BAB III

KONSEP DASAR PROGRAM NON LINIER

Sebagai dasar untuk pembahasan bab inti maka pada bab ini akan dibahas mengenai bentuk program kuadratik. Dan sebelumnya akan diberika mengenai himpunan konvek dan fungsi konvek serta matriks proyeksi, yang semua itu akan mendasari dan akan mempermudah dalam pembahasan bab inti. Untuk itu dapat dijelaskan sebagai berikut :

3.1. HIMPUNAN KONVEK DAN FUNGSI KONVEK

<u>Definisi 3.1.1.</u> :

Himpunan titik-titik K didalam R^n disebut konvek jika untuk setiap dua titik x_i dan x_j ϵ K $(i \neq j)$ dapat ditemukan $x \epsilon K$ sedemikian sehingga :

$$x = \lambda x i + (1-\lambda)x_j \qquad 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad (3.1)$$

<u>Definisi 3.1.2</u> :

Suatu fungsi $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

R^n = Ruang berdimensi n dan $x \epsilon R^n$ adalah fungsi konvek ϵ K jika untuk setiap dua titik x_i, x_j, $(i \neq j)$ berlaku:

$$f(\lambda x_i + (1-\lambda)x_j) \le \lambda f(x_i) + (1-\lambda)\ f(x_j) \qquad (3.2)$$

dimana ; $0 \le \lambda \le 1$

Definisi 3.1.3 :

Suatu fungsi $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

R^n = ruang dimensi n dan $x \in R^n$ adalah fungsi konkaf jika berlaku :

$$f(\lambda x_i + (1-\lambda)x_j \ge \lambda f(x_i) + (1-\lambda)\ f(x_j). \qquad (3.3)$$

dimana ; $0 \le \lambda \le 1$

Teorema 3.1 :

jika f(x) konkaf dalam himpunan konvek K maka -f(x) adalah fungsi konvek.

Bukti :

Ambil $x_1, x_2 \in K$

f(x) fungsi konkaf dalam himpunan konvek K maka :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$$-f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant -\lambda f(x_1) - (1-\lambda)f(x_2)$$

$$-f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda(-f(x_1)) + (1-\lambda)(-f(x_2))$$

-f(x) adalah konvek dimana f(x) konkaf

Teorema 3.2 :

Jika f(x) fungsi konvek dalam himpunan konvek K maka -f(x) adalah konkaf.

Bukti :

Ambil x_1, $x_2 \in K$

f(x) fungsi konvek dalam himpunan konvek K maka menurut definisi:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$-f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geqslant -\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)$$

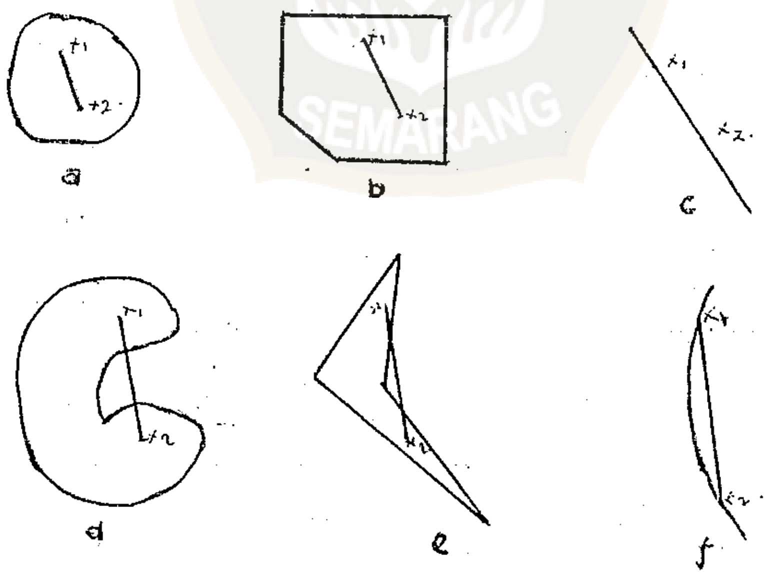
$$-f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda(-f(x_1)+(1-\lambda)(-f(x_2))$$

-f(x) adalah konkaf dimana f(x) konvek

Definisi 3.1.4 :

Fungsi Linier adalah fungsi konvek sekaligus fungsi konkaf, sehingga dipenuhi :

$$f(\lambda x_i + (1-\lambda)x_j) = \lambda f(x_i) + (1-\lambda) f(x_j) \qquad (3.4)$$



Gambar 3. Himpunan konvek dan non konvek.

- Gambar a, b dan c adalah himpunan konvek
- Gambar d, e dan f adalah himpunan non konvek

Teorema 3.3 :

Jika $Q(X) = P'X + X'CX$ berada di dalam himpunan konvek K dan C adalah matriks semi definite positif maka $Q(X)$ adalah fungsi konvek pada K.

Bukti :

Karena C semi definite positif, maka menurut definisi (2.1.9); $|C_n| \geq 0$ sehingga :

$$\lambda\ X'CX \;\geq\; \lambda^2\ X'CX \quad \text{untuk} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

ambil dua titik berbeda X_i, X_j ϵK maka :

$$\lambda\ Q(X_i) + (1-\lambda)Q(X_j) =$$

$$= \lambda\ \{P'X_i + X_iCX_i\} + \{(1-\lambda)\}\ \{P'X_j + X_j'CX_j\}$$

$$= \lambda P'X_i + (1-\lambda)P'X_j + \lambda X_i'CX_i + (1-\lambda)X_j'CX_j.$$

$$= \lambda P'X_i + (1-\lambda)P'X_j + \lambda X_i'CX_i - \lambda X_j'CX_j + X_j'CX_j$$

$$= \lambda P'X_i + (1-\lambda)P'X_j + \lambda X_j'C(X_i-X_j) + \lambda(X_i-X_j)'CX_j$$

$$+ \lambda(X_i - X_j)'C(X_i-X_j) + X_j'CX_j$$

$$\geq \lambda P'X_i + (1-\lambda)P'X_j + \lambda X_j'C(X_i-X_j) + \lambda(X_i-X_j)'CX_j +$$

$$\lambda 2(X_i-X_j)'C(X_i-X_j) + X_j'CX_j$$

$$= \lambda P'X_i + (1-\lambda)P'X_j + \{\lambda(X_i-X_j)\}'C\{\lambda(X_i-X_j) + X_j\}$$

$$= P'\{\lambda X_i + (1-\lambda)X_j\} + \{\lambda X_i + (1-\lambda)X_j\}'C\{\lambda X_i + (1-\lambda)X_j\}$$

$$= Q\{\lambda X_i + (1-\lambda)X_j\}$$

Jadi :

$$\lambda Q(X_i) + (1-\lambda)Q(X_j) \geq Q\{\lambda X_i + (1-\lambda)X_j\}$$

sehingga:

$$QC\{\lambda X_i + (1-\lambda)X_j\} \leq \lambda Q(X_i) + (1-\lambda)Q(X_j)$$

menurut definisi (3.1.2) adalah konvek.

3.2. MATRIKS PROYEKSI

Pandang n-vektor yang bebas linier yaitu $a_1, \ldots, a_n$ didalam ruang R^n berdimensi n. n-vektor tersebut berada didalam R^n dengan demikian tiap-tiap n-vektor dapat dinyatakan X sebagai kombinasi linier.

$$X = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j \qquad (3.5)$$

a_j disebut sebagai basis dari R^n dan λ_j sebagai koordinat-koordinat X. Selanjutnya ambil q-vektor dari n-vektor tersebut dan sebut saja vektor-vektor tersebut adalah a1, ..., aq. Dan q-vektor ini adalah vektor-vektor bebas linier dan berdimensi q, sebagai himpunan bagian dari X didalam Rn sehingga dapat dituliskan sebagai :

$$X = \lambda_1 a_1 + \lambda_{2a2} + \ldots + \lambda_q a_q$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \lambda_j a_j \qquad (3.6)$$

atau dapat disederhanakan :

$$X = A_q \lambda \qquad (3.7)$$

dimana :

$$A_q = (a_1, \ldots, a_q) \qquad \lambda' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$$

Untuk mewakili q-vektor yang bebas linier tersebut diberikan $\bar{D}$. Sehingga jika $q = n$ maka $\bar{D}$ sama dengan R^n dan untuk $q = 0$ maka $\bar{D}$ merupakan vektor nol.

Persamaan $a'_j x = 0$ didefinisikan sebagai hyperplane H_j didalam R^n yang mana melewati titik asal.

Interseksi dari q-hyperplane dari H_1 sampai H_q dengan dimensi $n - q$ dinotasikan dengan D. Sehingga D adalah himpunan dari semua X yang memenuhi :

$$a'_j x = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, q \qquad (3.8)$$

secara umum :

$$A_q X = 0 \qquad (3.9)$$

untuk $q = n$ maka D merupakan vektor nol, untuk $q = 0$ maka D sama dengan R^n.

Dengan demikian vektor a_1 hingga a_q adalah tegak lurus terhadap D. Oleh karena itu $\bar{D}$ dan D orthogonal, sehingga $Y'Z = 0$ untuk semua Y didalam D dan Z didalam $\bar{D}$. Hanya titik asal saja yang bersama-sama berada pada D dan $\bar{D}$. D dan $\bar{D}$ bersama-sama membentuk rentangan ruang R^n berdimensi n. Dengan demikian n-vektor X dalam R^n dapat dituliskan :

$$X = X_D + X_{\bar{D}} \tag{3.10}$$

dimana X_D berada pada D dan $X_{\bar{D}}$ berada pada $\bar{D}$. Karena adanya D dan $\bar{D}$ orthogonal maka selanjutnya dapat dinyatakan bahwa :

$$X_D X_{\bar{D}} = 0 \tag{3.11}$$

Jika X berada pada D maka $X_D = X$ dan $X_{\bar{D}} = 0$

Jika X berada pada $\bar{D}$ maka $X_D = 0$ dan $X_{\bar{D}} = X$

Dikatakan bahwa X_D adalah proyeksi X pada D dan $X_{\bar{D}}$ adalah proyeksi X pada $\bar{D}$.

Proyeksi X_D dapat dinyatakan sebagai :

$$X_D \text{ berada didalam D sehingga } X_D'(X - X_D) = 0 \tag{3.12}$$

Selanjutnya didapatkan karakteristik minimal :

$$|X_D - X| < |Y - X| \text{ untuk } Y \neq X_D \text{ didalam D} \tag{3.13}$$

Demikian juga untuk $X_{\bar{D}}$:

$$X_{\bar{D}} \text{ didalam } \bar{D} \text{ dan } (X - X_{\bar{D}})'X_{\bar{D}} = 0 \tag{3.14}$$

Didapatkan karakteristik minimal :

$$|X_{\bar{D}} - X| < |Z - X| \quad \text{untuk } Z \neq X_{\bar{D}} \text{ didalam } \bar{D} \qquad (3.15)$$

Proyeksi X_D dapat diperoleh dengan cara mengalikan X dengan P_q, dapat dituliskan :

$$X_D = P_q X \qquad (3.16)$$

Matriks proyeksi P_q diperoleh dengan :

$$P_q = I - A'_q (A_q A'_q)^{-1} A_q \qquad (3.17)$$

Matriks $A_q A'_q$ adalah non singular, kolom dari A'_q adalah bebas linier, sehingga mempunyai invers.

Ternyata $P'_q = P_q$Untuk proyeksi terhadap $\bar{D}$:

$$\begin{aligned} \bar{P}_q &= I - P_q \\ &= A'_q (A_q A'_q)^{-1} A_q \end{aligned} \qquad (3.18)$$

Diberikan Y didalam D maka $A_q y = 0$ sehingga :

$$\begin{aligned} P_q Y &= Iy - A'_q (A_q A'_q)^{-1} A_q Y \\ &= Y \end{aligned} \qquad (3.19)$$

Karena Y berada di D sehingga Y tegak lurus terhadap A_q dan $A_q Y = 0$ maka :

$P_q Y = Y$

Untuk semua $Z \in \bar{D}$ maka $Z = A'_q \lambda$ untuk semua λ. Maka :

$$P_qZ = A_q'\lambda - A_q'(A_qA_q')^{-1}A_qA_q'\lambda = A_q'\lambda - A_q'\lambda = 0$$

dimana ; $(A_qA_q')^{-1}A_qA_q' = I$

$$P_qZ = A_q'(A_qA_q')^{-1}A_qA_q'\lambda$$
$$= A_q'I\lambda = A_q'\lambda = Z \qquad (3.20)$$

Dalam keadaan khusus :

$$P_qa_j = 0 \quad \text{untuk } j = 1, \ldots, q \qquad (3.21)$$

Dapat disederhanakan :

untuk $Y \in D$ maka $P_qY = Y$ dan $\bar{P}_qY = 0$ (3.22)

untuk $Z \in \bar{D}$ maka $P_qZ = 0$ dan $\bar{P}_qZ = Z$ (3.23)

Selanjutnya dapat dikatakan bahwa P_qX adalah proyeksi X pada D dan $\bar{P}_qX$ adalah proyeksi X pada $\bar{D}$, sehingga :

$$X_{\bar{D}} = \bar{P}_qX \qquad (3.24)$$

Syarat perlu dan syarat cukup dari n-vektor X yang bebas linier berada pada a_1 sampai a_q jika dipenuhi :

$$P_qX = 0 \qquad (3.25)$$

berarti bahwa vektor tersebut berada didalam $\bar{D}$. Persamaan (3.7) digandakirikan dengan $(A_qA_q')^{-1}A_q$ didapatkan :

$$(A_q A'_q)^{-1} A_q X = \lambda \qquad (3.26)$$

Jika q = n, matriks A_q mempunyai invers sehingga :

$$(A_n A'_n)^{-1} = (A'_n)^{-1} A_n^{-1}$$

sehingga :

$$P_n = I - A'_n (A'_n)^{-1} A_n{-1} A_n = I - I = 0 \qquad (3.27)$$

Ini berarti bahwa proyeksi terhadap suatu titik akan menghasilkan vektor nol. Keadaan ini dapat didefinisikan bahwa $P_o = I$.

Selanjutnya didapatkan matriks proyeksi

$$P_q P_j = P_j \;.\; \bar{P}_q \bar{P}_j = \bar{P}_q \quad \text{untuk } j = q + 1 \ldots n \qquad (3.28)$$

$$P_q P_j = P_q \;.\; \bar{P}_q \bar{P}_j = \bar{P}_j \quad \text{untuk } j = 1 \ldots q \qquad (3.29)$$

Jika $P_q X \neq 0$ maka :

$$X' P_q X > 0$$

sehingga :

$$\begin{aligned} X' P_q X &= (\bar{P}_q X + P_q X) P_q X \\ &= (P_q X) P_q X \\ &= |P_q X|^2 > 0 \end{aligned} \qquad (3.30)$$

untuk a_q adalah bebas linier dari a_1 sampai a_{q-1} maka :

$$P_{q-1} a_q \neq 0 \qquad (3.31)$$

Selanjutnya digunakan λ_q untuk menunjukkan koefisien a_q didalam $\bar{P}_q X$ dari a_1 sampai a_q, maka :

$$\bar{P}_q X = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j a_j$$

$$a'_q P_{q-1} X = a'_q P_{q-1}(P_q X + \bar{P}_q X)$$

$$= a'_q P_{q-1}(P_q X + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j a_j)$$

$$= a'_q P_q X + a'_q P_{q-1} \lambda_q a_q$$

$$= \lambda_q a'_q P_{q-1} a_q$$

$$= \lambda_q |P_{q-1} a_q|^2 \qquad (3.32)$$

$$P_{q-1}X = P_q X + P_{q-1} \lambda_q a_q$$

$$|P_{q-1}X| = |P_q X|^2 + \lambda_q |P_{q-1} a_q|^2 + 2(P_q X)(\lambda_q P_{q-1} a_q)$$

$$= |P_q X|^2 + \lambda_q |P_{q-1} a_q|^2 + 2 \lambda_q X P_q a_q$$

$$= |P_q X|^2 + \lambda_q |P_{q-1} a_q|^2 \qquad (3.33)$$

maka :

$$|P_{q-1}X| > |P_q X| \text{ untuk } \lambda_q \neq 0 \qquad (3.34)$$

Secara umum dituliskan :

$$|P_q X| \leq |P_{q-1} X| \leq \dots \leq |P_o X| = |X| \qquad (3.35)$$

Contoh :

Diberikan suatu vektor $X \in R^2$,

$$-3/5\ X_1 - 4/5\ X_2 + 8/5 = 0 \quad \text{untuk } q = 1$$

$$\bar{D} = \{X : X \in R^2 , \quad -3/5X_1 - 4/5X_2 = 0\}$$

$$D = \{X : X \in R^2 , \quad X_2 = 4/3X_1\}$$

Penyelesaian :

$A_1 = (-3/5 \ -4/5)$

Hitung :

$$\bar{P}_q = A_q'(A_qA_q')^{-1}A_q$$

$$\bar{P}_1 = A_1'(A_1A_1')^{-1}A_1$$

$$A_1A_1' = [-3/5 \ -4/5] \begin{bmatrix} -3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix} = [I]$$

$$[A_1A_1']^{-1} = I$$

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} -3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix} [I] \ [-3/5 \ -4/5]$$

$$= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = I - \bar{P}_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9/25 & 12/25 \\ 12/25 & 16/25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16/25 & -12/25 \\ -12/25 & 9/25 \end{bmatrix}$$

ambil $x = (2 \quad 1)'$

maka :

$$X_{\bar{D}} = \bar{P}_1 X = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$$

$X_{\bar{D}} = (6/5\ ,\ 8/5)$

$$X_D = P_q X = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$$

$X_D = (4/5\ ,\ -3/5)$

$X_D \in D$ dan $X_{\bar{D}} \in \bar{D}$

Dibuktikan bahwa D orthogonal terhadap $\bar{D}$

$$X_D\ X_{\bar{D}} = X_D\ X_{\bar{D}}$$

$$= [4/5 \quad -3/5]\begin{bmatrix} 6/5 \\ 8/5 \end{bmatrix} = [0]$$

$$X = X_D + X_{\bar{D}}$$

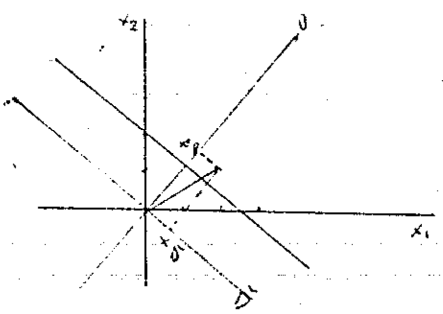
$$= \begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6/5 \\ 8/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$|X| = \sqrt{5} \quad |X_D| = \sqrt{\frac{100}{25}} = 2$

$|X_D| = \sqrt{\frac{16+9}{25}} = 1$

terbukti bahwa D dan $\bar{D}$ orthogonal

$$|X| \geq |P_{q-1}|$$



Dari soal di atas jika diambil q = n = 2, maka :

$$\bar{D} : -3/5X_1 - 4/5X_2 = 0$$

$$: 4/3X_1 - X_2 = 0$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3/5 & -4/5 \\ 4/3 & -1 \end{bmatrix} \qquad A'_2 = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/3 \\ -4/5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}_2 = A'_2(A_2A'_2)-1A_2$$

$$A_2A'_2 = \begin{bmatrix} -3/5 & -4/5 \\ 4/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/5 & 4/3 \\ -4/5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9+16}{25} & \frac{-12+12}{15} \\ \frac{-12}{15}+\frac{4}{5} & \frac{16}{9}+1 \end{bmatrix}$$

$$A_2A'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25/9 \end{bmatrix}$$

$$(A_2A'_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9/25 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}_2 = \begin{bmatrix} -3/4 & 4/3 \\ -4/5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9/25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/5 & -4/5 \\ 4/3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3/5 & 36/25 \\ -4/5 & -9/25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/5 & -4/5 \\ 4/3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{25}+\frac{144}{225} & \frac{12}{25}-\frac{36}{75} \\ \frac{12}{25}-\frac{36}{75} & \frac{16}{25}+\frac{9}{25} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = I - \bar{P}_2$$

$$= 0$$

Ambil titik (2,1) sehingga :

$$\bar{P}_2X = X_{\bar{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$X_{\bar{D}} = (2,1)$

$P_2X = 0$

$X_D = 0$

$|P_2X| = \sqrt{5}$, $|P_2X| = 0$

Untuk q = 0 maka dapat diselesaikan sebagai berikut :

$P_o = 0$

Sehingga : $P_q = I - \bar{P}_q$

$P_o = I - 0$

$P_o = I$

didapat :

$$P_oX = X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} X_D = (2,1) \\ X_{\bar{D}} = (0,0) \end{matrix}$$

Secara umum dapat dibuktikan bahwa :

$|P_qX| \leq |P_{q-1}X| < |P_{q-2}X| \ldots < PoX = X$

$|P_2X| \leq |P_1X| < |PoX| \longrightarrow 0 < 1 < \sqrt{5}$

3.3. BENTUK KUADRATIK

Bentuk kuadratik dengan n-variabel $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ dapat dituliskan sebagai berikut ;

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = {} & c_{11}x^2 + 2c_{12}x_1x_2 + \ldots\ldots\ldots +2c_{1n}x_1x_n \\
& + c_{22}x_2 + 2c_{23}x_2x_3 + \ldots\ldots\ldots +2c_{2n}x_2x_n \\
& + c_{33}x_3 + \ldots\ldots\ldots + 2c_{3n}x_3x_n + \ldots\ldots + \\
& + \ldots\ldots\ldots + c_{nn}x_n \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

dengan koefisien-koefisien riil. Apabila persamaan tersebut simetris dengan $c_{ij} = c_{ji}$ maka persamaan diatas dapat ditulis :

$$
\begin{aligned}
F = {} & (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots c_{1n}x_n)\ x_1 \\
& +(c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots c_{2n}x_n)\ x_2 \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& +(c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots c_{nn}x_n)\ x_n \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

Jika koefisien-koefisien tersusun dalam bentuk matriks simetris C berukuran (nxn) dan variabel-variabel n-vektor x adalah riil, maka sisi kanan dari persamaan (3.37) menghasilkan suatu skalar. Yaitu hasil darivektor baris x' dikalikan dengan vektor kolom CX.

Dalam bentuk matriks persamaan (3.37) dapat dituliskan sebagai :

$$F(x) = X'CX \quad \text{dimana C matriks simetris}$$

Bentuk persamaan (3.37) mengalami perluasan yaitu :

$$
\begin{aligned}
F(x) = {} & p_1x_1 + p_2x_2 + \dots\dots\dots\dots + p_nx_n \\
& + (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots\dots\dots + c_{1n}x_n)\ x_1 \\
& + (c_{21}x1 + c_{22}x_2 + \dots\dots\dots + c_{2n}x_n)\ x_2 \\
& . \\
& . \\
& . \\
& + (c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots\dots\dots + c_{nn}x_n)\ x_n
\end{aligned}
$$

Sistim di atas dapat dalam disajikan dalam bentuk matrik

$$F(x) = p'X + X'CX$$

dimana :

p = matriks berukuran n x 1

X = matriks berukuran n x 1

C = matriks berukuran n x n

Dalam program non linier kita mengenal adanya fungsi-fungsi kendala. Terutama yang dapat penulis sajikan adalah kendala linier dan dapat disajikan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
h_1(x) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
h_2(x) &= a_{21}x + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x = b_2 \\
& . \\
& . \\
& . \\
h_n(x) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

dapat disederhanakan dalam bentuk matriks sebagai :

$$h_i(x) = a'_i x = b_i$$

Jika di dalam program kuadaratik dari fungsi obyektip untuk meminimalkan maka pada fungsi kendala digunakan tanda ≥ tetapi untuk kasus maksimal maka tanda ≥ diubah menjadi tanda ≤,yang dihasilkan dengan -1. Dengan demikian untuk program kuadratik berbentuk masalah maxsimal maka fungsi obyektif konkaf. Dalam keadaan ini F(x) dapat dituliskan dengan :

$F(x) = p'X - X'CX$ dimana C matriks semidefinit positip. Apabila fungsi obyektif tidak konvek atau konkaf maka tergantung dari program yang dipakai untuk menyesuaikan. Masing-masing program mempunyai keistimewaan sendiri-sendiri.