BAB II
TEORI PENUNJANG

2.1. MATRIKS

Definisi 2.1.1 :

Sebuah matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun atau dijajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom) yang dibatasi oleh

$$\left(\qquad \right) \text{ atau } \left[\qquad \right] \text{ atau } \left\| \qquad \right\|$$

Suatu matriks berukuran (berordo) mxn atau matriks mxn adalah suatu jajaran bilangan berbentuk persegi panjang yang terdiri dari m baris dan n kolom. Matriks ditulis dalam bentuk :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad .....(2.1.1)$$

Setiap bilangan a_{ij} dalam matriks ini disebut elemen (unsur) matriks atau entri didalam matriks. Indeks i dan j berturut-turut menyatakan baris dan kolom dari entri matriks tersebut.

Suatu matriks akan seringkali dinyatakan dengan suatu huruf besar, seperti misalnya A dalam (2.1.1.) atau dengan lambang a_{ij} yang menunjukkan entri yang sesuai.

Suatu matriks yang hanya mempunyai satu baris dinamakan suatu matriks baris (atau vektor baris) sedangkan suatu matriks yang hanya mempunyai satu kolom dinamakan suatu matriks kolom (atau vektor kolom).

Jika banyaknya baris m dan kolom n sama (m = n), matriks tersebut dinamakan matriks bujur sangkar berukuran nxn atau disingkat n, dan entri-entri a_{11} , a_{22} , . . . , a_{nn} dikatakan berada pada diagonal utama dari A. Suatu matriks dikatakan matriks riil atau matriks kompleks sesuai dengan entrinya, bilangan riil ataukah bilangan kompleks.

Contoh 2.1.1

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

B matriks berukuran 2 x 3 .

Matriks B dapat dipandang sebagai matriks koefisien dari sistem persamaan linier :

$$2x + y - z = 0$$

$$x - 3y + 5z = 0$$

atau sebagai matriks lengkap dari sistem persamaan linier tak homogen :

$$2x + y = -1$$

$$x - 3y = 5$$

Definisi 2.1.2 :

Matriks bujur sangkar A yang entri-entri nya $a_{ij} = 0$, untuk $i>j$ disebut matriks segitiga atas; matriks bujur sangkar yang entri-entri nya $a_{ij} = 0$ untuk $i<j$ disebut matriks segitiga bawah.

$$\text{Matriks } \Lambda = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

disamping segitiga atas juga segitiga bawah dinamakan matriks diagonal.

Jika didalam matriks diagonal Λ, $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \ldots = a_{nn} = k$, matriks Λ dinamakan matriks skalar; dan jika $k = 1$, matriks Λ disebut matriks satuan dan ditunjukkan oleh I_n.

Contoh 2.1.2 :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.3 :

Yang dimaksud dengan transformasi elementer pada baris (kolom) suatu matriks A adalah sebagai berikut :

(i). Pertukaran tempat baris ke i dan baris ke j ditulis $H_{ij}(A)$

(ii). Pertukaran tempat kolom ke i dan kolom ke j ditulis $K_{ij}(A)$

(iii). Mengalikan baris ke i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $H_i^{(\lambda)}(A)$.

(iv). Mengalikan kolom ke i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $K_i^{(\lambda)}(A)$.

(v). Menambah baris ke i dengan λ kali baris ke j , ditulis $H_{ij}^{(\lambda)}(A)$.

(vi). Menambah kolom ke i dengan λ kali kolom ke j , ditulis $K_{ij}^{(\lambda)}(A)$.

Theorema 2.1.1

Jumlah dari hasil kali entri-entri pada suatu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktor dari baris (atau kolom) lainnya adalah nol .Ditulis dengan lambang :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{qj}.A_{pj} = 0 \quad \text{atau} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{jq}.A_{jp} = 0 \text{ , jika } p \neq q \quad ....(2.1.6)$$

Bukti :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots\cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Jika diurai sesuai dengan kolom ke p mempunyai nilai

$$\det(A) = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + \ldots + a_{pn}A_{pn}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{pj}A_{pj} \qquad \ldots\ldots(2.1.7)$$

Misalnya elemen a_{pj} dalam baris ke-p dari A diganti dengan elemen yang bersesuaian a_{qj} dari baris ke q dimana $p \neq q$, maka dua baris ini akan sama dan determinan baru yang diperoleh menjadi nol. Karena $a_{pj} = a_{qj}$, maka (2.1.7) menjadi

$$0 = a_{q1}A_{p1} + a_{q2}A_{p2} + \ldots + a_{qn}A_{pn}$$

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{qj}A_{pj}$$

Jadi $\sum_{j=1}^{n} a_{qj}A_{pj} = 0 \; , \; p \neq q \qquad \ldots\ldots(2.1.8)$

Dengan menggunakan kolom dari baris ini

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jq}A_{jp} = 0 \; , \; p \neq q \qquad \ldots\ldots(2.1.9)$$

Jika p = q, maka (2.1.8) dan (2.1.9) menjadi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{pj}A_{pj} = \det(A)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jp}A_{jp} = \det(A)$$

Definisi 2.1.4 :

Matriks tak nol A dikatakan mempunyai rank r jika paling sedikit satu dari minor bujursangkar rxr tidak sama dengan nol, sedangkan setiap minor bujursangkar (r+1) x (r+1), jika ada adalah nol.
Matriks nol disebut mempunyai rank 0.

Contoh 2.1.3

Tinjau rank A, dimana $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

Rank dari A adalah r = 2, karena

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, sedangkan $|A| = 0$.

Definisi 2.1.5 :

Matriks bujursangkar A, n x n disebut matriks non singular jika ranknya r = n, yaitu jika $|A| \neq 0$.
Jika matriks bujur sangkar A, n×n mempunyai rank r≠n, yaitu jika det.(A) = 0, matriks A disebut matriks singular.

Definisi 2.1.6 :

Jika untuk suatu matriks bujursangkar A terdapat suatu matriks B sehingga AB = I, maka B dinamakan invers dari A dan dinyatakan dengan A^{-1}.

Theorema 2.1.2 :

I. Jika A suatu matriks tak singular berukuran n (yaitu det (A) ≠ 0), maka terdapat tepat satu invers A^{-1} sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ dan A^{-1} dinyatakan dalam bentuk :

$$A^{-1} = \frac{[A_{ij}]^T}{\det(A)}, \qquad (2.1.12)$$

dimana $[A_{ij}]$ adalah matriks dari kofaktor A_{ij} dan $[A_{ij}]^T = [A_{ji}]$ adalah transpose-nya.

II. Dan invers matriks mempunyai sifat :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

Bukti :

I. Pandang :

$$A[A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Pada aturan mengalikan determinan yang sama dengan mengalikan matriks, elemen c_{pq} dalam determinan hasilnya ditentukan dengan mengambil jumlah dari hasilkali elemen dibaris ke q pada determinan pertama dan dikolom ke p pada determinan kedua.

Jadi $\quad c_{pq} = a_{q1}A_{p1} + a_{q2}A_{p2} + \ldots + a_{qn}A_{pn} = \sum_{j=1}^{n} a_{qj}A_{pj}$

Tetapi menurut (2.1.8) dan (2.1.7) :

$$c_{pq} = \begin{cases} 0 & , p \neq q \\ \det(A), & p = q \end{cases}$$

sehingga :

$$A[A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det(A) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

Jika $\det(A) \neq 0$, maka :

$$\frac{A[A_{ij}]^T}{\det(A)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga $A\,B = I$ dimana

$$B = A^{-1} = \frac{A[A_{ij}]^T}{\det(A)}$$

II. Misalkan $x = (AB)^{-1}$.

$(AB)\ x = I$ (I matriks satuan)

$A(Bx) = I$ (hukum assosiatif)

$(Bx) = A^{-1}.I = A^{-1}$ (Digandakan dengan A^{-1})

$(A^{-1}A)(Bx) = A^{-1}$ (hukum assosiatif)

$I(Bx) = A^{-1}$

$Bx = A^{-1}$

$B^{-1}(Bx) = B^{-1}.A^{-1}$ (digandakan dengan B^{-1})

$$(B^{-1}B)x = B^{-1}.A^{-1} \qquad \text{(hukum assosiatif)}$$

$$I.x = B^{-1}.A^{-1}$$

$$x = B^{-1}.A^{-1}$$

Jadi $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

2.2. Ruang Vektor

Definisi 2.2.1 :

Misalkan $V \neq 0$ suatu himpunan. Jika V memenuhi aksioma (i) s.d. (x) , maka V dinamakan ruang vektor.

Aksioma tersebut ialah :

(i) untuk semua $x \in V$, $y \in V$ ada satu dan hanya satu $z \in V$, yang dinamakan jumlah dari x dan y dan ditulis: $z = x + y$

(ii) untuk semua $x \in V$, $\alpha \in R$, ada satu dan hanya satu vektor yang dinyatakan oleh αx

(iii) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (sifat assosiatif)

(iv) ada satu dan hanya satu vektor di V, yang dinyatakan dengan 0, yang bersifat $x+0=x$ untuk semua $x \in V$,(elemen nol)

(v) untuk semua $x \in V$, ada satu dan hanya satu $y \in V$ sehingga $x+y=0$; y dinyatakan dengan $-x$ (invers penjumlahan)

Jadi $x + (-x) = 0$. (elemen negatif)

Selanjutnya ditulis $x + (-y)$ dengan $x - y$.

(vi) $x + y = y + x$ (sifat komutatif)

(vii) $\alpha (\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $x \in V$.

(viii) ada elemen satuan ditulis dengan 1, sehingga $1x = x$ untuk semua $x \in V$ (elemen satuan)

(ix) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\alpha \in R$, $x \in V$, $y \in V$

(distributivitas elemen V)

(x) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $x \in V$

(distributivitas elemen R)

Contoh 2.2.1

$R^n = \{[x_1, x_2, \ldots, x_n], x_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n\}$ adalah himpunan vektor baris berkomponen n, dengan operasi :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

adalah ruang vektor terhadap R.

Definisi 2.2.2 :

Jika $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, maka x dinamakan kombinasi linier dari himpunan vektor-vektor $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Himpunan $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ dinamakan bergantung linier jika ada skalar α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ yang tidak semua nol sehingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$

Himpunan yang tidak bergantung linier, disebut bebas linier. Jadi $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ bebas linier, jika $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$ dipenuhi oleh $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Himpunan yang terdiri dari vektor 0 : {0} dalam v adalah bergantung linier, karena untuk setiap $\lambda \in R$, didapat $\lambda\, 0 = 0$, sedangkan himpunan {a}, $a \neq 0$, selalu bebas linier, karena jika λ a = 0, maka λ = 0.

Contoh 2.2.2.

Tinjau vektor-vektor u = (1, 2, -1) dan V = (6, 4, 2) di dalam R^3. Perlihatkan bahwa w = (9, 2, 7) adalah kombinasi linier dari u dan v dan bahwa w' = (4, -1. 8) bukanlah kombinasi linier dari u dan v.

Penyelesaian :

Agar w merupakan kombinasi linier dari u dan v, maka harus ada k_1 dan k_2 sehingga $w = k_1 u + k_2 v$, yakni :

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2 (6, 4, 2)$$

atau $$(9, 2, 7) = (k_1+6k_2, 2k_1+4k_2, -k_1+2k_2)$$

$$k_1+6k_2 = 9;\ 2k_1+4k_2 = 2;\ -k_1+2k_2 = 7$$

$\therefore k_1 = -3,\ k_2 = 2$ sehingga $w = -3u + 2v$

Agar w' merupakan kombinasi linier dari u dan v, harus ada skalar k_1 dan k_2 sehingga $w' = k_1u + k_2v$;

yaitu : $$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

$$(4, -1, 8) = k_1+ 6k_2,\ 2k_1+ 4k_2,\ -k_1+ 2k_2$$

$$\longrightarrow \quad k_1+ 6k_2 = 4$$

$$2k_1+ 4k_2 = -1$$

$$-k_1+ 2k_2 = 8$$

Sistim persamaan ini tidak konsisten, sehingga tidak ada skalar yang seperti itu.

$\therefore$ w bukan kombinasi linier dari u dan v.

Definisi 2.2.3 :

Jika v_1, v_2 , ..., v_r adalah vektor-vektor di dalam sebuah ruang vektor V dan jika tiap-tiap vektor di dalam V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari v_1, v_2,..., v_r maka dikatakan vektor-vektor ini merentang V.

Definisi 2.2.4 :

Misalkan V ruang vektor dan $S \subset V$, maka S dinamakan himpunan basis dari V, jika (i) S himpunan bebas linier
(ii) S merentang V.

Definisi 2.2.5 :

Banyaknya vektor dalam basis dinamakan dimensi dari ruang vektor V. Ditulis dim V.

Definisi 2.2.6 :

Sebuah ruang vektor taknol V dikatakan berdimensi higga jika memuat himpunan dari vektor-vektor $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ yang membentuk sebuah basis.

Definisi 2.2.7 :

Sebuah ruang vektor taknol V dikatakan berdimensi tak berhigga jika tidak memuat himpunan berhingga dari vektor-vektor $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ yang membentuk sebuah basis.

Contoh 2.2.3.

Tunjukkan bahwa

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

adalah basis dari R^4

Penyelesaian :

Terdapat λ_i ,i = 1,2,3,4 sehingga $\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3+\lambda_4 e_4 = 0$

karena $e_1, e_2, e_3, e_4 \neq 0$, maka $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$,

Jadi A bebas linier. ...(1)

sedangkan $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$, $x \in V$

Jadi A merentang V. ...(2)

Dari (1) dan (2), maka A basis dari R^4.

Definisi 2.2.8 :

Himpunan W dinamakan ruang bagian dari ruang vektor V jika : (i) $W \neq 0$, $W \subset V$

(ii) $\alpha x+\alpha y \in W$, untuk semua $x\in W$, $y\in W$, $\alpha\in R$, $\beta\in R$.

Contoh 2.2.4.

Perlihatkan bahwa himpunan W dari semua matriks 2x2 yang mempunyai bilangan-bilangan nol pada diagonal utamanya adalah sebuah ruang bagian dari ruang vektor M_{22} dari semua matriks 2x2.

Penyelesaian :

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}$ adalah sebarang dua matriks didalam W, dan k adalah sebarang skalar.

Maka

$$kA = \begin{bmatrix} 0 & ka_{12} \\ ka_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}+a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Karena kA dan A + B mempunyai bilangan-bilangan nol pada diagonal utama, maka kA dan A + B terletak dalam W. Jadi W adalah sebuah subruang dari M_{22}.

Definisi 2.2.9 :

Misalkan $V_n^h(F)$ dan $V_n^k(F)$ dua ruang vektor. Jumlahnya adalah keseluruhan vektor-vektor X + Y dimana X di $V_n^h(F)$ dan Y di $V_n^k(F)$. Jelas, ini adalah suatu ruang vektor, disebut ruang jumlah $V_n^s(F)$. Dimensi s ruang jumlah dua ruang bektor tidak melebihi jumlah dimensi keduanya.

Definisi 2.2.10 :

Misalkan $V_n^h(F)$ dan $V_n^k(F)$ dua ruang vektor irisan dua ruang vektor adalah vektor milik bersama kedua ruang itu. Jika X adalah vektor milik bersama kedua ruang itu, demikian juga aX. Jika X dan Y adalah milik bersama kedua ruang demikian juga aX + bY. Jadi irisan dua ruang adalah suatu ruang vektor, disebut ruang irisan $V_n^t(F)$.

Dimensi ruang irisan dua ruang vektor tidak dapat melebihi dimensi yang lebih kecil diantara dua ruang itu.

Definisi 2.2.11:

Jika $F : V \longrightarrow W$ adalah sebuah fungsi dari ruang vektor V ke dalam ruang vektor W, maka V dinamakan transformasi linier, jika :

(i) $F(u+v) = F(u) + F(v)$ untuk semua vektor u dan v di dalam V.

(ii) $F(ku) = kF(u)$ untuk semua vektor u di dalam V dan semua skalar k.

2.3. Sistim-sistim Karakteristik.

Definisi 2.3.1 :

Jika A adalah sebuah matriks nxn, maka sebuah vektor yang tidak nol x dalam R^n dinamakan sebuah vektor karakteristik dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; yaitu $Ax = \lambda x$, untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan harga karakteristik dari A, dan x disebut sebuah vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ. Harga-harga karakteristik dan vektor-vektor karakteristik disebut sistim karakteristik dari A.

Definisi 2.3.2 :

Misal $A = [a_{ij}]$ matriks bujursangkar berordo n. Maka determinan dari matriks $(A - \lambda I)$:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & . & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

disebut suku banyak karakteristik dari A.Dan persamaan : $f(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ disebut persamaan karakteristik A. Akar-akar dari A yaitu λ_1, λ_2, ..., λ_n disebut harga-harga karakteristik A.

Jika $\lambda = \lambda_1$ adalah harga karakteristik A, maka persamaan $Ax = \lambda x$ mempunyai solusi-solusi non trivial yang bersesuaian dengan harga-harga karakteristik A.

Contoh 2.3.1.

Carilah harga-harga karakteristik dari A dan vektor-karakteristik yang bersesuaian dengan harga-harga karakteristiknya, jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

det $|A - \lambda I| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(5-\lambda)(1+\lambda) = 0$$

Harga-harga karakteristik : $\lambda = -1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 5$.

Vektor karakteristik yang bersesuaian dengan $\lambda = -1$

diperoleh dari :

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

Vektor karakteristik yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Vektor karakteristik yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2.4. Matriks Tak Sempurna

Definisi 2.4.1 :

Sebuah matriks A berukuran nxn yang tidak mempunyai sejumlah n vektor karakteristik yang bebas linier dikatakan sebagai matriks tak sempurna.

Definisi 2.4.2 :

Jika n akar-akar dari persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan matriks A, nxn adalah harga-harga dari λ_i yang berulang k kali, maka λ_i disebut sebuah harga karakteristik dengan keragaman $m_i = k$.

Ruang bagian V_o ada dalam V_o disebut sebuah ruang bagian karakteristik dari A