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)$$

$$\frac{d}{dx}\, p\, y' = -\rho(\lambda r + q)\text{Sin}\ \theta = -(\lambda r + q)\rho\ \text{Sin}\ \theta$$

$$\frac{d}{dx}\, p\, y' = -\ (\ \lambda r + q\ )\ y$$

$$\frac{d}{dx}\, p\, y' + (\ \lambda r + q\ )\ y = 0$$

$$Ly + \lambda r(x)y = 0$$

Ini berarti bahwa $y = y(x,\lambda)$ merupakan penyelesaian tak nol dari persamaan differensial (2.3.1)

$\Rightarrow$ (Syarat perlu)

Karena fungsi $y = y(x,\lambda)$ merupakan penyelesaian tak nol dari persamaan differensial (2.3.1) maka dari transformasi pruffer dengan persamaan

$y = y(x,\lambda) = \rho(x,\lambda)$ Sin $\theta(x,\lambda)$ didapat

$y = y(x) \neq 0$ maka $\rho(x,\lambda)$ Sin $\theta(x,\lambda) \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{dipenuhi}\quad \rho(x,\lambda) \neq 0\\ \qquad\text{atau}\\ \qquad\qquad \text{Sin}\ \theta(x,\lambda) \neq 0\end{array}\right\}\ \theta(x,\lambda) \neq 0$$

Sehingga didapat fungsi-fungsi $\rho(x,\lambda)$ dan $\theta(x,\lambda)$ merupakan penyelesaian tak nol yang memenuhi persamaan (2.3.5) dan (2.3.6), sehingga dikatakan persamaan (2.3.1) setara dengan persamaan (2.3.5) dan (2.3.6)

2.4. BEBERAPA SIFAT FUNGSI θ

Persamaan differensial (2.3.5) tidak tergantung pada ρ jika diberikan syarat awal di $x = a$ dituliskan $\theta(a,\lambda) = \theta a$ dengan $0 \le \theta_a < \pi$, untuk λ real

Misal $Q(x,\lambda) = q(x) + \lambda r(x)$

Theorema 2.4.1

Misalkan θ_i penyelesaian persamaan

$$\frac{d\theta_i}{dx} = \theta_i' = Q_i \operatorname{Sin}^2\theta_i (x,\lambda) + \frac{1}{P_i} \operatorname{Cos}^2\theta_i (x,\lambda)$$

dengan syarat awal

$$\theta_i(a,\lambda) = \theta_{ai} \qquad 0 \le \theta_{a1} \le \theta_{a2} < \pi$$

$i = 1, 2, \ldots\ldots$ untuk λ real

Jika $Q_1 < Q_2$ dan $0 < p_2 \le p_1$ pada $[a,b]$

maka $\theta_1 < \theta_2 \quad \forall x \in [a,b]$

Bukti :

Jika θ_2' dikurangi θ_1' maka

$$\theta_2' - \theta_1' = \frac{1}{P_2} \operatorname{Cos}^2\theta_2 + Q_2 \sin^2\theta_2 - \frac{1}{P_1} \operatorname{Cos}^2\theta_1 - Q_1 \sin^2\theta_1$$

$$\theta_2' - \theta_1' = Q_2 \sin^2\theta_2 - Q_1 \sin^2\theta_1 + \frac{1}{p_2} \operatorname{Cos}^2\theta_2 - \frac{1}{p_1} \operatorname{Cos}^2\theta_1$$

$$\theta_2' - \theta_1' = Q_2 \sin^2\theta_2 - Q_1 \sin^2\theta_1 + \frac{1}{P_2} \operatorname{Cos}^2\theta_2 + \frac{1}{P_1} \sin^2\theta_1 - \frac{1}{P_1}$$

$$\theta_2' - \theta_1' = Q_2 \sin^2\theta_2 - Q_1 \sin^2\theta_1 + \frac{1}{P_2}\cos^2\theta_2 + \frac{1}{P_1}\sin^2\theta_1 - \frac{1}{P_1}\sin^2\theta_2 - \frac{1}{P_1}\cos^2\theta_2$$

$$\theta_2' - \theta_1' = Q_2 \sin^2\theta_2 - Q_1 \sin^2\theta_2 + \frac{1}{P_2}\cos^2\theta_2 - \frac{1}{P_1}\cos^2\theta_2 + Q_1 \sin^2\theta_2 - \frac{1}{P_1}\sin^2\theta_2 - Q_1 \sin^2\theta_1 + \frac{1}{P_1}\sin^2\theta_1$$

$$\theta_2' - \theta_1' = (Q_2 - Q_1)\sin^2\theta_2 + \left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}\right)\cos^2\theta_2 + \left(Q_1 - \frac{1}{P_1}\right)\sin^2\theta_2 - \left(Q_1 - \frac{1}{P_1}\right)\sin^2\theta_1$$

$$\theta_2' - \theta_1' = \left(Q_1 - \frac{1}{P_1}\right)\sin^2\theta_2 - \left(Q_1 - \frac{1}{P_1}\right)\sin^2\theta_1 + I \quad ..(2.4.1)$$

dengan $I = (Q_2 - Q_1)\sin^2\theta_2 + \left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}\right)\cos^2\theta_2$

dengan $I \geq 0$

Jika $S = \theta_2 - \theta_1$ maka $S' = (\theta_2 - \theta_1)' = hs + I$

$$\text{dengan } h = \left(Q_1 - \frac{1}{P_1}\right)\left\{\frac{\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}\right\}$$

karena $I \geq 0$ diperoleh $s' - hs \geq 0$ ....(2.4.2)

Jika (2.4.2) dikalikan dengan $e^{G(x)}$ dengan

$$G(x) = \int_x^b h(u)\, du$$

maka $e^{G(x)}s' - he^{G(x)}s \geq 0$

$$\text{atau } \frac{d}{dx}\, e^{G(x)}s \geq 0 \quad .... \quad (2.4.2)$$

Jika (2.4.3) diintegralkan pada (a,t) dengan $t \to b$

$$\text{maka} \int_a^t \frac{d}{dx} e^{G(x)} s = e^{G(x)} s \Big|_a^t \geq 0$$

atau $s(t)\, e^{G(t)} - S(a)\, e^{G(a)} \geq 0$

$$s(t)\, e^{G(t)} \geq S(a)\, e^{G(a)}, \ \forall t > a$$

$$(\theta_2 - \theta_1).e^{G(t)} \geq (\theta_2(a) - \theta_1(a))\, e^{G(a)}$$

karena $\theta_{a2} \geq \theta_{a1}$ maka $\theta_2 > \theta_1$, untuk $t > a$

Theorema 2.4.2

Misalkan $\theta\,(x,\lambda)$ penyelesaian persamaan (2.3.5)

dengan nilai awal $\theta(a,\lambda) = \theta a$

untuk setiap x yang ditetapkan $a \leq x \leq b$ maka

$\theta(x,\lambda)$ merupakan fungsi naik terhadap parameter λ

Bukti

Bila $\lambda_1 < \lambda_2$ maka $\lambda_1\, r(x) + q(x) < \lambda_2\, r(x) + q(x)$

atau $\lambda_1 < \lambda_2$ maka $Q_1 < Q_2$

menurut theorema 2.4.1 diperoleh

jika $Q_2 > Q_1$ maka $\theta_2 > \theta_1$

atau $\theta_2\,(x,\lambda_2) > \theta_1(x,\lambda_1)$ untuk $\lambda_1 < \lambda_2$

Theorema 2.4.3

Misalkan $\theta(x,\lambda)$ penyelesaian persamaan differensial

(2.3.5) dengan nilai awal

$\theta(a,\lambda) = \theta a \quad ; \; 0 \le \theta a < \pi$, untuk λ real

jika $x_n \in [a,b]$ dengan $\theta(x_n,\lambda) = n\pi$

n bilangan positif dan λ konstanta sebarang maka

$\theta(x,\lambda) > n\pi$ untuk $x > x_n$

Bukti

Tetapkan suatu nilai untuk λ

Misalkan $t \in [a,b]$ sehingga $\theta(t,\lambda) = 0 \pmod{\pi}$

menurut persamaan differensial (2.3.5)

$\dfrac{d\,\theta(t,\lambda)}{dx} = \dfrac{1}{p(t)} > 0$. Ini berarti disekitar $x = t$

tersebut $\theta(x,\lambda)$ suatu fungsi naik terhadap x akibatnya

untuk suatu $x_n \in [a,b]$

$$
\begin{aligned}
\text{dengan} \quad \theta(x_n,\lambda) &= n\pi \quad , n \ge 0 \\
\theta(x,\lambda) &> n\pi \quad , \text{untuk } x > x_n \\
\theta(x,\lambda) &< n\pi \quad , \text{untuk } x < x_n
\end{aligned}
$$

Jika nilai $x > x_n$ bertambah maka $\theta(x,\lambda)$

tidak dapat turun mencapai $n\pi$, kalau ini terjadi untuk

suatu $x^o > x_n$ dengan $\theta(x^o,\lambda) = n\pi$ maka $\theta(x,\lambda)$ naik

disekitar $x = x^o$

Ini merupakan suatu pertentangan karena itu $\theta(x,\lambda) > n\pi$

akibatnya $\theta(x,\lambda) \ge 0$ untuk $x \in [a,b]$ dan untuk λ real.

Theorema 2.4.4

Misalkan $y = y(x,\lambda)$ penyelesaian persamaan (2.3.1)

bernilai nol pada titik $x_1 \in [a,b]$

Bila λ bertambah maka ada x_2 dengan $x_2 < x_1$

sehingga $y = y(X,\lambda)$ bernilai nol pada titik x_2

<u>Bukti</u>

Misalkan untuk suatu $x_1 \in (a,b)$ dan suatu λ_1

berlaku $\theta(x_1\lambda_1) = n\pi$, n bilangan asli menurut theorema

2.4.2 jika $\lambda_1 < \lambda_2$ maka

$\theta_2(x_1,\lambda_2) > \theta_1(x_1,\lambda_1) = n\pi$

karena $\theta(a,\lambda) = \theta a$, $0 \le \theta a < \pi$, untuk λ real

dan berdasar theorema 2.4.3 maka diperoleh

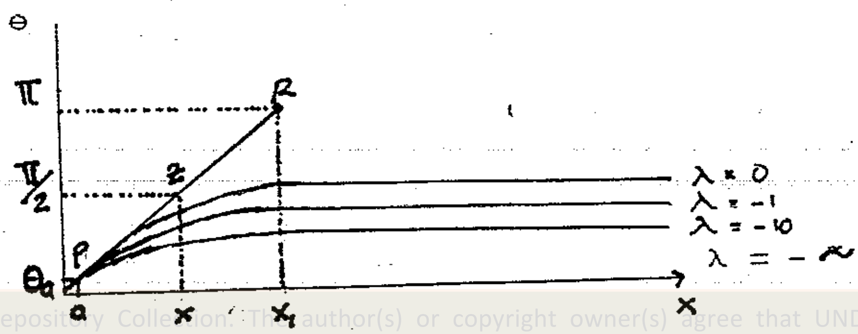
suatu x_2 dengan $\theta(x_2,\lambda_2) = n\pi$ sehingga $a < x_2 < x_1$

<u>catatan</u> : Nilai nol ke-n dari penyelesaian $y = y(x,\lambda)$ dititik $x_n \in (a,b)$ adalah suatu fungsi dari λ atau $x_n = x_n(\lambda)$

<u>Theorema 2.4.5</u>

Jika $\theta(x,\lambda)$ penyelesaian persamaan differensial (2.3.5) dengan nilai awal $\theta(a,\lambda) = \theta a$, $0 \le \theta a < \pi$, untuk λ real maka $\lim_{\lambda \to -\infty} \theta(x,\lambda) = 0$

<u>Bukti</u>



$P = (a, \gamma)$ $\qquad \theta_a < \gamma < \pi$

$R = (x_1, \varepsilon)$ $\qquad 0 < \beta < \pi$

$z = (x, \beta)$

Perhatikan fungsi $\theta(x,\lambda)$, ambil $\varepsilon > 0$ sebarang, misalkan $\theta a < \gamma < \pi$, ambil titik $P = (a,\gamma)$ dan $R = (x_1, \varepsilon)$ dengan $a < x_1 < b$ sehingga gradien

$$PR = \frac{(\varepsilon - \gamma)}{(x_1 - a)}$$

Dari persamaan (2.3.5), ambil titik $z = (X,\beta)$ pada garis PR dengan $0 < \beta < \pi$, pilih konstanta p_o sehingga $0 < p_o < p(x)$, $\forall x \in [a,x_1]$

Bila $Q(x,\lambda) = q(x) + \lambda r(x)$ maka $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} Q(x,\lambda) = -\infty$

Akibatnya $\forall M > 0 \; \exists N_M > 0$ sehingga $Q(X,\lambda) < -M$, $\forall\lambda < -N$

dengan demikian diperoleh $\dfrac{d\theta}{dx} < \dfrac{1}{p_o} - M$, $\forall\lambda < -M$, $x \in [a,x_1]$ dengan mengambil $M = M_o$ sehingga

$$M_o > \frac{1}{p_o} - \frac{(\varepsilon - \gamma)}{(x_1 - a)}$$

maka ada

$$N = N_o > 0 \text{ sehingga } Q(x,\lambda) < -M_o,\ \forall\ \lambda < -N$$

karena itu diperoleh $\dfrac{d\theta}{dx} \leq \dfrac{1}{p_o} - M_o < \dfrac{(\varepsilon - \gamma)}{(x_1 - a)}$ ...(2.4.1)

$\forall\ \lambda < -N$, $x \in [a,x_1]$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa untuk semua $x \in (a,x_1)$ dan $\forall\ \lambda < -N$ kurva $\theta\ (x,\lambda)$ terletak dibawah segmen garis PR.

Jika pernyataan ini tidak benar maka kurva $\theta(x,\lambda)$ harus berpotongan dengan garis PR dititik z_o pada titik tersebut $\frac{d\theta}{dx} \geq$ gradien PR hal ini bertentangan dengan (2.4.1) Jadi kurva $\theta(x,\lambda)$ terletak dibawah segmen garis PR $\forall\ \lambda < -N$. Dengan demikian $\forall\ \lambda < -N$ nilai $0 \leq \theta\ (x,\lambda) < \varepsilon$ karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka berarti $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \theta(x,\lambda) = 0$

Theorema 2.4.6

Jika $\theta(x,\lambda)$ penyelesaian persamaan differensial (2.3.5) dengan nilai awal

$$\theta(x,\lambda) = \theta_a \quad 0 \leq \theta_a < \pi \qquad \text{untuk } \lambda \text{ real}$$

maka

$$\lim_{\lambda \to \infty} \theta(x,\lambda) = \infty \qquad \text{untuk } x \in (a,b]$$

Bukti

Ambil $x_b \in [a,b]$ pilih konstanta p_o, q_o dan r_o sehingga $0 \leq p(x) \leq p_o$, $q(x) \leq q_o$ dan $r(x) \geq r_o$ $x \in (a,x_b]$

Persamaan $p_o\ y'' + (\lambda r_o + q_o)y = 0$ dengan $\lambda > -\frac{q_o}{r_o}$

mempunyai penyelesaian

$$y_o = c_o \text{ Sin } \theta_o(x,\lambda)$$

$$= c_o \text{ Sin } kx$$

dengan c_o = konstanta dan $k = \left\{ \dfrac{(q_o + \lambda r_o)}{p_o} \right\}^{1/2}$

y_o bernilai nol pada titik x_n dengan $x_n = \dfrac{n\pi}{k}$,

n bilangan bulat positif jarak dua titik berurutan yang membuat $y_o = 0$ yaitu

$$J = x_n - x_{n-1} = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi\ p_o^{\ 1/2}}{(q_o + \lambda r_o)^{1/2}}$$

dengan demikian bila $\lambda \longrightarrow \sim$ terdapat tak hingga titik-titik x_n dengan $\theta_o\ (x_n,\lambda) = n\pi$

menurut theorema 2.4.2 - 2.4.4 diperoleh

$$\lim_{\lambda \to \sim} \theta_o(x,\lambda) = \sim$$

Berdasar theorema 2.4.1

$$\theta\ (x_b,\lambda) - \theta(a,\lambda) \geq \theta_o(x_b,\lambda) - \theta_o(a,\lambda)$$

sehingga diperoleh

$$\lim_{\lambda \to \sim} \theta\ (x_b,\lambda) = \sim$$

2.5 FUNGSI GREEN

Diberikan persamaan differensial

$$Ly = 0 \text{ dengan } L = \frac{d}{dx}\left(p(x)\ \frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

dimana $\dfrac{dp}{dx}$, $q(x)$ kontinu dan $p(x)$ positif pada $[a,b]$ disertai syarat batas di $x = a$ dan $x = b$

Definisi 2.5.1

G(x,t) adalah fungsi Green bila

$$y(x) = \int_a^x G(x,t)\, r(t)\, dt$$

merupakan penyelesaian $I(y) = r(x)$ yang memenuhi

$y(a) = y'(a) = y''(a) = \ldots\ldots = y^{(n-1)}(a)$

di mana

$$I(y) = \frac{d^{(n)}\ y}{dx^n} + p(x)\frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}}\ y$$

$$+\ p^2(x)\frac{d^{(n-2)}\ y}{dx^{n-2}} + \ldots.$$

Definisi 2.5.2

Fungsi Green dari persamaan differensial $Ly = 0$ dengan syarat batas di $x = a$ dan $x = b$ adalah suatu fungsi $G(x,t)$ yang bersifat

i). $G(x,t)$ terdefinisi dan kontinu $\forall\ x,t \in [a,b]$

ii). terhadap peubah $x \neq t$ maka $LG = 0$

iii). $G(x,t)$ memenuhi syarat batas di $x = a$ dan $x = b$ $\forall\ t \in [a,b]$

iv). $\displaystyle \frac{\delta}{\delta x} G(x,t)\Big|_{x=t} = \frac{1}{p(t)}$

Contoh 2.5.1

Jika diberikan persamaan differensial

$$IG = G_{xx}(x,t) + p(x)G_x(x,t) + q(x)G(x,t) = 0$$

yang memenuhi syarat awal

$$G(x,t) = 0, \qquad \frac{\delta}{\delta x} G(x) \Big|_{x=t} = 1$$

dan $y(a) = y'(a) = 0$

Buktikan $G(x,t)$ merupakan fungsi Green.

Bukti

Diberikan $G_{xx}(x,t) + p(x)G_x(x,t) + q(x)G(x,t) = 0$

dari definisi (2.5.1)

$G(x,t)$ merupakan penyelesaian green bila

$$y(x) = \int_a^x G(x,t)\, r(t)\, dt \quad \text{untuk } a \le x \le t \quad ....(1)$$

apakah $y(x)$ merupakan penyelesaian dari persamaan differensial

$$I(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

yang memenuhi syarat awal $y(a) = y'(a) = 0$

menurut hukum Leibuiz maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left\{ \int_a^x G(x,t)\, r(t)\, dt \right\}}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x G(x,t)\, r(t)\, dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \int_a^x G_x(x,t)\, r(t)\, dt + G(x,t)\, r(t) \Big|_{x=t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \int_a^x G_x(x,t)\ r(t)\ dt \quad ....(2)$$

Selanjutnya dicari $\frac{d^2y}{dx^2}$ maka

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \int_a^x G_x(x,t)\ r(t)\ dt$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_a^x G_{xx}(x,t)\ r(t)\ dt + G_x(x,t)\ r(t)\ \Big|_{x=t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_a^x G_{xx}(x,t)\ r(t)\ dt + r(x) \quad ......(3)$$

Sehingga dari (1), (2) dan (3) diperoleh

$$I(y) = y'' + p(x)\ y' + q(x)\ y$$

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_a^x G_{xx}(x,t)\ r(t)\ dt + r(x) \\ &\quad + p(x) \int_a^x G_x\ (x,t)\ r(t)\ dt \\ &\quad + q(x) \int_a^x G\ (x,t)\ r(t)\ dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_a^x \Big\{ G_{xx}(x,t) + p(x)\ G_x(x,t) \\ &\quad + q(x)\ G\ (x,t) \Big\}\ r(t)\ dt + r(x) \end{aligned}$$

$$I(y) \quad = r(x)$$

Jadi persamaan differensialnya memenuhi

$$y(a) \quad = \int_a^a G \ (a,t)\ r(t)\ dt = 0$$

dan

$$y'(a) \quad = \int_a^a G_x \ (a,t)\ r(t)\ dt = 0$$

Karena $y(x)$ adalah penyelesaian PD di atas, maka terbukti bahwa $G(x,t)$ merupakan fungsi Green.

Bila diberikan $Ly = 0$

misalkan $y_a(x)$ penyelesaian tak nol yang memenuhi syarat batas di $x = a$ dan $y_b(x)$ penyelesaian tak nol yang memenuhi syarat batas di $x = b$.

Determinan Wronsky $y_a(x)$ dan $y_b(x)$ adalah

$$W\ (y_a\ , y_b) = \begin{vmatrix} y_a & y_b \\ y_a' & y_b' \end{vmatrix}$$

Fungsi $G(x,t)$ dapat dikonstruksikan sebagai berikut: andaikan y_a dan y_b bebas linier, karena itu $W\ (y_a, y_b) \neq 0$ ambil $t \in [a,b]$, karena $G(x,t)$ merupakan penyelesaian persamaan differensial tersebut dengan syarat batas di $x = a$, maka dapat dituliskan

$$G(x,t) = k_1(t)\ y_a(x) \qquad a \leq x \leq t$$

Karena $G(x,t)$ juga penyelesaian persamaan differensial tersebut dengan syarat batas di $x = b$ maka dapat pula dituliskan

$$G(x,t) = k_2(t)\ y_b(x) \qquad t \le x \le b$$

Dengan demikian

$$G(x,t) \begin{cases} k_1(t)\ y_a(x) & a \le x \le t \\ k_2(t)\ y_b(x) & t \le x \le b \end{cases}$$

Karena G(x,t) kontinu pada x = t diperoleh

$$k_2(t)\ y_b(t) - k_1(t)\ y_a(t) = 0 \qquad (2.5.1)$$

maka dari definisi 2.5.2 (iv) maka

$$k_2(t)\ y_b'(t) - k_1(t)\ y_a'(t) = \frac{1}{p(t)} \qquad (2.5.2)$$

menurut (2.5.1) dan (2.5.2) didapat

$$k_2(t)\ y_b(t) - k_1(t)\ y_a(t) = 0 \longrightarrow k_2(t) = \frac{k_1(t)\ y_a(t)}{y_b(t)}$$

$$p(t)\left[\ k_2(t)\ y_b'(t) - k_1(t)\ y_a'(t)\right] = 1$$

$$p(t)\left(\frac{k_1(t)\ y_a(t)}{y_b(t)}\ .\ y_b'(t) - \frac{k_1(t)\ y_b(t)\ y_a'(t)}{y_b(t)}\right] = 1$$

$$p(t)\left[\ k_1(t)\ y_a(t)\ y_b'(t) - k_1(t)\ y_b(t)\ y_a'(t)\ \right] = y_b(t)$$

$$k_1(t)\ p(t)\left[\ y_a(t)\ y_b'(t) - y_b(t)\ y_a'(t)\ \right] = y_b(t)$$

$$k_1(t) = \frac{y_b(t)}{p(t)\ W(y_a, y_b)}$$

analog untuk $k_2(t)$ didapat

$$k_2(t) = \frac{y_a(t)}{p(t)\ W(y_a,y_b)}$$

Karena p positif pada [a,b] dan $Ly_a = Ly_b = 0$

maka

$$y_b L y_a - (L y_b) y_a = \left\{ \frac{d}{dx} \left[p(x) \left[y_b(x) y_a'(x) - y_a(x) y_b'(x) \right] \right] \right\}$$

$$= 0$$

Ini berarti

$$p(x) \left[y_b(x)\ y_a'(x) - y_a(x)\ y_b'(x) \right] = K \qquad (2.5.3)$$

dengan K suatu konstanta tidak nol, karena $p > 0$ dan $W(y_a,y_b) \neq 0$

Dengan demikian

$$G(x,t) = \begin{cases} k_1(t)\ y_a(x) & a \le x \le t \\ k_2(t)\ y_b(x) & a \le x \le b \end{cases} \qquad (2.5.4)$$

merupakan fungsi Green dari persamaan differensial $Ly = 0$ dengan syarat batas di $x = a$ dan $x = b$.