BAB II
KONSEP MATRIKS DAN VEKTOR

2.1. MATRIKS

2.1.1. Pengertian Matriks

<u>Definisi 2.1.1.</u>:

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil maupun kompleks) yang disusun secara empat persegi panjang, menurut baris dan kolom.

Dituliskan sebagai :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Dapat pula ditulis $A_{(mxn)}$ yang maksudnya matriks A berukuran m-baris dan n-kolom. a_{ij} adalah elemen dari baris ke-i dan kolom ke-j.

dimana : $i = 1,2,........m$

$j = 1,2,........n$

Definisi 2.1.2.:

Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks yang banyak baris sama dengan banyak kolom. Dengan demikian menurut definisi 1 dapat ditulis m = n.

Definisi 2.1.3.:

Diagonal utama suatu matriks bujur sangkar adalah elemen matriks a_{ij} dimana i = j.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Definisi 2.1.4.:

Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar yang element diagonal utamanya adalah satu dan elemen yang lainnya nol.

Contoh :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{atau } a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ untuk } i \neq j \\ 1 \text{ untuk } i = j \end{cases} \qquad (2.3)$$

Definisi 2.1.5.:

Kesamaan dua buah matriks adalah jika ada matrik A dan matriks B berukuran sama yaitu (mxn) dan berlaku $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j

dimana : $i = 1,2, \ldots m$

$j = 1,2, \ldots n$

Definisi 2.1.6.:

Transpose matrik adalah matriks yang dihasilkan dengan cara menukar baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Jika matriks A pada (2.1.1) ditranspose maka dapat ditulis :

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ a_{1n} & . & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.7.:

Matriks bujur sangkar akan simetris jika dan hanya jika dipenuhi $A' = A$

Definisi 2.1.8.:

Suatu matrik bujur sangkar simetris C dikatakan matriks definite positif jika semua determinan minor dari C

$$| C_1 | = c_{11} \qquad | C_2 | = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

$$| C_3 | = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad | C_n | = | c_n |$$

adalah positif.

<u>Definisi 2.1.9.</u>:

Matriks bujur sangkar simetris C dikatakan matriks semi definit positif jika dipenuhi ; $| C_n | \geq 0$

2.1.2. Operasi Matriks

<u>a. Penjumlahan matriks</u>

Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ adalah matriks yang berukuran sama $(m \times n)$, maka operasi penjumlahan A+B akan menghasilkan matriks $C = (c_{ij})$ dimana :

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

maka : A + B =

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0 & 1+2 \\ 4+1 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

b. Perkalian matriks

- *Perkalian matriks dengan skalar*

Perkalian matriks A dengan skalar ditentukan dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{in} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

- *Perkalian Matriks dengan matriks*

Perkalian dari suatu matriks A (m x n) dengan matriks B (n x q) maka akan dihasilkan matriks C (m x q).

Ditulis $C = (C_{ik})$ dengan $C_{ik} = \Sigma \; a_{iv} \, b_{vk}$

untuk $i = 1 \ldots\ldots m$

$k = 1 \ldots\ldots q$

sehingga dapat dituliskan A.B = C

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{in} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{i1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{iq} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nq} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma a_{1v}b_{v1} & \Sigma a_{1v}b_{v2} & \cdots & \Sigma a_{1v}b_{vq} \\ \vdots & & & \vdots \\ \Sigma a_{mv}b_{v1} & \Sigma a_{mv}b_{v2} & \cdots & \Sigma a_{mv}b_{vq} \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

maka perkalian matriks dapat dilakukan apabila banyaknya kolom dari matriks pertama sama dengan banyaknya baris pada matriks ke dua.

Pada perkalian matriks berlaku hukum asosiatif

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

tetapi tidak berlaku hukum komutatif

$$AB \neq BA$$

Transpose dari perkalian matriks dapat dituliskan :

$$(AB)' = B'A' \qquad (2.7)$$

Secara umum :

$$(A.B \ldots\ldots\ldots Q)' = Q' \ldots\ldots\ldots\ldots B'A' \qquad (2.8)$$

2.1.3. Matriks Invers

Definisi 2.1.10. :

Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n disebut mempunyai invers apabila ada suatu matriks B, sehingga $AB = I_n$. Matriks B disebut invers matriks A dan dinotasikan dengan A^{-1} merupakan matriks bujur sangkar berordo n.

Contoh :

Carilah invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Misal :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \text{ maka berlaku } A.A^{-1} = I$$

Sehingga :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Menurut definisi kesamaan matriks maka didapatkan

$2a+c = 1$ $\quad$ $4a+3c = 0$

$2b+d = 0$ $\quad$ $4b+3d = 1$

Bila disubstitusikan akan didapatkan

$a = 3/2$ $\quad$ $b = -1/2$ $\quad$ $c = -2$ $\quad$ $d = 1$

Jadi :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks yang berordo besar, katakanlah $n \geq 3$ dapat diselesaikan dengan beberapa metode dan akan dibahas tersendiri.

a. Matriks invers dengan adjoint

Adjoint dari matriks A (n x n)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Didefinisikan dengan :

$$A_{adj} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdot & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ A_{1n} & \cdot & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

dimana :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1\ j-i} & a_{1\ j+1} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{i-1\ 1} & \cdot\cdot & a_{i-1\ j-i} & a_{i-1\ j+1} & \cdot\cdot & a_{i-1\ n} \\ a_{i+1\ 1} & \cdot\cdot & a_{i+1\ j-i} & a_{i+1\ j+1} & \cdot\cdot & a_{i+1\ n} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nj-i} & a_{nj+1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Jadi dikatakan kofaktor A_{ij} apabila matrik tersebut untuk baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan kemudian dicari determinannya dan mengalihkannya dengan $(-1)^{i+j}$.

Contoh:

Carilah Adjoint dari matrik A :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Dicari kofaktor dari kesembilan elemen dari A sbb:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}=-18 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 5$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}= 2 \qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}=-10$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}= 4 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=-4$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}=-11 \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}=-8$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}= 14$$

$$\text{Jadi adjoint } A = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Dengan pertolongan matriks adjoint dapat dicari invers suatu matriks, menggunakan rumus :

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det (A)} \quad \text{dengan syarat } \det (A) \neq 0 \qquad (2.11)$$

Dari contoh di atas dapat dicari A^{-1}

$$\det A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = -46$$

$$\text{sehingga } A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$= -\frac{1}{46}\begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/23 & 11/46 & 5/23 \\ -1/23 & -7/25 & 2/23 \\ -2/23 & -5/46 & 4/23 \end{bmatrix}$$

<u>b. Mencari Invers Matriks dengan Partisi (sekatan)</u>

- Pengertian Partisi Matriks

Untuk matriks berukuran besar dapatdikerjakan dengan bertahap, dengan membagi matriks tersebut menjadi submatriks-submatriks(partisi).Apabila suatu matriks A dipecah-pecah menjadi submatriks submatriks dengan memberi sekatan-sekatan garis horisontal diantara dua baris dan garis vertikal diantara dua kolom, maka matriks tersebut dikatakan telah dipartisi.

Contoh :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix}$$

Misalnya dipartisi sebagai :

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \\ \hline g & h & j \end{array}\right] \text{ atau } \left[\begin{array}{c|cc} a & b & c \\ d & e & f \\ \hline g & h & j \end{array}\right] \text{ ataupun } \left[\begin{array}{c|cc} a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & j \end{array}\right]$$

Dan banyak cara untuk membuat partisi dari suatu matriks. Tetapi matriks berikut ini bukan termasuk dipartisi.

$$* \left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \\ \cline{1-2} g & h & j \end{array}\right] \qquad ** \left[\begin{array}{c|cc} \multicolumn{1}{c}{a} & b & c \\ \hline d & e & f \\ g & h & j \end{array}\right]$$

* garis horisontal tidak memisahkan seluruh baris ke-2 dan ke-3

** garis vertikal tidak memisahkan seluruh kolom ke-1 dan ke-2

Dengan menggunakan partisi matriks dapat dicari invers dari suatu matriks. Pandang matriks-matriks yang telah dipartisi.

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} T & U \\ V & W \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & U \\ V & W \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} PT+QV & PU+QW \\ RT+SV & RU+SW \end{bmatrix}$$

Perkalian di atas berlaku pula untuk matriks partisi dengan ukuran yang lain. Tetapi yang perlu diperhatikan cara melakukan partisi supaya perkalian dapat dilakukan. Det (A) = det (P) - det (Q) det (R), (asalkan P, Q, R, S bujur sangkar).

Pandang sekarang matriks bujur sangkar A berordo n yang mempunyai invers $A^{-1} = B$. Dapat dilakukan partisi sebagai berikut :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \underset{(p \times p)}{A_{11}} & \underset{(p \times q)}{A_{12}} \\ \hline \underset{(q \times p)}{A_{21}} & \underset{(q \times q)}{A_{22}} \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{c|c} \underset{(p \times p)}{B_{11}} & \underset{(p \times q)}{B_{12}} \\ \hline \underset{(q \times p)}{B_{21}} & \underset{(q \times q)}{B_{22}} \end{array}\right] \qquad (2.12)$$

Dimana : $p + q = n$

Karena $A^{-1} = B$ maka $AB = BA = I_n$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

(i) $A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = I_p$

(ii) $A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} = 0$

(iii) $B_{21} A_{11} + B_{22} A_{21} = 0$

(iv) $B_{21} A_{12} + B_{22} A_{22} = I_q$

Misalkan :

$B_{22} = L^{-1}$; dari :

(ii) $B_{12} = -(A_{11}^{-1} A_{12}) L^{-1}$

(iii) $B_{21} = -L^{-1} (A_{21} A_{11})^{-1}$

(i) $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} A_{12} B_{21}$

$= A_{11}^{-1} + (A_{11}^{1} A_{12})L^{-1}(A_{21} A_{11}^{-1})$

Bila disubstitusikan ke IV

$$-L^{-1} (A_{21} A_{11}^{-1}) A_{12} + L^{-1} A_{22} = I_q \qquad (2.13)$$

$L = A_{22} - (A_{21} A_{11}^{-1}) A_{12}$

$= A_{22} - A_{21} (A_{11} A_{12})$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$ hitung A^{-1} dengan partisi

Dapat dipartisi menjadi :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$ (dengan menggunakan adjoint)

$$A_{11}^{-1} A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = A_{22} - A_{21} (A_{11}^{-1} A_{12}) = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$L^{-1} = 1$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11} A_{12}) L^{-1} (A_{21} A_{11}^{-1})$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}{}^{-1}\ A_{12})\ L^{-1} = -\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = -L^{-1}\ (A_{21}\ A_{11}{}^{-1}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{22} = L^{-1} = 1$$

Diperoleh :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{21} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

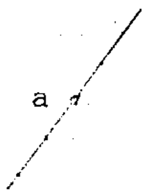
2.2. VEKTOR

2.2.1. Pengertian Vektor

<u>Definisi 2.2.1</u> :

Secara ilmu ukur vektor adalah suatu potongan garis/segmen yang mempunyai arah dan mempunyai panjang sesuai dengan besarnya skala. Dapat dinotasikan dengan á, á, A, A, atau AB maupun AB.

Gambar 1.



Sedangkan besarnya vektor biasa diberikan dengan simbol $|a|$ dan dirumuskan dengan :

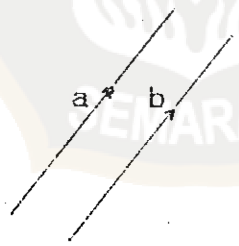
$$|a| = \sqrt{a\,\acute{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}} \qquad (2.14)$$

Dengan demikian jarak antara dua titik X_1 dan X_2 dapat dicari dengan $|X_2 - X_1|$

<u>Definisi 2.2.2</u> :

Dua buah vektor dikatakan sama, jika panjang dan arah sama (artinya mempunyai garis pembawa yang berimpit atau sejajar dengan arah yang sama). Jadi, vektor tidak tergantung kepada tempatnya, tetapi panjang dan arahnya.

Seperti gambar 2. $a = b$



Vektor kolom dari matriks (n x 1) yaitu sebuah matriks yang mana terdiri dari satu kolom dengan n elemen. Dapat dituliskan :

$$\acute{a} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n1} \end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

a_{i1} adalah komponen-komponen dari vektor á.Transpose dari vektor kolom adalah (1 x n) dikatakan vektor baris.

$$á = [a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}]$$

Definisi 2.2.3 :

Himpunan m-buah vektor $\{á_1, á_2, \ldots, á_m\}$ dikatakan bergantung linier (linearly dependent) bila terdapat skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ yang tidak semua nol, sedemikian sehingga dipenuhi :

$$\lambda_1 á_1 + \lambda_2 á_2 + \ldots + \lambda_m á_m = 0$$

Definisi 2.2.4 :

Himpunan m-buah vektor $\{á_1, á_2, \ldots, á_m\}$ dikatakan bebas linier (linearly independent) apabila terdapat skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$, sedemikian sehingga :

$$\lambda_1 á_1 + \lambda_2 á_2 + \ldots + \lambda_m á_m = 0$$

hanya dipenuhi jika :

$$\lambda_1, = \lambda_2 = \ldots, \lambda_m = 0$$

2.2.2. Kombinasi Linier

Definisi 2.2.5 :

Suatu vektor V dikatakan kombinasi linier dari vektor $\{á_1, á_2, \ldots, á_m\}$ bila terdapat skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sehingga dipenuhi :

$$V = \lambda_1 á_1 + \lambda_2 á_2 + \ldots + \lambda_m á_m$$

Contoh :

á = [2, 1, 2], b = [1, 0, 3], c = [3, 1, 5]

á merupakan kombinasi linier dari b dan c jika dipenuhi:

$$[2,\ 1,\ 2] = \lambda_1[1,\ 0,\ 3] + \lambda_2[3,\ 1,\ 5]$$

atau

$$2 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \qquad (1)$$

$$1 = 0\lambda_1 + \lambda_2 \qquad (2)$$

$$2 = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \qquad (3)$$

Terdapat tiga persamaan dengan 2 variabel (jika diselesaikan dengan substitusi dari persamaan (2) ke persamaan (1), maka didapatkan $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 1$

Dari nilai tersebut masukkan ke persamaan (3),ternyata dipenuhi pula. Jadi didapatkan :

$$á = -b + c$$

sehingga dipenuhi á merupakan kombinasi dari b dan c.

Teorema 2.1 :

Jika m (m > 1) vektor $\{á_1, á_2, \ldots, á_m\}$ bergantung linier, maka paling sedikit ter dapat satu vektor yang dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari vektor lainnya.

Bukti :

Karena $\{á_1, á_2, á_3, \ldots, á_m\}$ bergantung linier, maka paling sedikit satu diantara skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$

tidak nol, misalnya λ_p sehingga berlaku :

$$V = \lambda_1 á_1 + \lambda_2 á_2 + \ldots + \lambda_m á_m - \lambda_p á_p$$

$$= \lambda_1 á_1 + \lambda_2 á_2 + \ldots + \lambda_{p-1} á_{p-1} + \lambda_{p+1} á_{p+1} + \ldots + \lambda_m á_m$$

Karena $\lambda_p \neq 0$ maka :

$$U_p = \frac{\lambda_1}{\lambda_p} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_p} a_p - \ldots\ldots\ldots - \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} a_{p-1}$$

$$- \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} á_{p+1} - \ldots\ldots\ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_p} á_m$$

$$= \mu_1 á_1 + \mu_2 á_2 + \ldots + \mu_{p-1} á_{p-1} + \mu_{p+1} á_{p+1} \ldots \mu_m á_m$$

Jadi U_p kombinasi linier vektor-vektor lainnya.

<u>Teorema 2.2</u> :

Jika satu diantara m-vektor $\{á_1, á_2, \ldots, á_m\}$ adalah kombinasi linier vektor-vektor lainnya, maka m-vektor tersebut bergan-tung linier.

<u>Bukti :</u>

Misalnya $á_p$ adalah kombinasi linier dari himpunan vektor $\{á_1, á_2, \ldots, á_{p-1}, á_{p+1}, \ldots, á_m\}$

maka ;

$$á_p = \lambda_1 á_1 + \lambda_2 á_2 + \ldots + \lambda_{p-1} á_{p-1} + \lambda_{p+1} á_{p+1} + \ldots + \lambda_m á_m$$

bila $á_p$ pindah ruas diperoleh :

$$0 = \lambda_1 á_1 + \lambda_2 á_2 + \ldots + \lambda_{p-1} á_{p-1} - áp + \lambda_{p+1} á_{p+1} + \ldots + \lambda_m á_m$$

Ternyata tidak semua $\lambda_i = 0$ karena $\lambda_p = -1 \neq 0$

Jadi m-vektor tersebut bergantung linier.

Teorema 2.3 :

Jika m-vektor $\{á_1, á_2, \ldots, á_m\}$ bebas linier dan $(m + 1)$ vektor-vektor $\{á_1, á_2, \ldots, á_m, V\}$ bergantung linier maka V adalah kombinasi linier dari $\{á_1, á_2, \ldots, á_m\}$.

Bukti :

Karena $\{á_1, á_2, \ldots, á_m, V\}$ bergantung linier, maka pada persamaan $\lambda_1 á_1 + \lambda_2 á_2 + \ldots + \lambda_m á_m + \lambda_{m+1}$ terdapat $\lambda_i \neq 0$ dalam hal ini pastilah $\lambda_{m+1} \neq 0$ karena bila tidak demikian terjadi kontradiksi yaitu $\lambda_i \neq 0$ adalah diantara $i = 1, 2, \ldots, m$ yang mana :

$$\lambda_1 á_1 + \lambda_2 á_2 + \ldots + \lambda_m á_m + 0V = 0$$

$$\lambda_1 á_1 + \lambda_2 á_2 + \ldots + \lambda_m á_m = 0$$

berakibat $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ bergantung linier. Maka bila $\lambda_{m+1}V$ pindah ruas diperoleh :

$$-\lambda_{m+1}V = \lambda_1 á_1 + \lambda_2 á_2 + \ldots + \lambda_m á_m \quad \text{dan} \quad \lambda_{m+1} \neq 0$$

$$V = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}} á_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{m+1}} á_2 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} á_m$$

$$= \pi_1 á_1 + \pi_2 á_2 + \ldots + \pi_m á_m$$

Jadi V kombinasi linier dari $\{á_1, á_2, \ldots, á_m)$