BAB II
MATERI DASAR

2.1 KONSEP MATRIKS SECARA UMUM

Definisi 2.1

Matriks adalah suatu susunan bilangan-bilangan (Riil atau kompleks) yang dijajarkan secara empat persegi panjang menurut baris-baris dan kolom-kolom.

Matriks diberi nama dengan huruf besar. Secara umum matriks A yang memiliki m baris dan n kolom dapat ditulis

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

dengan $a_{i,j}$ ($i = 1,2,3,\ldots,m$; $j = 1,2,3,\ldots,n$) menyatakan elemen yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j. Suatu matriks yang memiliki m baris dan n kolom dikatakan memiliki dimensi m x n ,dan selanjutnya disebut order matriks.

Disamping disajikan dalam bentuk (1) yaitu dalam bentuk blok, penulisan matriks secara ringkas dapat dinyatakan dengan

$$A = (a_{i,j}) \quad (i = 1,2,3,\ldots.m \; ; \; j = 1,2,3\ldots n)$$

Definisi 2.2

Matriks A disebut matriks riil jika semua elemennya riil dan disebut matriks kompleks jika semua elemennya kompleks.

Definisi 2.3

Dua buah matriks $\mathbb{A} = (a_{i,j})$ dan $\mathbb{B} = (b_{i,j})$ dikatakan sama $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ jika keduanya memiliki order yang sama dan memenuhi

$$a_{i,j} = b_{i,j} \qquad (i = 1,2,3,\ldots,m \,:\, j = 1,2,3,\ldots,n)$$

Definisi 2.4

Suatu matriks $\mathbb{A} = (a_{i,j})$ berorder $m \times n$ disebut matriks bujur sangkar jika $m = n$ yaitu banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom , ditulis

$$A = (a_{i,j})_1^n$$

Diagonal yang memuat elemen-elemen $a_{1,1}$, $a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ dalam matriks bujur sangkar dinamakan diagonal utama atau diagonal pokok.

Definisi 2.5

Matriks $\mathbb{A} = (a_{i,j})$ disebut matriks nol ; ditulis $\mathbb{A} = 0$ jika semua $a_{i,j} = 0$ ($i= 1,2,3,\ldots,m$; $j = 1,2,3,\ldots n$).

Definisi 2.6

Matriks bujur sangkar berorder n, disebut matriks diagonal jika semua elemen-elemen diluar diagonal utamanya sama dengan nol

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

secara ringkas ditulis $D = \{ d_1, d_2, \dots, d_n \}$

Definisi 2.7

Matriks identitas I adalah matriks diagonal yang semua elemen pada diagonal utamanya sama dengan 1.

I_n dimaksud adalah matriks identitas berorder n.

2.1.1 Transpose Matriks dan Operasi pada matriks

Definisi 2.8

Jika terdapat matriks $\mathbb{A} = (a_{i,j})$ berorder $m \times n$ maka transpose dari $\mathbb{A}$, ditulis $\mathbb{A}^T$, adalah suatu matriks berukuran $n \times m$ yang didapat dari $\mathbb{A}$ dengan menuliskan baris ke-i dari $\mathbb{A}$ ($i = 1,2,3,\dots,m$) sebagai kolom ke-i dari $\mathbb{A}^T$,atau dengan kata lain kata lain

$$\mathbb{A}^T = (a_{j,i})$$

Contoh 2.1

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{maka} \qquad \mathbb{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.9

Jumlahan dari dua matriks $\mathbb{A} = (a_{i,j})$ dan $\mathbb{B} = (b_{i,j})$ yang berorder sama $m \times n$ adalah suatu matriks $\mathbb{C} = (c_{i,j})$ yang berdimensi $m \times n$ dengan

$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ ($i = 1,2,3,\ldots,m$; $j = 1,2,3,\ldots n$)

Jumlahan dua matriks yang ordenya berbeda tidak didefinisikan.

Contoh 2.2

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ b_1+d_1 & b_2+d_2 & b_3+d_3 \end{bmatrix}$$

Analoog dengan definisi 2.9, untuk pengurangan matriks berdimensi sama $m \times n$, didefinisikan :

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} - \mathbb{B} \text{ jhj } c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}$$
$$(i = 1,2,3,\ldots m ; j = 1,2,3,\ldots,n)$$

Definisi 2.10

Perkalian suatu skalar α dengan matriks $\mathbb{A} = (a_{i,j})$ ($i = 1,2,3,\ldots m$; $j = 1,2,3,\ldots n$) adalah matriks $\mathbb{C} = (c_{i,j})$ ($i = 1,2,3,\ldots,m$; $j= 1,2,3,\ldots,n$) yang semua elemennya didapat dengan mengalikan α dengan setiap elemen A .

$$\mathbb{C} = \alpha\,\mathbb{A} \text{ jhj } c_{i,j} = \alpha\ a_{i,j}$$
$$(i = 1,2,3,\ldots m ; j = 1,2,3,\ldots,n)$$

Contoh 2.3

$$\alpha \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\ a_1 & \alpha\ a_2 & \alpha\ a_3 \\ \alpha\ b_1 & \alpha\ b_2 & \alpha\ b_3 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.11

Perkalian dua buah matriks $\mathbb{A} = (a_{i,j})$ berorde $m \times n$ dengan $\mathbb{B} = (b_{i,j})$ berorder $n \times q$ adalah suatu matriks $\mathbb{C} = (c_{i,j})$ berorder $m \times q$ dengan elemen-elemen $c_{i,j}$ ditentukan oleh

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\ b_{k,j} \quad (i = 1,2,3,\ldots,m ; j = 1,2,3,\ldots,q)$$

Perkalian dua buah matriks hanya dapat dilakukan jika jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua.

Contoh 2.4

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_1c_1+a_2c_2 & a_1d_1+a_2d_2 & a_1e_1+a_2e_2 \\ b_1c_1+b_2c_2 & b_1d_1+b_2d_2 & b_1e_1+b_2e_2 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.12

Jika n bilangan bulat positif dan $A = (a_{i,j})_1^n$ suatu matriks bujursangkar ,maka pangkat n dari A , ditulis A^n diberikan oleh

$$A^n = A.A.A....A \quad \text{sebanyak n kali}$$

Untuk n = 0 didefinisikan $A^0 = I$.

2.1.2 Determinan dan Turunan dari Determinan

Definisi 2.13

Barisan bilangan-bilangan ($j_1, j_2, j_3, ..., j_n$) dengan $j_i \neq j_k$ untuk setiap $i \neq k$ (i,k = 1,2,3,...,n) dan j_i salah satu dari bilangan asli (1,2,3,...,n) disebut suatu permutasi.

Contoh 2.5 (2,3,1,4,5) adalah suatu permutasi

Apabila terdapat n buah bilangan asli 1,2,3,...,n , maka banyaknya permutasi yang terjadi ada n ! = n(n-1)(n-2) ...3.2.1 buah. misal n = 3,maka terdapat 3 ! = 3.2.1 = 6 permutasi, yaitu (1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2) dan (3,2,1).

Definisi 2.14

Jika ($j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$)suatu permutasi maka tanda dari permutasi , ditulis s($j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$) diberikan oleh

$$s(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n) = \text{sign} \prod_{1 \le p,\, q \le n} (j_q - j_p)$$

s = 1 jika produk dari semua $j_q - j_p$, q > p positif dan s = −1 jika produknya negatif.

Contoh 2.6

$$s(3,5,1,2,4) = \text{sign } (5-3).(1-3)(1-5).(2-3)(2-5)(2-1).(4-3)(4-5)(4-1)(4-2)$$
$$= (-1)$$

Pandang matriks bujursangkar A = $(a_{i,j})_1^n$ Kemudian pandang pula suatu hasil kali n buah elemen-elemen dari matriks A yang masing-masing terletak pada baris yang berbeda dan kolom yang berbeda .

Misalkan hasil kali tersebut adalah $a_{1,j_1} . a_{2,j_2} \ldots . a_{n,j_n}$ dengan $j_1, j_2, \ldots, j_n$ menunjukkan kolomnya maka $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ haruslah merupakan permutasi.

Definisi 2.15

Determinan dari suatu matriks bujursangkar A = $(a_{i,j})_1^n$ ditulis Δ , diberikan oleh

$$\Delta = \sum_{j_1, j_2, \ldots j_n} s(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)\ a_{1,j_1} a_{2,j_2} a_{3,j_3} \ldots a_{n,j_n}$$

Notasi determinan yang lain adalah det(A) .

Contoh 2.7

1).Untuk n = 1 maka $\Delta = a_{1,1}$, s(1) = 1

Untuk n = 2 definisi memberikan $\Delta = a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}$

2). Determinan matriks berorder 5 memiliki 5 ! = 120 suku.

Salah satunya adalah $-a_{1,3}\, a_{2,5}\, a_{3,1}\, a_{4,2}\, a_{5,4}$

tanda minus diberikan sebab $s(3,5,1,2,4) = -1$

Teorema 1

Misalkan $A = (a_{i,j}(\lambda))_1^n$ suatu matriks bujur sangkar dan $a_{i,j}(\lambda)$ ($i,j = 1,2,3,\ldots,n$) merupakan fungsi yang dapat dideferensialkan , maka

$$\Delta'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\,\Delta(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(\lambda)$$

dengan $\Delta(\lambda) = \det(A)$ dan $\Delta_k(\lambda)$ menyatakan determinan yang diperoleh dengan mengganti baris ke-k $a_{k,j}(\lambda)$ ($j = 1,2,3,\ldots,n$) dengan baris derivatif $a'_{k,j}(\lambda)$ ($j = 1,2,3,\ldots,n$).

Bukti :

$$\Delta(\lambda) = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} s(j_1,j_2,j_3,\ldots,j_n)\, a_{1,j_1} a_{2,j_2} a_{3,j_3} \cdots a_{n,j_n}$$

dari kalkulus diketahui bahwa

$$\frac{d}{d\lambda}\left(a_{1,j_1} \cdots a_{k,j_k} \cdots a_{n,j_n} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{1,j_1} \cdots a'_{k,j_k} \cdots a_{n,j_n}$$

maka

$$\frac{d}{d\lambda}\,\Delta(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} s(j_1 \ldots j_n)\, a_{1,j_n} \cdots a'_{k,j_k} \cdots a_{n,j_n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(\lambda) \qquad \blacksquare$$

Contoh 2.8

$$\frac{d}{d\lambda}\begin{vmatrix} \sin\lambda & e^{-\lambda} \\ \lambda^2 & \log\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\lambda & -e^{-\lambda} \\ \lambda^2 & \log\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin\lambda & e^{-\lambda} \\ 2\lambda & \lambda^{-1} \end{vmatrix}$$

Akibat

Jika $\Delta(\lambda) = \det(\ \lambda I - B\ )$ dengan B matriks yang berorder n , $n > 1$, maka

$$\frac{d}{d\lambda}\det(\ \lambda I - B\ ) = \sum_{k=1}^{n} \det(\ \lambda I - B_k\ )$$

dengan B_k adalah martriks yang didapat dari B dengan menghilangkan baris ke-k dan kolom ke-k .

Bukti :

$$\det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda-b_{1,1} & -b_{1,2} & -b_{1,3} & \cdots & -b_{1,n} \\ -b_{2,1} & \lambda-b_{2,2} & -b_{2,3} & \cdots & -b_{2,n} \\ -b_{3,1} & -b_{3,2} & \lambda-b_{3,3} & \cdots & -b_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{n,1} & -b_{n,2} & -b_{n,3} & \cdots & \lambda-b_{n,n} \end{vmatrix}$$

maka

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_{2,1} & \lambda-b_{2,2} & -b_{2,3} & \cdots & -b_{2,n} \\ -b_{3,1} & -b_{3,2} & \lambda-b_{3,3} & \cdots & -b_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{n,1} & -b_{n,2} & -b_{n,3} & \cdots & \lambda-b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-b_{2,2} & -b_{2,3} & \cdots & -b_{2,n} \\ -b_{3,2} & \lambda-b_{3,3} & \cdots & -b_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{n,2} & -b_{n,3} & \cdots & \lambda-b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \det(\ \lambda I - B_1)$$

B_1 adalah matriks yang didapat dari B dengan menghilangkan baris pertama dan kolom pertama.

Dengan cara yang sama $\Delta_k(\lambda) = \det(\ \lambda I - B_k\ )$ dengan B_k adalah matriks yang didapat dari B dengan menghilangkan baris ke-k dan kolom ke-k.

Selanjutnya menurut teorema 1 diatas diperoleh

$$\frac{d}{d\lambda}\det(\ \lambda I - B\ ) = \sum_{k=1}^{n} \det(\ \lambda I - B_k\ ) \qquad \blacksquare$$

2.1.3 Invers Matriks

Definisi 2.16

Matriks B merupakan invers dari matriks bujursangkar $A = (a_{i,j})_1^n$,jika

$$A\,B = B\,A = I_n$$

dengan I_n merupakan matriks identitas berorder n .

Contoh 2.9

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \text{ adalah invers dari } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

sebab

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena produk A B dan B A barus dipenuhi secara serentak maka A dan B haruslah matriks bujur sangkar berorder sama.

Invers dari A, jika ada dinotasikan dengan A^{-1}.

Definisi 2.17

Matriks bujursangkar dikatakan singular jika tidak memiliki invers.Sebaliknya jika memiliki invers disebut matriks non singular.

2.1.4 Matriks Permutasi dan Matriks Similar

Definisi 2.18

Matriks Permutasi adalah matriks dengan elemen 0 dan 1 sedemikian sehingga elemen 1 hanya muncul sekali dalam tiap baris dan tiap kolom .

Contoh 2.10

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.19

Dua buah matriks $A = (a_{i,j})_1^n$ dan $B = (b_{i,j})_1^n$ disebut similar jika terdapat matriks non singular R sedemikian sehingga

$$B = R^{-1} A R$$

Contoh 2.11

Matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ dan

$$B = R^{-1} A R = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

adalah similar.

2.2 VEKTOR

Definisi 2.20

Suatu vektor adalah matriks yang hanya memiliki satu baris atau satu kolom. Dan disebut vektor baris atau vektor kolom.

Vektor-vektor dilambangkan dengan huruf kecil. Jumlah elemen dalam vektor baris / kolom merupakan dimensi vektor tersebut.

Transpose vektor baris adalah vektor kolom dan demikian pula sebaliknya.

Contoh 2.12

$u = (1,0,2,0,0)$ adalah vektor baris berdimensi 5

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ merupakan vektor kolom berdimensi 2

$v^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T = (1,2)$

Definisi 2.21

Vektor nol adalah suatu vektor yang semua elemennya nol. Jika x suatu vektor nol maka ditulis x = 0

Untuk pembahasan selanjutnya vektor u = $(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ selalu menyatakan vektor kolom berdimensi n dengan elemen-elemen $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$.

2.3 NILAI KARAKTERISTIK DAN VEKTOR KARAKTERISTIK.

Definisi 2.22

Jika $A = (a_{i,j})_1^n$ suatu matriks bujur sangkar berorder n, maka suatu skalar λ disebut nilai karakteristik (eigenvalue) dari A jika memenuhi persamaan karakteristik

$$A\,c = \lambda\,c$$

untuk suatu vektor kolom $c \neq 0$

Vektor c disebut vektor karakteristik (eigen vektor) yang berhubungan dengan nilai karakteristik λ.

Contoh 2.13

(1,-1) adalah suatu vektor karakteristik yang berhubungan dengan nilai karakteristik $\lambda = -2$ untuk

matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

sebab $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Definisi 2.23

Misalkan $A = (a_{i,j})_1^n$ matriks bujur sangkar berorder n maka $(\lambda I - A)$ disebut matriks karakteristik dari A dan determinan dari matriks karakteristik yaitu $\det(\lambda I - A)$, apabila diuraikan akan menghasilkan polinomial dalam λ yang disebut polinomial karakteristik dari A

Teorema 2.

λ merupakan nilai karakteristik matriks A jika dan hanya jika $\det(\lambda I - A) = 0$

Bukti:

Misalkan $\det(\lambda I - A) \neq 0$ maka ada invers dari $(\lambda I - A)$ sedemikian sehingga berlaku

$$(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)\ c = 0$$

yang akan mempunyai jawab $c = 0$. Padahal vektor c tidak boleh sama dengan nol menurut definisi 2.22 . Jadi penyelesaian untuk $c \neq 0$ dipenuhi jika $(\lambda I - A)$ tidak punya invers, atau $\det(\lambda I - A) = 0$. ∎

Teorema 3

Misalkan $A = (\ a_{i,j}\ )_1^n$ suatu matriks bujur sangkar berorder n maka determinan karakteristik $\det(\ \lambda I - A\ )$ merupakan polinomial berderajad n dalam λ dengan koefisien λ^n sama dengan satu.

Bukti:

Pandang $B = \lambda I - A$ .Menurut definisi determinan

$$\det(B) = \sum\ s(\ j\ )\ \ b_{1,j_1} b_{2,j_2} b_{3,j_3} \cdots b_{n,j_n}$$

satu - satunya permutasi yang memungkinkan λ^n adalah permutasi identintas, sedang permutasi - permutasi yang lain lebih kecil dari λ^n. Maka

$$b_{1,1}\ b_{2,2}\ b_{3,3}\ \ldots\ b_{n,n} = (\lambda - a_{1,1})(\lambda - a_{2,2})\ \ldots\ (\lambda - a_{n,n})$$
$$= \lambda^n + \ldots$$

Jadi koefisien λ^n adalah satu . ∎

Dua buah matriks similar akan memiliki nilai-nilai karakteristik yang sama.Sebab misalkan A dan $B = R^{-1} A R$ similar dan λ merupakan nilai karakteristik sembarang, maka

$$\lambda I - B = \lambda I - R^{-1}A R = R^{-1}\lambda I R - R^{-1}A R = R^{-1}(\lambda I - A) R$$

$$\det(\lambda I - B) = \det(R^{-1}) \det(\lambda I - A) \det(R) = \det(\lambda I - A)$$

Jadi A dan B memiliki persamaan karakteristik yang sama dan kemudian mereka memiliki nilai -nilai karakteristik yang sama pula.

Setiap matriks berorder n memiliki n nilai karakteristik $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ \ldots \ ,\lambda_n$ yang timbul dari faktorisasi

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) = 0 \qquad (3)$$

Beberapa λ_j mungkin ada yang sama, sehingga det $(\lambda I - A)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ \ldots\ (\lambda - \lambda_r)^{m_r} = 0 \qquad (4)$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ \ldots \ ,\lambda_r$ semuanya berbeda satu sama lain dan bilangan positip $m_1, m_2, m_3, \ \ldots \ ,m_r$ menyatakan kelipatan dari masing - masing nilai karakteristik.

($m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n = n$)

Matriks A dikatakan memiliki nilai nilai karakteristik yang semuanya berbeda jika λ_j dalam faktorisasi (3) berbeda satu sama lain. Atau jika semua $m_j = 1$ dan $r = n$ dalam faktorisasi (4)

2.3.1 Nilai Karakteristik sederhana

Definisi 2.24

Misalkan λ_i adalah nilai -nilai karakteristik dari matriks bujur sangkar $A = (a_{i,j})_1^n$ dan berlaku

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}.$$

Dengan $m_i \neq m_j$. untuk $i \neq j$ dan $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$

maka λ_k disebut nilai karakteristik sederhana (simple eigen value) jika $m_k = 1$ atau dengan kata lain λ_k tunggal.

Jika λ_k merupakan nilai karakteristik sederhana dari A maka $\Delta'(\lambda_k) \neq 0$ dan sebaliknya.

2.3.2 Batas Radius Spektral Matriks

Definisi 2.25

Misalkan $A = (a_{i,j})_1^n$ suatu matriks kompleks dengan nilai-nilai karakteristik λ_i, $1 \leq i \leq n$, maka

$$\rho(A) = \text{maks}_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$$

merupakan radius spektral dari matriks A

Teorema 4.

Misalkan $A = (a_{i,j})_1^n$ suatu matriks kompleks sembarang dan misalkan

$$\wedge_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} | a_{i,j} | \qquad 1 \le i \le n$$

Maka semua nilai karakteristik λ dari A terletak dalam union dari cakram – cakram

$$| z-a_{i,i} | \le \wedge_i \ , \ 1 \le i \le n$$

Bukti:

Misalkan x suatu vektor karakteristik yang berhubungan dengan nilai karakteristik λ, dan misalkan $|x_m| = \text{maks } |x_j|, j = 1,2,3,\ldots,n.$

karena $(\lambda I-A).x = 0$

maka $\qquad (\lambda-a_{m,m}).x_m + \sum_{j\neq m}(-a_{m,j}).x_j = 0$

dengan mengambil harga mutlaknya didapat

$$\begin{aligned} |\lambda-a_{m,m}|.|x_m| &= |\sum_{j\neq m}(a_{m,j}).x_j| \\ &\le \sum_{j\neq m} | a_{m,j} | \, | x_j| \\ &\le \sum_{j\neq m} | a_{m,j} | \, | x_m| \end{aligned}$$

pembagian pertidaksamaan terakhir oleh $|x_m| > 0$ didapat

$|\lambda-a_{m,m}| \le \wedge_m$, untuk $\quad \wedge_m = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{n} | a_{m,j} |$

jadi nilai nilai karakteristik λ terletak pada cakram $|z-a_{m,m}| \le \wedge_m$. Dan karena λ sembarang nilai karakteristik dari A maka semua nilai-nilai karakteristik matriks A terletak pada union cakram – cakram

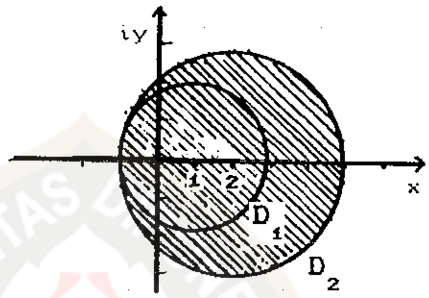
$$|z-a_{i,i}| \le \wedge_i \ , \quad 1 \le i \le n. \qquad \blacksquare$$

Contoh 2.14

Matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ memiliki nilai-nilai karakteristik $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = -1$.

Akan ditunjukkan bahwa keseluruhan λ_i berada dalam daerah lingkaran $| z - a_{i,i} | \leq \Lambda_i$

Maka $\Lambda_1 = 2$ dan $\Lambda_2 = 3$



D_1 adalah daerah lingkaran $| z - 1 | \leq 2$ dan D_2 merupakan daerah lingkaran $| z - 2 | \leq 3$. Ternyata λ_1 dan λ_2 terletak didalam union D_1 dan D_2 .

Karena $|z - a_{i,i}| \leq \Lambda_i$, merupakan himpunan bagian dari cakram $|z| \leq | a_{i,i} | + \Lambda_i$, maka didapat

Akibat 1

Jika $A = (a_{i,j})_1^n$ suatu matriks kompleks sembarang dan

$$v = \text{maks}_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} | a_{i,j} |$$

maka $\rho(A) \leq v$

Jadi, maksimum dari jumlahan baris harga mutlak elemen – elemen A memberikan batas atas dari radius spektral $\rho(A)$ dari matriks A

Karena nilai nilai karakteristik dari A dan A^T sama, maka aplikasi dari akibat 1 terhadap A^T dengan cara yang sama didapat :

Akibat 2

Jika $A = (a_{i,j})_1^n$ suatu matriks kompleks sembarang dan

$$v' = \text{maks}_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

maka $\rho(A) \le v'$

Jumlahan baris dan jumlahan kolom dari matriks A dengan mudah dapat dihitung, dan batas atas yang baik bagi $\rho(A)$ adalah mimimum dari v dan v '.

Akibat 3

Jika $A = (a_{i,j})_1^n$ suatu matriks kompleks sembarang dan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sembarang bilangan riil positif, dan misalkan

$$v = \text{maks}_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\, x_j}{x_i} \right\}$$

$$v' = \text{maks}_{1 \le j \le n} \left\{ x_j \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_{i,j}|}{x_i} \right\}$$

maka $\rho(A) \le \min(v, v')$.

Bukti :

Misalkan $D = \left[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \right]$ matriks diagonal beroder n dengan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ merupakan elemen diagonalnya.

Dikonstruksikan matriks similar $D^{-1}A\,D$, dengan D^{-1} invers dari matriks diagonal D. maka

$D^{-1}A\,D$ =

$$= \begin{pmatrix} 1/x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}\dfrac{x_1}{x_1} & a_{1,2}\dfrac{x_2}{x_1} & \dots & a_{1,n}\dfrac{x_n}{x_1} \\ a_{2,1}\dfrac{x_1}{x_2} & a_{2,2}\dfrac{x_2}{x_2} & \dots & a_{2,n}\dfrac{x_n}{x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\dfrac{x_1}{x_n} & a_{n,2}\dfrac{x_2}{x_n} & \dots & a_{n,n}\dfrac{x_n}{x_n} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

dengan menggunakan akibat 1 dan 2 dapat dibentuk v dan v' dimana

$$v = \text{maks}_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \, x_j}{x_i} \right\}$$

$$v' = \text{maks}_{1 \le j \le n} \left\{ x_j \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_{i,j}|}{x_i} \right\}$$

Dan karena A dan $D^{-1}A\,D$ memiliki nilai karakteristik yang sama maka dapat disimpulkan

$$\rho(A) \le \min(v, v') \qquad \blacksquare$$

2.4 BILANGAN KOMPLEKS

Definisi 2.26

Bilangan kompleks z dinyatakan dalam bentuk $z = x + iy = \text{Re}(z) + i\,\text{Im}(z)$ dengan x dan y riil dan $i = \sqrt{-1}$

$\text{Re}(z) = x$ menyatakan bagian riil dan $\text{Im}(z) = y$ menyatakan bagian imaginer dari bilangan kompleks z.

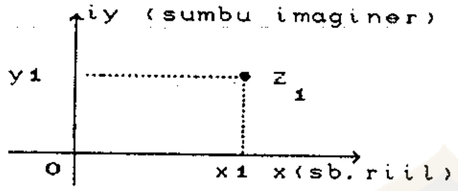
Definisi 2.27

Modulus atau harga mutlak dari bilangan kompleks z

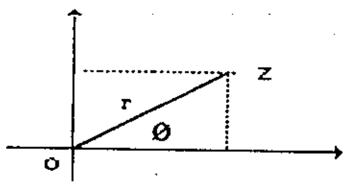
ditulis $|z|$ diberikan oleh

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$ selalu positif atau nol

Bilangan kompleks z selalu dapat dinyatakan dengan satu titik pada bidang kompleks (bidang z).



gambar 1



gambar 2

Gambar 1 melukiskan bidang kompleks dan satu titik $z_1 = x_1 + i\, y_1$,dan gambar 2 merupakan bidang kompleks dalam koordinat polar, dimana letak setiap titik pada bidang z ditentukan secara tunggal oleh r dan Ø . r menyatakan besar z yang merupakan panjang vektor z dan Ø menyatakan sudut yang dibentuk sumbu riil positif dengan oz, dimana putaran yang berlawanan dengan arah jarum jam menyatakan sudut positif. r dapat dinyatakan sebagai modulus z atau

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dalam koordinat polar $x = r \cos Ø$

$y = r \sin Ø$

maka untuk $z \neq 0 + 0\,i$ berlaku

$$z = r\,(\cos Ø + i \sin Ø)$$

$$r = |z|$$

Definisi 2.28

$$e^{i\emptyset} \overset{df}{\equiv} \cos \emptyset + i \sin \emptyset$$

Sifat - sifat :

1). $| e^{i\emptyset} | = | e^{-i\emptyset} | = \sqrt{\cos^2\emptyset + \sin^2\emptyset} = 1$

2). $e^{i\emptyset_1} e^{i\emptyset_2} = (\cos \emptyset_1 + i \sin \emptyset_1) (\cos \emptyset_2 + i \sin \emptyset_2)$

$= (\cos \emptyset_1 \cos \emptyset_2 - \sin \emptyset_1 \sin \emptyset_2) +$

$i(\cos \emptyset_1 \sin \emptyset_2 + \sin \emptyset_1 \cos \emptyset_2)$

$= \cos (\emptyset_1 + \emptyset_2) + i \sin (\emptyset_1 + \emptyset_2)$

$= e^{i(\emptyset_1 + \emptyset_2)}$

$$\frac{e^{i\emptyset_1}}{e^{i\emptyset_2}} = e^{i\emptyset_1} e^{-i\emptyset_2} = e^{i(\emptyset_1 - \emptyset_2)}$$

Dari sifat (2) untuk $z_k = r_k (\cos \emptyset_k + i \sin \emptyset_k)$ ($k = 1,2,...,n$) berlaku

$z_1 z_2 .. z_n = r_1 r_2 .. r_n (\cos(\emptyset_1+\emptyset_2+..+\emptyset_n)+i\sin(\emptyset_1+\emptyset_2+..+\emptyset_n))$

jika diambil $z_1=z_2=..=z_n=r (\cos \emptyset + i \sin \emptyset)$ akan diperoleh

$$z^n = r^n (\cos n\emptyset + i \sin n\emptyset)$$

Akan dicari akar pangkat n dari bilangan kompleks z, yaitu akan dicari penyelesaian dari $\zeta^n = z$

Pandang $z \neq 0$ dan $z = r (\cos \emptyset + i \sin \emptyset)$ dan dimisalkan $\zeta = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$, dengan ρ dan θ akan dicari.

maka

$$\rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r (\cos \emptyset + i \sin \emptyset)$$

$$\rho^n = r , \quad \rho = r^{1/n} \quad \text{dan}$$

$$n\theta = \emptyset + 2k\pi$$

$$\theta = \frac{\emptyset}{n} + \frac{2k\pi}{n} , \quad k = 0,1,2,...$$

karena harga θ akan berulang untuk $n \geq k$, k cukup diambil 0,1,2,...,(n-1)

Jadi untuk $z \neq 0$ diperoleh n penyelesaian yang berlainan yaitu

$$\zeta_k = r^{1/n} \{\cos (\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + i \sin (\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})\}$$

Jika $z = 0$ maka $\zeta = 0$ sedemikian hingga $0^{1/n} = 0$.

Contoh 2.15

Jika $1 = \cos 0 + i \sin 0$, maka akar pangkat tiga dari 1 adalah $1^{1/3} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0,1,2$

akar-akar tersebut adalah

$$z_1 = 1$$
$$z_2 = \frac{-1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$$
$$z_3 = \frac{-1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

2.5 GRUP FINITE

Definisi 2.29

Suatu grup (G,*)adalah suatu himpunan G dengan suatu operasi (*) pada G sedemikian sehingga memenuhi :

1. Tertutup,yaitu untuk setiap a,b elemen G dapat ditemukan dengan tunggal elemen c dalam G sedemikian hingga berlaku a*b = c
2. Assosiatifitas, yaitu (a*b)*c = a*(b*c) untuk semua a,b,c elemen G.
3. Identitas,yaitu terdapatlah elemen e dalam G (disebut elemen identitas) sedemikian sehingga a*e = e*a = a untuk setiap a elemen G.
4. Invers, yaitu untuk setiap elemen a dalam G, dapat ditemukan elemen b dalam G (disebut invers dari a) sedemikian sehingga a*b = b*a = e

Jika suatu grup memiliki sifat a*b = b*a untuk setiap a dan b elemen G dikatakan bahwa G *abelian*. Suatu grup dinamakan non abelian jika untuk setiap a dan b elemen G berlaku a*b ≠ b*a .

Jika operasi yang disajikan berupa pergandaan , grupnya disebut grup multiplikatif .Sedangkan bila operasinya berupa jumlahan maka disebut grup aditif.
Untuk pembicaraan selanjutnya setiap operasi yang digunakan selalu dimaksudkan operasi pergandaan kecuali disebut khusus.

Definisi 2.30

Grup finite adalah suatu grup yang elemen – elemennya berhingga banyaknya. Dilain pihak grup dikatakan infinite (tak hingga) jika banyaknya elemen dalam G tak berhingga.

Definisi 2.31

Banyaknya elemen dari suatu grup berhingga disebut order. Order grup ditulis dengan O(G).

Contoh 2.16

Grup G = { 1,3,7,9 } dengan operasi pergandaan modulo 10 memiliki order O(G) = 4.

Definisi 2.32

Order dari suatu elemen g dalam grup finite G dengan operasi pergandaan adalah bilangan bulat terkecil m sedemikian sehingga $g^m = e$. Dengan $g^m = g.g.g....g$ sebanyak m kali.

Jadi untuk menentukan order dari elemen g cukup hanya menghitung $g^1, g^2, g^3, ...$ sampai ditemukan elemen satuan untuk pertama kali.

Contoh 2.17

Grup G = { 1,2,4,7,8,11,13,14 } pada operasi pergandaan modulo 15

Misalkan ingin dicari order dari 7 , maka dihitung $7^1 = 7$, $7^2 = 4$, $7^3 = 13$, $7^4 = 1$. Order dari 7 adalah 4. Dengan cara yang sama order dari 11 adalah 2 sebab $11^1 = 11$, $11^2 = 1$.

Apabila terdapat grup G berhingga dengan order n maka untuk setiap $a \in G$ berlaku $a^n = e$, sebab elemen a memiliki order m sedemikian sehingga $a^m = e$ .Maka m adalah divisor dari n, Jadi $n = km$ sehingga $a^n = a^{km} = (a^m)^k = (e)^k = e$.