BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Integral Tertentu

Definisi :

Andaikan f fungsi yang didefinisikan pada selang [a,b] pandang suatu partisi p pada selang [a,b] menjadi n bagian (tidak perlu berpanjang sama) memakai titik-titik $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ dan andaikan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Pada tiap selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$ ambil titik $\bar{x}_i$ (yang mungkin sebuah titik ujung). Tetapkan $|p|$ disebut norm p, menyatakan panjang selang bagian terpanjang dari partisi p. Jika $\lim_{|p| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$ ada, dikatakan f adalah terintegral pada selang [a,b]. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$, disebut integral tertentu (atau Integral Riemann) f dari a ke b diberikan oleh :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{|p| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i \qquad \ldots(2.1)$$

Teorema :

Andaikan f kontinu pada [a,b] dan andaikan F sebarang anti turunan dari f, maka

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) \qquad \ldots(2.2)$$

Bukti:

Andaikan partisi p pada selang [a,b] adalah suatu himpunan berhingga $\{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ sedemikian sehingga $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Maka

$$F(b)-F(a) = F(x_n)-F(x_{n-1})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+\ldots+F(x_1)-F(x_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - F(x_{i-1}) \right]$$

menurut teorema nilai rata-rata yaitu apabila F kontinu pada $[x_{i-1}, x_i]$ dan terdeferensialkan pada (x_{i-1}, x_i) maka paling sedikit ada satu titik $\bar{x}_i$ dalam (x_{i-1}, x_i) dimana $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

Jadi : $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$

Pada ruas kiri merupakan sebuah konstanta, pada ruas kanan merupakan jumlah Riemann f pada [a,b]. Apabila kedua ruas diambil limitnya untuk $|p| \longrightarrow 0$, maka diperoleh :

$$F(b) - F(a) = \lim_{|p| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)\ dx$$

Contoh :

Hitung $\int_2^5 (4x - 6x^2) dx$

Jawab : $\int_a^b (f(x) dx = F(b) - F(a)$

anti turunan atau integral dari $4x - 6x^2$ adalah $F(x) = 2x^2 - 2x^3$.

$$\int_2^5 (4x - 6x^2) dx = \left[2x^2 - 2x^3 \right]_2^5$$

$$= (2.5^2 - 2.5^3) - (2.2^2 - 2.2^3)$$

$$= (50 - 250) - (8 - 16)$$

$$= -192$$

2.2. Improper Integral

Definisi 2.2.1.

Integral tak wajar (improper integral) dengan batas tak berhingga.

1. Untuk salah satu batas integral tak berhingga

Definisi :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad \ldots(2.3)$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad \ldots(2.4)$$

Apabila limit di ruas kanan ada, maka integral tak wajar tersebut konvergen dan memiliki nilai yang tunggal, dan jika tidak maka integral tersebut divergen.

2. Untuk kedua batas integral tak berhingga

Definisi :

Apabila $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ dan $\int_{0}^{-\infty} f(x)\,dx$ konvergen,

maka dikatakan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergen dengan nilai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \ldots(2.5)$$

dalam hal yang lain $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ dinamakan divergen.

Contoh :

1. Tentukan $\int_{-\infty}^{-1} x\, e^{-x^2}\,dx$

Penyelesaian :

$$\int_{-\infty}^{-1} x\, e^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-1} x\, e^{-x^2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2} \int_{a}^{-1} e^{-x^2}\,dx^2$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2} \Big[-e^{-x^2}\Big]_{a}^{-1}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2} \left[-e^{-1} + e^{-a^2}\right] = -\frac{1}{2} e^{-1} + 0$$

$$= -\frac{1}{2e}$$

Jadi $\int_{-\infty}^{-1} x\, e^{-x^2} dx$ konvergen.

2. Tentukan $\int_{0}^{\infty} \sin x \, dx$

Penyelesaian :

$$\int_0^\infty \sin x \, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^\infty \sin x \, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\cos x\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[1 - \cos b\right]$$

$$= 1 - \lim_{b\to\infty} \text{Cos } b$$

Jadi $\int_0^\infty \sin x \, dx$ divergen karena $\lim_{b\to\infty} \cos b$ tidak ada.

3. Tentukan $\int_{-\infty}^{\infty} 1/(1+x^2)\, dx$.

Penyelesaian :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)} dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1+x^2)} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\arctan x\right]_0^b + \lim_{b\to-\infty} \left[\arctan x\right]_b^0$$

$$= \lim_{b\to\infty} \arctan b + \lim_{b\to-\infty} - \arctan b$$

$$= \frac{\Pi}{2} + \frac{\Pi}{2} = \Pi$$

Jadi $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx$ konvergen.

4. Tentukan $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx$

Penyelesaian :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx \quad ..(*)$$

sehingga terlebih dahulu menghitung $\int_{A}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx$

$$\int_{A}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = \lim_{B \to \infty} \int_{A}^{B} \frac{\cos x}{x}\, dx$$

$$= \lim_{B \to \infty} \left\{ \frac{\sin x}{x} + \int_{A}^{B} \frac{\sin x}{x^2}\, dx \right\}$$

$$= \lim_{B \to \infty} \left\{ \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - 2 \int_{A}^{B} \frac{\cos x}{x^3}\, dx \right\}$$

$$= \lim_{B \to \infty} \left\{ \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - 2 \frac{\sin x}{x^3} - 6 \int_{A}^{B} \frac{\sin x}{x^4}\, dx \right\}$$

$$= \lim_{B \to \infty} \left\{ \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - 2 \frac{\sin x}{x^3} + 6 \frac{\cos x}{x^4} + 24 \int_{A}^{B} \frac{\cos x}{x^5}\, dx \right\}$$

$$= \lim_{B \to \infty} \left\{ \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - 2 \frac{\sin x}{x^3} + 6 \frac{\cos x}{x^4} + 24 \frac{\sin x}{x^5} + \right.$$

$$\left. + 120 \int_{A}^{B} \frac{\sin x}{x^6}\, dx \right\}$$

$$= \lim_{B \to \infty} \left\{ \left[\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - 2 \frac{\sin x}{x^3} + 6 \frac{\cos x}{x^4} + 24 \frac{\sin x}{x^5} + \right. \right.$$

$$\left. \left. - 120 \frac{\cos x}{x^6} \right]_{A}^{B} - 6! \int_{A}^{B} \frac{\cos x}{x^7}\, dx \right\}$$

$$= \lim_{B \to \infty} \left\{ \frac{\sin B}{B} - \frac{\cos B}{B^2} - 2 \frac{\sin B}{B^3} + 6 \frac{\cos B}{B^4} + 24 \frac{\sin B}{B^5} + \right.$$

$$- 120 \frac{\cos B}{B^6} - \frac{\sin A}{A} + \frac{\cos A}{A^2} + 2 \frac{\sin A}{A^3} - 6 \frac{\cos A}{A^4} - 24 \frac{\sin A}{A^5} +$$

$$\left. + 120 \frac{\cos A}{A^6} - 6! \int_{A}^{B} \frac{\cos x}{x^7}\, dx \right\}$$

Maka :

$$\int_{A}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx \simeq - \frac{\sin A}{A} + \frac{\cos A}{A^2} + 2 \frac{\sin A}{A^3} - 6 \frac{\cos A}{A^4} - 24 \frac{\sin A}{A^5} +$$

$$+ 120 \frac{\cos A}{A^6} + \ldots$$

$$\simeq \frac{\cos A}{A}\left\{\frac{1}{A} - \frac{3!}{A^3} + \frac{5!}{A^5} - \ldots\right\} -$$

$$+ \frac{\sin A}{A}\left\{1 - \frac{2!}{A^2} + \frac{4!}{A^4} - \ldots\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx$$

$$\simeq \lim_{A \to -\infty} \left[\frac{\cos A}{A}\left\{\frac{1}{A} - \frac{3!}{A^3} + \frac{5!}{A^5} - \ldots\right\} - \right.$$

$$\left. + \frac{\sin A}{A}\left\{1 - \frac{2!}{A^2} + \frac{4!}{A^4} - \ldots\right\} \right]$$

$$\simeq 0$$

Definisi 2.2.2.

Integral tidak wajar dengan integran tak berhingga

1. Jika f(x) manjadi tidak terbatas pada titik ujung $x = a$ dari interval $a \le x \le b$ maka didefinisikan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \qquad \ldots(2.6)$$

   Apabila limit pada ruas kanan ada, maka dinamakan integral ruas kiri konvergen dan jika tidak maka divergen.

2. Jika f(x) menjadi tak terbatas di titik ujung $x = b$ dari interval $a \le x \le b$, maka didefinisikan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad \ldots(2.7)$$

   Apabila limit di ruas kanan ada, maka integral di ruas kiri konvergen dan jika tidak maka divergen.

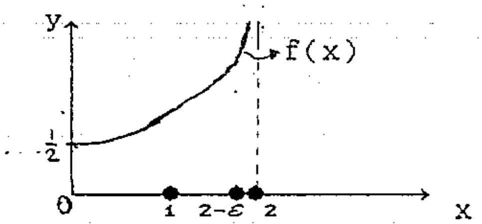
3. Jika f(x) menjadi tidak terbatas hanya disebuah titik dalam (interior point) $x = x_o$ dari interval $a \le x \le b$, maka didefinisikan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{x_0-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx \qquad \ldots(2.8)$$

   Integral ruas kiri konvergen atau divergen tergantung pada apakah limit di ruas kanan ada atau tidak.

Contoh :

1. Hitung $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$



Penyelesaian :

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

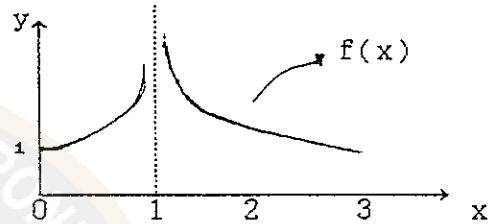
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\arcsin \frac{x}{2} \right]_0^{2-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin \frac{2-\varepsilon}{2} - \arcsin 0$$

$$= \arcsin 1 - 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

2. Hitung $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$



Penyelesaian :

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{1+\varepsilon_2}^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \left[3(x-1)^{1/3} \right]_0^{1-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \left[3(x-1)^{1/3} \right]_{1+\varepsilon_2}^{3}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \left[3(-\varepsilon)^{1/3} - 3(-1)^{1/3} \right] + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[3.2^{1/3} - 3(\varepsilon_2)^{1/3} \right]$$

$$= 3 + 3.2^{1/3}$$

$$= 6,78$$

Definisi : 2.2.3.

Nilai utama Cauchy (Cauchy Principal Value) jika f(x) menjadi tidak terbatas hanya disebuah titik x_o dari interval $a \le x \le b$, maka didefinisikan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_a^{x_o - \varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_o+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right] \quad \ldots(2.9)$$

Apabila limitnya ada, maka nilai pembatas (limiting Value) ini dinamakan sebagai nilai utama Cauchy dari integral.

Contoh : Hitung $\int_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3}$

Penyelesaian :

$$\int_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1+\varepsilon}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[- \frac{1}{2(x-1)^2} \Bigg|_{-1}^{1-\varepsilon} + - \frac{1}{2(x-1)^2} \Bigg|_{1+\varepsilon}^{5} \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[- \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2.16} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{32} \right] = \frac{3}{32}$$

2.3. Fungsi Kontinu Setiap Segmennya

Definisi :

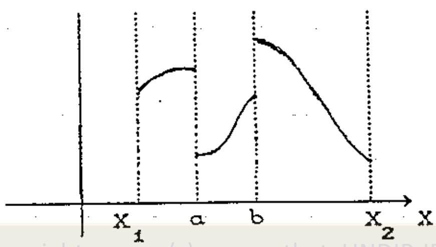
Suatu fungsi f(x) disebut kontinu setiap segmennya pada interval tertentu kalau :

1. Interval tersebut bisa dibagi kedalam beberapa interval lebih kecil yang terhingga dimana f(x) pada tiap-tiap interval tersebut juga kontinu.
2. Limit dari f(x) ketika x mendekati ujung-ujungnya dari setiap sub interval adalah terhingga,

Atau dengan istilah lain bahwa fungsi yang kontinu setiap segmennya adalah suatu fungsi yang mempunyai sejumlah berhingga dari ketidak kontinuannya.

Contoh :

Fungsi f(x) pada gambar berikut merupakan fu n gsi yang kontinu setiap segmennya.



Fungsi tersebut tidak kontinu pada x = a dan x = b

2.4. Fungsi Mutlak dapat Terintegralkan

Definisi :

Suatu fungsi f disebut mutlak dapat terintegralkan pada interval [a,b] (dimana a mungkin $-\infty$ dan b mungkin ∞) Jika ada sejumlah berhingga titik-titik dalam [a,b] yaitu $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$, sedemikian sehingga

1. $f \in R$ pada setiap sub interval berhingga dari [a,b] yang tidak satupun memuat titik-titik $c_0, c_1, \dots c_n$.
2. Untuk $k = 1,2,\dots n$, integral $\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx$

   salah satu ada, untuk integral Riemann tertentu atau untuk improper integral Riemann konvergen mutlak.

Apabila kondisi-kondisi ini dipenuhi, ditulis $f \in R\,(a^*,b)$ dan didefinisikan :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx \qquad \dots(2.10)$$

Lemma:

Jika fungsi f dapat terintegral secara mutlak pada interval [a,b] (dimana a mungkin $-\infty$ dan b mungkin ∞) maka untuk setiap bilangan riil β berlaku :

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(\alpha x + \beta)\,dx = 0 \qquad \dots(2.11)$$

Bukti lemma:

Akan dibuktikan dua kali yaitu :

I. Untuk fungsi f terintegral secara Riemann pada [a,b] maka untuk setiap bilangan riil β berlaku:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(\alpha x + \beta)\,dx = 0 \qquad \dots(*)$$

atau untuk setiap $\varepsilon>0$ yang diberikan dapat ditemukan $A>0$ sedemikian sehingga $\left|\int_a^b f(x)\sin(\alpha x+\beta)\,dx\right|<\varepsilon$ untuk $\alpha>A$

Bukti:

Jika f konstan pada [a,b], hasilnya jelas karena

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(\alpha x+\beta)\,dx\right| = \left|\frac{\cos(\alpha x+\beta)}{\alpha}\right]_a^b\Bigg|$$

$$= \left|\frac{\cos(\alpha b+\beta)-\cos(\alpha a+\beta)}{\alpha}\right|$$

$$= \left|\frac{\sin\{\alpha(a+b)+2\beta\}/2\ .\sin\{\alpha(a-b)/2\}}{\alpha}\right|$$

$$\le 2/\alpha\ ,\quad \text{jika } \alpha>0$$

Hasilnya berlaku jika f konstan pada [a,b], tanpa memperhatikan bagaimana f(a) dan f(b) didefinisikan. Sebab itu persamaan (*) berlaku jika f merupakan fungsi step (fungsi tangga).

Persamaan (*) akan dibuktikan dengan menganggap bahwa setiap fungsi dapat terintegral Riemann. Jika $\varepsilon>0$ diberikan, kemudian dipilih partisi P pada [a,b] sedemikian sehingga korespondensi jumlah atas dan jumlah bawah Riemann memenuhi pertidaksamaan $U(p,f)-L(p,f)<\frac{\varepsilon}{2}$

dengan $L(p,f) = \int_a^b m(x)\,dx$ dan $U(p,f) = \int_a^b M(x)\,dx$

dimana m dan M merupakan fungsi-fungsi tangga sedemikian sehingga $m(x)\le f(x)\le M(x)$ berlaku sepanjang [a,b].Kemudian

$$\left|\int_a^b (f(x)-m(x))\sin(\alpha x+\beta)\,dx\right| \le \int_a^b |M(x)-m(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

tetapi untuk ε yang sama kita dapat memilih A sedemikian sehingga $\alpha>A$ maka $\left|\int_a^b m(x)\sin(\alpha x+\beta)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

sehingga:

$$\left|\int_a^b m(x)\sin(\alpha x+\beta)\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x)\sin(\alpha x+\beta)dx - \int_a^b m(x)\sin(\alpha x+\beta)dx + \int_a^b m(x)\sin(\alpha x+\beta)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_a^b [f(x)-m(x)]\sin(\alpha x+\beta)dx + \int_a^b m(x)\sin(\alpha x+\beta)dx\right|$$

$$\leq \left|\int_a^b [f(x)-m(x)]\sin(\alpha x+\beta)dx\right| + \left|\int_a^b m(x)\sin(\alpha x+\beta)dx\right|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

sehingga $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(\alpha x+\beta)\,dx = 0$

Sebagai akibatnya :

1. Jika f terintegral Riemann pada [a,b] dan diambil $\beta=0$, maka $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\alpha x\,dx = 0$

2. Jika f terintegral Riemann pada [a,b] dan diambil $\beta=\pi/2$, maka $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \int_a^b f(x)\cos\alpha x\,dx = 0$

II. Untuk fungsi f berlaku $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ konvergen, yakni f integrabel mutlak pada $(-\infty,\infty)$. Maka

$$\lim_{s\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)\,dx = 0 \qquad \ldots(o)$$

atau $\lim\limits_{s\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx + i\lim\limits_{s\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx = 0$

dengan demikian berlaku :

$$\lim_{s\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx = \lim_{s\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx = 0$$

Bukti :

Transformasi Fourier fungsi f(x) didefinisikan sebagai $F(s) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \cdot f(x)\ dx$ ...(oo)

Dengan menggunakan :

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$$

maka:

$$-F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i} . e^{isx}\ f(x)\ dx$$

$$-F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{si(x+\pi/s)}\ f(x)\ dx$$

$$-F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{six}\ f(x-\pi/s)\ dx \qquad \text{...(ooo)}$$

Mengurangkan persamaan (oo) dengan persamaan (ooo), maka diperoleh:

$$2F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{six} \{\ f(x)-f(x-\pi/s)\ \}dx$$

sehingga:

$$|\ 2F(s)| = |\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{six} \{\ f(x)-f(x-\pi/s)\ \}dx\ |$$

$$2|F(s)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\ e^{six} \{\ f(x)-f(x-\pi/s)\ \}|dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\ f(x)-f(x-\pi/s)\ |dx$$

Karena f terintegral mutlak pada $(-\infty,\infty)$ maka setiap $\varepsilon>0$ ada $A>0$ sedemikian sehingga $|\int_{-\infty}^{\infty}|\ f(x)-f(x-\pi/s)\ |dx\ | < \varepsilon$

Untuk $s>A$. Atau $\lim_{s\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\ f(x)-f(x-\pi/s)\ |dx = 0$

Maka:

$$2|F(s)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\ f(x)-f(x-\pi/s)\ |dx$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \varepsilon$$

$$|F(s)| < \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$$

Padahal:

$$|F(s)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{six} f(x)\, dx \right| < \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{six} f(x)\, dx \right| < \frac{1}{2\varepsilon} \qquad , \varepsilon > 0$$

Sehingga $\lim\limits_{s \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)\, dx = 0$

Karena :

$$e^{isx} = \cos sx + i \sin sx$$

Dengan demikian berlaku:

$$\lim_{s \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx\, dx = \lim_{s \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin sx\, dx$$

$$= 0$$

Untuk $\lim\limits_{s \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx\, dx = \lim\limits_{s \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(sx+\pi/2)\, dx$

$$= 0$$

dan $\lim\limits_{s \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin sx\, dx = \lim\limits_{s \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(sx+0)\, dx$

$$= 0$$

Maka untuk $\beta = \pi/2$ dan $\beta=0$ berlaku

$$\lim_{s \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(sx+\beta)\, dx = 0$$

Sebagai akibat dari lemma diatas adalah sebagai berikut:

1. Jika $f \in R^*(a,b)$ dan untuk $\beta=0$ maka berlaku :

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-a}^{b} f(x) \sin \alpha x\, dx = 0 \qquad \ldots(2.12)$$

2. Jika $f \in R^*$ (a,b) dan diambil $\beta = \frac{\pi}{2}$ maka berlaku :

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_a^b f(x) \sin\left(\alpha x + \frac{\pi}{2}\right) dx =$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \alpha x \, dx = 0 \qquad \ldots(2.13)$$

Contoh :

Diketahui fungsi $f(x) = e^{-x}$ dapat terintegral secara mutlak pada $[0,\infty]$.

Buktikan bahwa : $\lim_{\alpha \to \infty} \int_0^\infty e^{-x} \cos \alpha x \, dx = 0$

Penyelesaian :

$f(x) = e^{-x}$ dapat terintegral secara mutlak pada $[0,\infty)$ yakni berlaku $\int_0^\infty |f(x)| \, dx$ konvergen

$$\int_0^\infty |e^{-x}| \, dx = \int_0^\infty e^{-x} \, dx$$

$$= \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-x} \, dx$$

$$= \lim_{a \to \infty} -e^{-x}\Big]_0^a = \lim_{a \to \infty} -e^{-a} + e^0$$

$$= \lim_{a \to \infty} 1 - e^{-a} = 1 - 0 = 1$$

Karena $\int_0^\infty |f(x)| \, dx = \int_0^\infty e^{-x} \, dx$

Jadi $\int_0^\infty e^{-x} \, dx$ konvergen mutlak

Selanjutnya menghitung harga $\lim_{\alpha \to \infty} \int_0^\infty e^{-x} \cos \alpha x \, dx$

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_0^\infty \cos \alpha x \, dx = \lim_{\alpha \to \infty} \left\{ \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-x} \cos \alpha x \, dx \right\}$$

Menghitung $\int_0^a e^{-x} \text{Cos } \alpha x \, dx$

$$= -e^{-x}\text{Cos } \alpha x - \alpha \int_0^a e^{-x} \sin \alpha x \, d\alpha$$

$$= -e^{-x}\text{Cos } \alpha x + \alpha e^{-x} \sin \alpha x - \alpha^2 \int_0^a e^{-x} \text{Cos} \alpha x \, dx$$

$$(1+\alpha^2) \int_0^a e^{-x}\text{Cos } \alpha x \, dx = \left[-e^{-x} \text{ Cos } x\alpha + \alpha e^{-x} \sin \alpha x \right]_0^a$$

$$\int_0^a e^{-x}\text{Cos } \alpha x \;\; dx = \frac{1}{1+\alpha^2} \left[-e^{-a}\text{Cos } a\alpha + \alpha e^{-a} \sin a\alpha + 1 \right]$$

Sehingga :

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left\{ \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-x}\text{Cos } \alpha x \, dx \right\} = \lim_{\alpha \to \infty} \left\{ \lim_{a \to \infty} \frac{e^{-a}\text{Cos } a\alpha + \alpha e^{-a} \sin a\alpha + 1}{1 + \alpha^2} \right\}$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{1+\alpha^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Jadi $\lim_{\alpha \to \infty} \int_0^\infty e^{-x}\text{Cos } \alpha x \;\; dx = 0$

2.5. Ruang Hilbert

Definisi 2.5.1

Suatu ruang linier X atas field F adalah suatu kumpulan dari elemen-elemen dalam X dengan didefinisikan dua operasi aljabar yaitu operasi penjumlahan elemen-elemen dalam X dan multiplikasi untuk elemen-elemen dalam X dengan skalar dalam F dan memenuhi aksioma-aksioma :

1. Terhadap operasi penjumlahan, X merupakan group komutatif bahwa jika $f,g,h \in X$ maka
   a. Bersifat tertutup, yaitu $f+g$ berada dalam X
   b. Bersifat assosiatif : $(f+g)+h = f+(g+h)$
   c. Terdapat elemen netral o dalam X sedemikian sehingga $f+0 = f$ untuk setiap $f \in X$

d. Untuk setiap $f \in X$ terdapat elemen invers yang dinotasikan $(-f)$ dalam X sedemikian berlaku $f + (-f) = 0$

e. bersifat komutatif : $f+g = g+f$

2. Multiplikasi elemen-elemen dalam X dengan skalar dalam F adalah tertutup, maka :

   a. $1.f = f$ untuk semua $f \in X$

   b. $\alpha.f$ dalam X untuk semua $f \in X$ dan $\alpha \in F$

   c. Untuk semua $\alpha, \beta \in F$ dan $f \in X$, maka $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$

3. Berlaku hukum distributifitas, yaitu :

   a. $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$ untuk semua $\alpha \in F$ dan $f,g \in X$

   b. $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$ untuk semua $\alpha,\beta \in F$ dan $f \in X$

Definisi 2.5.2

Sebuah ruang linear X disebut ruang inner product (ruang hasil kali dalam). Jika pada ruang linear X didefinisikan operasi inner product. Apabila $f,g \in X$ (ruang linier riil atau komplek) maka inner product dinotasikan dengan (f,g) adalah suatu bilangan nyata. Sedemikian sehingga dipenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. Untuk setiap skalar $\alpha,\beta \in F$ dan untuk semua $f,g,h \in X$ (ruang linier riil atau komplek) berlaku :

   -$(\alpha f + \beta g,\ h) = \alpha(f,\ h) + \beta(g,\ h)$

   -$(h, \alpha f + \beta g) = \bar{\alpha}(h,\ f) + \bar{\beta}(h,\ g)$

2. Untuk semua $f,g \in X$ (komplek), berlaku $(f,g) = \overline{(g,f)}$ dan jika $f,g \in X$ (riil), berlaku $(f,\ g) = (g,\ f)$

3. Bersifat definit positip yaitu

   $(f,\ f) \geq 0$ dan $(f,\ f) = 0$ jika hanya jika $f = 0$

Catatan :

(f,f) adalah riil, karena $(f,f) = \overline{(f,f)}$

Definisi 2.5.3

1. Norm $\|.\|$ pada ruang inner product diasosiasikan dengan inner product didefinisikan dengan
   $\|f\| = (f,f)^{1/2}$, untuk setiap f dalam ruang inner product
2. Metriknya dinyatakan dengan $d(f,g) = \|f-g\|$
   dimana $\|f-g\| = (f-g,\ f-g)^{1/2}$, untuk semua f, g dalam ruang inner product.

Definisi 2.5.4

Suatu ruang norm linier adalah ruang linier dimana semua vektor kolom $f = [f_j]$ dengan j = 1,2,3,.....n tetap merupakan panjang umum dan dinotasikan dengan $\|f\|$ mempunyai empat sifat sebagai berikut :

1. $\|f\| > 0$, untuk $f \neq 0$
2. $\|f\| = 0$ jika hanya jika $f = 0$
3. $\|f\| = |\alpha|\ \|f\|$ dimana $\alpha \in F$
4. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Definisi 2.5.5

Misal $\mathscr{H}$ suatu ruang inner product dan $\{f_n\}$ suatu barisan Cauchy dalam $\mathscr{H}$. Sedemikian bahwa barisannya mempunyai sifat untuk setiap $\in > 0$ yang diberikan, dapat ditemukan $N(\in)$ sedemikian sehingga $\|f_n - f_m\| < \in$ untuk $n,m > N(\in)$ atau dengan kata lain $\lim_{n,m \to \infty} \|f_n - f_m\| = 0$

$\mathscr{H}$ disebut ruang Hilbert jika setiap barisan Cauchy konvergen ke suatu elemen dalam $\mathscr{H}$.

Dengan melihat jika barisan Cauchy yang konvergen maka harus konvergen ke elemen tunggal dalam barisan Cauchy.

andaikan : $\{f_n\}$ barisan Cauchy

$\lim_{n_k \to \infty} f_{n_k} = g$, f_{n_k} sub barisan $\{f_n\}$ konvergen ke g

$\lim_{m_k \to \infty} f_{m_k} = h$, f_{m_k} sub barisan $\{f_n\}$ konvergen ke h

Sehingga ada dua sub sequence dalam $\{f_n\}$

$\|g-h\| = \|g-f_{n_k} + f_{n_k} - f_{m_k} + f_{m_k} - h\|$

$\quad\quad \leq \|g-f_n\| + \|f_{n_k} - f_{m_k}\| + \|f_{m_k}-h\|$

Untuk n_k dan m_k cukup besar sehingga kita mempunyai

$\|g-f_{n_k}\| < \varepsilon$, $\|f_{n_k}-f_{m_k}\| < \varepsilon$, $\|f_{m_k}-h\| < \varepsilon$, maka $\|g-h\| < \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon$

Karena g dan h independent untuk n_k dan m_k dan $\varepsilon > 0$ maka $\|g-h\| = 0$ dengan demikian $g = h$

Jadi setiap barisan Cauchy yang konvergen maka konvergen ke elemen tunggal dalam barisan.

Contoh :

$L_2(-\infty,\infty)$ kumpulan semua fungsi-fungsi riil yang kontinu dan didefinisikan pada $(-\infty,\infty)$ adalah ruang Hilbert. Karena untuk setiap fungsi yang berada dalam $L_2(-\infty,\infty)$, berlaku inner product yang dinyatakan dengan

$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx$, untuk semua $f(x), g(x) \in L_2(-\infty,\infty)$

Apabila $\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} f(x)\, g(x)\, dx$ ada

Metrik d untuk $L_2(-\infty,\infty)$ dinyatakan dengan

$$d(f,g) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f(x) - g(x) \right\}^2 dx \right]^{1/2}$$

dan norm untuk $f(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ adalah

$$\|f\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right\}^{1\backslash 2}$$

Untuk bahasan selanjutnya ruang Hilbert dinotasikan dengan $L_2(-\infty,\infty)$.

2.5.6. Operator dalam ruang Hilbert

Definisi 2.5.6.1

Ruang Hilbert $\mathscr{H}$ disebut jumlah langsung dari ruang V dan $\mathscr{Z}$, dapat ditulis $V \oplus \mathscr{Z}$ jika :

1. $\mathscr{H} = V \cup \mathscr{Z}$ ...(2.14)
2. $\{0\} = V \cap \mathscr{Z}$

Sifat :

Misal G sub ruang Hilbert $\mathscr{H}$ dan F himpunan semua vektor ortogonal dari sub ruang G, Sehingga F disebut ortogonal komplemen dari G. Dan ditulis sebagai $F = \mathscr{H} \ominus G$ ...(2.15)

Sehingga $\mathscr{H} = F \oplus G$, maka setiap $h \in \mathscr{H}$ diwakili dalam bentuk $h = f + g$,dimana $f \in F$ dan $g \in G$

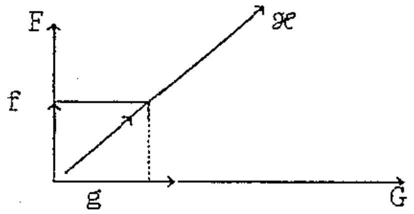
Definisi 2.5.6.2

Operator proyeksi pada ruang Hilbert

Operator yang memetakan setiap $h \in \mathscr{H}$ ke dalam proyeksinya $g \in G$ disebut operator proyeksi pada G atau operator proyeksi. Dengan notasi P_G atau bila dalam sub ruang G ditulis P relasi g dan h dapat dinyatakan dengan $Ph = g$

Contoh :

Ambil sebarang vektor $h \in \mathscr{H}$, yang diproyeksikan ke dalam G oleh operator proyeksi P, sehingga didapat $g \in G$



$Ph = g$

$\therefore g$ proyeksi h pada G dengan operator proyeksi P

Apabila h dalam $\mathscr{H}$ diproyeksikan kedalam F didapat $f \in F$

maka : $Ph = f$

P : operator proyeksi pada F

Definisi 2.5.6.3

Definisi Operator Unitary pada ruang Hilbert operator U dalam ruang Hilbert adalah unitary apabila :

1. $(Uf, Ug) = (f, g)$ untuk semua $f, g \in \mathscr{H}$

   atau

   $\|Uf\| = \|f\|$

2. Operator U mempunyai invers pada ruang Hilbert yang diberikan oleh adjoin U yaitu U^*.

   $(Uf, g) = (f, U^* g)$

   $= (f, U^{-1} g)$, untuk semua f, g dalam $\mathscr{H}$

Pada ruang Hilbert dapat dipenuhi operator proyeksi dan operator unitary yaitu sesuai dengan definisi 2.5.6.2 dan definisi 2.5.6.3.

2.6. Transformasi Fourier

2.6.1. Definisi transformasi Fourier

Transformasi Fourier dari $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ didefinisikan dengan :

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)\, dx \qquad \ldots(2.17)$$

F[f] merupakan tranformasi Fourier dari f(x). Dengan F[f]=F(s) dimana s adalah suatu perubah hasil transformasi.

Sedang transformasi invers Fourier dari F{f} ditulis sebagai $f(x) = F^{*}\{F[f]\}$ dan didefinisikan dengan

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F(s)\, ds \qquad \ldots(2.18)$$

Jika f(x) merupakan fungsi genap yang berarti

f(x) = f(-x) untuk semua x

maka :

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Cos } sx\, f(x)\, dx$$

$$F\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \text{Cos } sx\, dx \qquad \ldots(2.19)$$

F(f) merupakan transformasi Cosinus Fourier dari f(x) dan dinotasikan dengan $F_c[f]$.

Dan transformasi invers Cosinus Fourier dinyatakan dengan

$f(x) = F_c^{*}\{F_c[f]\}$ dan didefinisikan dengan

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F_c(s) \text{ Cos } sx\, ds \qquad \ldots(2.20)$$

Apabila f(x) merupakan fungsi ganjil yang berarti :

f(-x) = -f(x), untuk semua x

maka :

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin sx\, f(x)\, dx$$

$$F[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin sx\, dx$$

F{f} adalah trasformasi sinus Fourier dan dinotasikan dengan $F_s[f]$ sehingga :

$$F_s\{f\} = = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin sx \, dx \qquad \ldots(2.21)$$

sedangkan transformasi invers sinus Fourier dari $F_s[f]$ dinyatakan dengan : $f(x) = F^*\left\{F_s[f]\right\}$

dan $$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(f) \sin sx \, ds \quad \ldots(2.22)$$

Contoh :

1. Tentukan transformasi Fourier dari $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$

Penyelesaian :

$$F\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \, f(x) \, dx$$

$$F\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{isx} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{isx}}{is} \right]_{-a}^{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{isx} - e^{-isa}}{is}$$

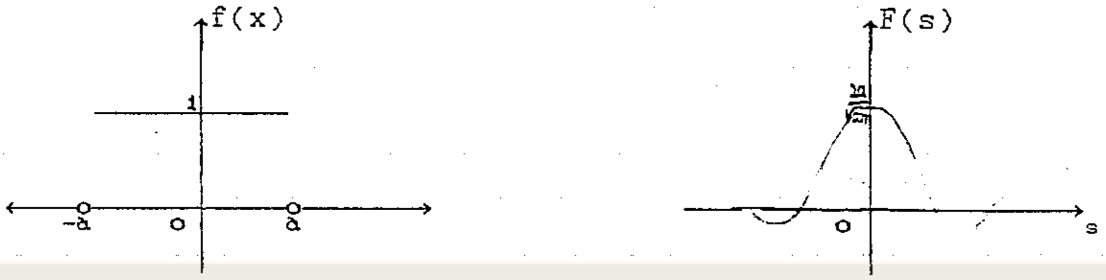
$$= \frac{2 \sin sa}{s\sqrt{2\pi}}, \qquad s \neq 0$$

untuk $s \longrightarrow 0$

$$\text{Maka} \lim_{s \to 0} F(s) = \lim_{s \to 0} \frac{2 \sin sa}{s\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \lim_{s \to 0} \frac{\sin sa}{s}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}$$

Grafik :



Dengan menggunakan contoh 1, di atas maka dapat ditentukan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$$

yaitu : dari $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$

dan $F(s) = \dfrac{2 \sin sa}{s\sqrt{2\pi}}$

sehingga $F^{*}\left\{ F[f] \right\} = f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F\{f\}\, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\, \frac{2\sin sa}{s\sqrt{2\pi}}\, ds$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\, \frac{\sin sa}{s}\, ds$$

maka $\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \frac{\sin sa}{s}\, ds = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \frac{\sin sa}{s}\, ds = \begin{cases} \pi & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

dengan mengambil $x = 0$ dan $a = 1$, maka : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin s}{s}\, ds = \pi$

jadi $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \pi$

2. Tentukan transformasi Cosinus Fourier dari

$f(x) = \cos x$, untuk $0 \le x \le b$

Penyelesaian :

$$F_c\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos sx\, dx$$

$$F_c\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{b} \cos x \cos sx\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{b} \frac{\operatorname{Cos} x(s+1) + \operatorname{Cos} x(s-1)}{2}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+1}\sin x\,(s+1) + \frac{1}{s-1}\sin x(s-1)\right]_0^b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{\sin b(s+1)}{s+1} + \frac{\sin b\,(s-1)}{s-1}\right\}$$

3. Tentukan transformasi sinus Fourier dari $f(x) = e^{-ax}$

Penyelesaian :

$$F_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin sx\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}\sin sx\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{-ae^{-ax}\sin sx - se^{-ax}\cos sx}{s^2 + a^2}\right]_0^\infty$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{0-(-s)}{s^2+a^2}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{s}{s^2+a^2}$$

2.6.2. Teorema-teorema utama untuk transformasi Fourier

1. Similarity Theorema (theorema kesamaan)

Jika F(s) adalah transformasi Fourier untuk f(x) maka trasformasi Fourier dari f(ax) adalah $\frac{F(s/a)}{a}$

Bukti :

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)\,dx$$

$$F\{f(ax)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(ax)\,dx$$

dengan substitusi ;

$$u = ax \Longrightarrow x = \frac{u}{a}$$

$$dx = \frac{1}{a}\,du$$

$$\text{untuk } x = -\infty \Longrightarrow u = -\infty$$

$$x = \infty \Longrightarrow u = \infty$$

$$F\left\{f(ax)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(u/a)} f(u) . \frac{1}{a} du$$

$$= \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(u/a)} f(u) . du$$

$$F\left\{f(ax)\right\} = \frac{1}{a} F(s/a) \qquad \ldots(2.23)$$

Contoh :

$$F_s\left\{e^{-ax}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s}{s^2 + a^2}$$

Carilah : $F_s \left\{e^{-bax}\right\} =$

Jawab :

Dengan menggunakan teorema kesamaan maka didapat

$$F(s)\left\{e^{bax}\right\} = \frac{1}{b} F_s \left(\frac{s}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{\frac{\frac{s}{b}}{\left(\frac{s}{b}\right)^2 + a^2}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s}{s^2 + (ab)^2}$$

2. Adition Theorema (teorema penjumlahan)

Jika f(x) dan g(x) mempunyai transformasi Fourier masing-masing adalah F(s) dan G(s), maka

$$\left.\begin{aligned} F\left\{f(x) + g(x)\right\} &= F[f] + F[g] \\ &= F(s) + G(s) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.24)$$

Bukti :

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x) dx$$

$$G(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} g(x) dx$$

maka $F\left\{f(x) + g(x)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\left\{ f(x) + g(x)\right\} dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \ f(x) + e^{isx} \ g(x) \quad dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} g(x)dx$$

$$= F[f] + F[g]$$

$$= F(s) + G(s)$$

sebagai akibatnya :

Apabila c suatu konstanta sebarang maka transformasi Fourier dari $cf(x)$ adalah $cF(s)$

3. Shift theorem (teorema pergeseran)

   a. Jika $F\left\{f(x)\right\} = F(s)$ maka $F\left\{f(x-a)\right\} = e^{ias} \ F(s)$

   b. Jika $F\left\{f(x)\right\} = F(s)$ maka $F\left\{f(x+a)\right\} = e^{-ias} \ F(s)$

...(2.25)

Bukti :

a. $$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x) \ dx$$

$$F\left\{f(x-a)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x-a) \ dx$$

Dengan substitusi : $u = x - a \Longrightarrow x = u + a$

$x = u + a \Longrightarrow dx = du$

Untuk $x = -\infty \Longrightarrow u = -\infty$

$x = \infty \Longrightarrow u = \infty$

Sehingga :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \ f(x-a) \ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(u+a)} f(u) \ du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isu} . e^{isa} \ f(u) \ du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{isa} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isu} \ f(u) \ du$$

$$= e^{isa} \ F(s)$$

b. $F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)\, dx$

$$F\left\{f(x+a)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x+a)\, dx$$

dengan substitusi :

$$x + a = v \Longrightarrow x = v - a \Longrightarrow dx = dv$$

$$\text{Untuk } x = -\infty \Longrightarrow v = -\infty$$

$$x = \infty \Longrightarrow v = \infty$$

Sehingga :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x+a)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(x-a)} f(v)\, dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isv} . e^{-isa} f(v)\, dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-isa} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isv} f(v)\, dv$$

$$= e^{-isa} F(s)$$

4. Teorema :

Jika trasformasi Fourier dari f(x) adalah F(s) maka Trasformasi untuk f(x) Cos ωx adalah $\frac{1}{2}$ F(s−ω)+$\frac{1}{2}$ F(s+ω)

Bukti :

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)dx$$

$$F\left\{f(x) \text{ Cos } \omega x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x) \text{Cos } \omega x\, dx$$

dari $\text{Cos } \omega x = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}$

maka :

$$F\left\{f(x) \text{ Cos } \omega x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x) \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(s+\omega)} f(x) + e^{ix(s-\omega)} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(s+\omega)} f(x) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(s-\omega)} f(x)\, dx$$

$$F\left\{f(x)\text{Cos } \omega x\right\} = \frac{1}{2} F(s+\omega) + \frac{1}{2} F(s-\omega) \qquad \ldots(2.26)$$

5. Teorema

Operator integral $F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)dx$

dimana $F[f]$ merupakan transformasi Fourier dari

$f(x) \in L_2\ (-\infty,\infty)$

Operator integral tersebut bersifat unitary maka

$$*) \int_{-\infty}^{\infty} |F[f]|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \qquad \ldots(2.27)$$

dan invers dari F adalah F^* sedemikian sehingga

$$f(x) = F^*\left\{F[f]\right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F[f] ds$$

persamaan (2.27) dikenal dengan identitas parseval untuk integral Fourier, dan persamaan yang lebih umum adalah

$$**) \int_{-\infty}^{\infty} F[f]\ \overline{F[g]}\ ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \overline{g(x)}\ dx \qquad \ldots(2.28)$$

dimana garis di atas menunjukkan komplek konjugate yang didapat apabila i diganti dengan -i

Bukti :

$$*) \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

Bukti :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F[f]|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} F[f]\ \overline{F[f]}\ ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F[f]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)\ dx\ ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F[f]} f(x)\ e^{isx}\ ds\ dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F[f]} \quad e^{isx} ds \; dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F[f]} \quad e^{\overline{-isx}} ds \; dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\bar{F}[f] e^{-isx}} ds \; dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \; f\overline{(x)} \; dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \; dx$$

**) $\int_{-\infty}^{\infty} F[f] \; \overline{F[g]} \; ds = \int_{-\infty}^{\infty} F[f] \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{-isx} \quad g(x)} \; dx \; ds$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F[f] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \; \overline{g(x)} \; dx \; ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F \; [f] \; ds \; dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F \; [f] \; ds \; dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} \; f(x) \; dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \; \overline{g(x)} \; dx$$

2.6.3 KONVOLUSI

Definisi :

Diberikan f(x) dan g(x) dua fungsi yang berada dalam $L_2(-\infty,\infty)$, maka konvolusi untuk f(x) dan g(x) didefinisikan sebagai

$$(f*g)\;(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\; g(x-y) dy \qquad \ldots(2.29)$$

biasanya ditulis dengan h(x) = f(x) * g(x)

Teorema : Konvolusi untuk Transformasi Fourier

Jika $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\ g(x-y)\ dy$ maka trasformasi Fourier dari $(f*g)\ (x)$ adalah :

$$F\left\{f * g\right\} = \sqrt{2\pi}\ F[f]\ F[g] \qquad \ldots(2.30)$$

Bukti :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\ g(x-y)\ dy$$

$$F\left\{f * g\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\ (f * g)(x)\ dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\ g(x-y)\ dy\ dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\ g(x-y)\ dx\ dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sqrt{2\pi}\ \ F\left\{g(x-y)\right\}\ dy$$

Menurut teorema pergeseran : $F\left\{f(x-a)\right\} = e^{isa}F(s)$

$$= e^{isa}F[f]$$

maka $F\left\{\ g(x-y)\right\} = e^{isy}\ F[g]$

$$F\left\{f * g\right\} = \int_{\infty}^{\infty} f(y)\ e^{isy}\ F[g]dy$$

$$= F[g] \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\ e^{isy}\ \ dy$$

$$= \sqrt{2\pi}\ \ F[g]\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\ e^{isy}\ dy$$

$$= \sqrt{2\pi}\ \ F[g]\ F[f]$$

$$= \sqrt{2\pi}\ \ F[f]\ F[g]$$

Bukti bahwa : $F^{*}\left\{\sqrt{2\pi}\ \ F[f]\ F[g]\right\} = (f * g)(x)$

$$F^{*}\left\{\sqrt{2\pi}\,F[f]\,F[g]\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\sqrt{2\pi}\,F[f]\,F[g]\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}F[f]\,F[g]\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy}f(y)\,dyF[g]\,ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x-y)}F[g]\,dy\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,g(x-y)\,dy$$

$$= (f * g)(x)$$

Jadi $F * \left\{\sqrt{2\pi}\,F[f]\,F[g]\right\} = F^{*}\left\{F\{f * g\}\right\}$

$$= (f * g)\,(x)$$