BAB III

FUNGSI TERUKUR

3.1 UKURAN

Pertama didefinisikan sebuah himpunan U dan sebuah kelas $\mathfrak{S}$ yang merupakan himpunan bagian - himpunan bagian U, sehingga setiap kejadian A diartikan sebagai beberapa himpunan bagian dari U termasuk dalam $\mathfrak{S}$. Karena sebarang kejadian A diartikan sebagai gabungan (union) elemen-elemen dari U yang termasuk dalam A, titik-titik dalam himpunan U disebut Elemen kejadian (Elementary Events) dan himpunan U disebut ruang dari elmentary event. Kelas $\mathfrak{S}$ adalah sebuah himpunan dari kejadian-kejadian A.

Definisi 3.1.1

Sebuah aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ disebut sebuah σ-aljabar jika untuk sebarang barisan dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathfrak{S}$, untuk k = 1, 2, 3, ... , $\tilde{\bigcup_{k=1}} A_k \in \mathfrak{S}$. Himpunan $A \in \mathfrak{S}$ disebut terukur pada $\mathfrak{S}$ atau $\mathfrak{S}$-terukur (karena $\tilde{\bigcap_{k=1}} A_k = \overline{\tilde{\bigcup_{k=1}} \bar{A}_k}$, irisan dari sebarang kumpulan terhitung dari himpunan - himpunan yang termasuk dalam $\mathfrak{S}$ juga termasuk dalam $\mathfrak{S}$).

Teorema 3.1.1

Untuk setiap klas dari himpunan-himpunan $\mathcal{A}$ terdapat sebuah σ-aljabar $\mathfrak{S}$ terkecil memuat $\mathscr{A}$.

Bukti :

σ-aljabar ini disebut σ-aljabar yang dibangun oleh klas $\mathscr{A}$, dan dinotasikan dengan $\sigma\{\mathscr{A}\}$. Adalah mudah untuk membuktikan keberadaan dari σ-aljabar seperti itu. Terdapat σ-aljabar-σ-aljabar memuat $\mathscr{A}$. Untuk menunjukkannya cukup mengambil klas dari semua himpunan bagian-himpunan bagian dari himpunan U. Catatan bahwa irisan dari sebarang himpunan σ-aljabar adalah sebuah σ-aljabar, terlihat bahwa irisan dari semua σ-aljabar memuat $\mathscr{A}$ adalah σ-aljabar minimal yang memuat $\mathscr{A}$.

Misal bahwa untuk setiap himpunan A dalam kelas tertentu dari himpunan-himpunan $\mathscr{A}$, dengan $\mathscr{A} \subset \mathfrak{S}$,ditentukan sebuah bilangan berhingga (definite) $W = W(A)$, yang mungkin $-\infty$ atau $+\infty$. Ini memberi definisi fungsi himpunan W pada $\mathscr{A}$ into himpunan bilangan-bilangan real $A \rightarrow W = W(A)$.

Definisi 3.1.2

Sebuah fungsi himpunan W dikatakan additive (atau additive berhingga) jika diasumsikan harga-harga tak berhingga (infinite) dengan hanya satu tanda dan jika untuk sebarang barisan berhingga dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathscr{A}$ (untuk $k = 1, 2, \ldots, n$) merupakan pasangan saling asing ($A_k \cap A_r = \emptyset$ untuk $k \neq r$, $k,r = 1, 2, \ldots, n$) dan $\emptyset$ menunjukkan himpunan kosong sedemikian sehingga :

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$$

Didapatkan bahwa :

$$W\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} W(A_k)$$

Jika persamaan ini dipenuhi untuk sebarang kumpulan countable (terhitung) dari himpunan-himpunan yaitu jika :

$$W\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} W(A_k)$$

Untuk sebarang barisan dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathcal{A}$, di mana $A_k \cap A_r = \emptyset$, $k \neq r$, untuk $k,r = 1, 2, \ldots,n,\ldots$ sedemikian sehingga :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

maka fungsi himpunan $W = W(A)$ dikatakan countably additive (atau completely additive).

Definisi 3.1.3

Sebuah fungsi himpunan non negatif $\mu = \mu(A)$ yang countably additive didefinisikan pada sebuah σ-aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ dan memenuhi $\mu(\emptyset) = 0$ dinamakan *sebuah ukuran.*

Jika sebuah σ-aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ didefinisikan pada sebuah himpunan U dan sebuah ukuran μ didefinisikan pada $\mathfrak{S}$, maka himpunan U dinamakan *sebuah ruang dengan ukuran* $\{ U, \mathfrak{S}, \mu \}$ *atau sebuah ruang terukur.* Bagian terakhir akan diaplikasikan untuk sebuah himpunan U dengan sebuah σ-aljabar tertentu dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ dimana ukuran μ tidak diberikan. Dapat dilihat dengan mudah bahwa keadaan $\mu(\emptyset) = 0$ ekivalen dengan keadaan bahwa $\mu(A)$ tidak sama dengan $+\infty$ untuk semua $A \in \mathfrak{S}$.

Sebarang himpunan $A \in \mathfrak{S}$ dari sebuah ruang dengan ukuran $\{U, \mathfrak{S}, \mu\}$ dapat dianggap sebagai sebuah ruang dengan ukuran $\{A, \mathfrak{S}_A, \mu_A\}$ di mana $\mathfrak{S}_A$ adalah σ-aljabar dari himpunan bagian-himpunan bagian A dari bentuk $A \cap B$ untuk sebarang himpunan bagian (subset) B dari $\mathfrak{S}$ dan $\mu_A(C) = \mu(C)$ untuk setiap $C \in \mathfrak{S}_A$.

Teorema 3.1.2

a. Jika A dan $B \supset A$ termasuk dalam $\mathfrak{S}$, maka $\mu(A) \le \mu(B)$, dan jika $\mu(A) \neq \infty$, maka $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

b. Jika $\{A_n\}$ adalah sebuah barisan infinite atau countable himpunan-himpunan yang termasuk dalam $\mathfrak{S}$, maka $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \le \sum_n \mu(A_n)$

c. Jika $\{A_n\}$ adalah sebuah barisan naik dari himpunan-himpunan dalam $\mathfrak{S}$ yaitu jika $A_{n+1} \supset A_n$ untuk $n = 1, 2, \ldots$ maka

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad (1)$$

d. Jika $\{A_n\}$, untuk $n = 1, 2, \ldots.$ adalah sebuah barisan turun dari himpunan-himpunan dalam $\mathfrak{S}$ dan jika $\mu(A_1) < \infty$ maka :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad (2)$$

Bukti :

a. Jika $B \backslash A \in \mathfrak{S}$ dan $B = A \cup (B \backslash A)$ (untuk $A \subset B$), maka $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$

b. Diambi l $C_1 = A_1$ dan $C_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-i} A_k \right)$ untuk $n = 2, 3, \ldots$ Himpunan C_n termasuk dalam $\mathfrak{S}$ dan mereka pasangan disjoint (yaitu $C_n \cap C_r = \emptyset$ untuk $n \neq r$).

$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dan $\mu(C_n) \leq \mu(A_n)$ maka :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

c. Jika $A_n \subset A_{n+1}$ untuk $n = 1, 2, \ldots$,diperoleh $C_n = A_n \setminus A_{n-1}$ dan $\mu(C_n) = \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})$, jika $\mu(A_{n-1}) \neq \infty$. Misal bahwa $\mu(A_n) \neq \infty$ untuk setiap n dan $A_o = \emptyset$, maka :

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu(A_n) - \mu(A_{n-1}) \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

Pada bagian lain , jika $\mu(A_{n_o}) = \infty$ untuk $n = n_o$, maka untuk $n > n_o$ secara langsung diperoleh $\mu(A_n) = \infty$ dan $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \infty$.

d. Diambil $B_n = A_1 \setminus A_n$ untuk $n = 1, 2, \ldots$ Himpunan B_n termasuk dalam σ-aljabar $\mathfrak{S}$, mereka menambah sifat monoton (yaitu $B_n \subset B_{n+1}$) dan dari (c),

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$$

Pada bagian lain, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ maka :

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \mu(A_1) - \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$$

$$= \mu(A_1) - \lim_{n \to \infty} \left[\mu(A_1) - \mu(A_n) \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad \square$$

Definisi 3.1.4

Diambil $\{A_n\}$ untuk n = 1, 2, ... menunjukkan sebuah barisan tak berhingga himpunan-himpunan. Limit superior ($\overline{\text{Lim}}\ A_n$)dari barisan $\{A_n\}$didefinisikan sebagai himpunan yang terdiri dari titik-titik dalam U yang termasuk dalam beberapa himpuna A_n yang tak berhingga. Sedangkan limit inferior ($\underline{\text{Lim}} A_n$) dari barisan $\{A_n\}$ didefinisikan sebagai himpunan titik-titik dalam ruang U yang termasuk dalam semua himpunan A_n yang berhingga ,untuk n= 1,2, ...

$$\overline{\text{Lim}}\ A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\underline{\text{Lim}}\ A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Jika sebuah barisan $\{A_n\}$, untuk n = 1,2, ... adalah sebuah barisan naik (increasing), maka $\overline{\text{Lim}}\ A_n = \underline{\text{Lim}}\ A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Jika $\{ A_n \}$ adalah barisan turun (decreasing) maka $\overline{\text{Lim}}\ A_n = \underline{\text{Lim}}\ A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Dari definisi limit superior dan inferior , limit superior dan inferior dari barisan himpunan - himpunan yang termasuk dalam σ-aljabar $\mathfrak{S}$ juga termasuk dalam $\mathfrak{S}$. Jika μ menunjukkan sebuah ukuran pada $\mathfrak{S}$, maka dari pernyataan (c) dan (d) (theorema 2) bahwa

$$\mu\left[\overline{\text{Lim}}\ A_n\right] = \lim_{n\to\infty} \mu\left[\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right] \qquad (3)$$

$$\mu\left[\underline{\text{Lim}}\ A_n\right] = \lim_{n\to\infty} \mu\left[\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right] \qquad (4)$$

dengan persamaan 3 berlaku jika ukuran μ berhingga. Berdasarkan definisi konvergensi dari suatu barisan himpunan-himpunan bahwa untuk setiap titik $u \in U$ termasuk dalam hanya pada bilangan berhingga dari himpunan A_n atau termasuk dalam semua A_n untuk beberapa n dan setiap barisan monoton adalah konvergen. Karena :

$$\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \mu(A_n) \le \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right),$$

dan dari persamaan (1) dan (2) bahwa untuk setiap barisan konvergen $\{A_n\}$ dari himpunan - himpunan A_n dan setiap ukuran μ berhingga :

$$\mu\left(\text{Lim } A_n\right) = \text{Lim } \mu(A_n)$$

Persamaan ini diperoleh dari :

1. Jika A_n adalah barisan naik maka $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\mu\left(\text{Lim } A_n\right) = \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad \text{(dari persamaan 1 theorema 2).}$$

2. Jika A_n adalah barisan turun, maka $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\mu\left(\text{Lim } A_n\right) = \mu\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad \text{(dari persamaan 2 theorema 2).}$$

Perhatikan sebarang fungsi-fungsi Countably additive yang didefinisikan pada sebuah σ-aljabar $\mathfrak{S}$, yang disebut sebagai harga-harga. Karena setiap harga adalah pengurangan antara dua ukuran, konsep tentang harga-harga menghasilkan konsep tentang ukuran-ukuran.

Definisi 3.1.5

Untuk sebarang $A \in \mathfrak{S}$,besarnya

$$W^{+}(A) = \sup_{A' \subset A;\, A' \in \mathfrak{S}} W(A') \quad ; \quad W^{-}(A) = -\inf_{A' \subset A;\, A' \in \mathfrak{S}} W(A')$$

disebut variasi positif dan negatif dari harga W pada himpunan A, dan besarnya $|W|\cdot(A) = W^{+}(A) + W^{-}(A)$ dinamakan variasi absolut. Untuk sebarang $A \in \mathfrak{S}$,

$$|W|(A) \geq |W(A)|$$

Dari definisi bahwa W^{+}dan W^{-} adalah nonnegatif dan fungsi himpunan nondecreasing : jika $A \subset B$, maka

$$0 \leq W^{\pm}(A) \leq W^{\pm}(B)$$

Dan

$$W^{\pm}(A_1 \cup A_2) \leq W^{\pm}(A_1) + W^{\pm}(A_2)$$

Definisi 3.1.6

Sebarang harga dapat digambarkan sebagai pengurangan dua ukuran :

$$W(A) = W^{+}(A) - W^{-}(A)$$

3.2 SYARAT FUNGSI TERUKUR

Sebuah variabel random dapat dianggap sebagai sebuah fungsi dari sebuah elemen kejadian (elementary event), $\xi = f(u)$, $u \in U$. Pada theory dasar Probabilitas sebuah variabel random ξ secara lengkap ditunjukkan dengan fungsi distribusinya $F(x) = P\{\xi < x\}$. Jika dalam theory Probabilitas digunakan elemen kejadian $\{\xi < x\}$ maka dalam ruang dengan ukuran digunakan himpunan $\{u, f(u) < x\}$. Selanjutnya untuk membicarakan sebuah fungsi distribusi dari sebuah variabel random, himpunan $\{u, f(u) < x\}$ harus untuk sebarang real x termasuk dalam $\mathfrak{S}$. Pada bagian ini akan dipelajari klas dari fungsi - fungsi yang didefinisikan pada ruang terukur $\{U, \mathfrak{S}, \mu\}$ dengan sifat-sifatnya.

Definisi 3.2.1

$\mathfrak{S}$ menunjukkan sebuah σ-aljabar dari himpunan-himpunan dalam ruang U. Diambil $f(u)$ menunjukkan sebuah fungsi yang di definisikan pada sebuah himpunan $\mathfrak{S}$-terukur M dan dapat diasumsikan harga-harga real (kemungkinan $\pm \infty$). Masing-masing fungsi $f(u)$ dikatakan $\mathfrak{S}$-terukur jika untuk setiap real x himpunan $\{ u \ ; \ f(u) < x \}$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Corollary

Jika $f(u)$ adalah fungsi $\mathfrak{S}$-terukur , maka untuk setiap x, himpunan

$\{ u \ ; u \in M \ , f(u) \le x \}$; $\{ u \ ; u \in M \ , f(u) > x \}$, $\{ u \ ; u \in M \ , f(u) \ge x \}$, $\{ u \ ; u \in M \ , f(u) = x \}$, $\{ u \ ; u \in M \ , a \le f(u) < b \}$, dst.

adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Bukti

1. $f(u)$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur $\Leftrightarrow$ untuk sebarang real x himpunan $\{ u; f(u) \ge x \}$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur .
   Jika $f(u)$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur, maka untuk masing-masing bilangan real x himpunan $\{ u; f(u) < x \}$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur (definisi 1). Maka komplemen dari himpunan $\{ u; f(u) < x \}$ yaitu $\{ u; f(u) \ge x \}$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur. Sebaliknya juga demikian.
2. $f(u)$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur $\Leftrightarrow$ untuk masing-masing bilangan x himpunan $\{ u; f(u) \le x \}$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur. Jika $f(u)$

adalah $\mathfrak{S}$-terukur maka himpunan $\{ u;\ f(u) < x + \frac{1}{n} \}$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur untuk n = 1,2,... sehingga :

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{ u;\ f(u) < x + \frac{1}{n} \} = \{ u;\ f(u) \le x \}$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur. Sebaliknya juga demikian.

3. $f(u)$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur $\Longrightarrow$ himpunan $\{ u;\ f(u) = x \}$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur untuk masing-masing bilangan real.

   $\{ u;\ f(u) = x \} = \{ u;\ f(u) \ge x \} \cap \{ u;\ f(u) \le x \}$

   Karena himpunan-himpunan pada ruas kanan adalah $\mathfrak{S}$-terukur maka irisannya juga merupakan $\mathfrak{S}$-terukur.

Teorema 3.2.1

Diambil $\{ f_n(u),\ n = 1,2,\ldots,\ u \in M \}$ menunjukkan sebuah barisan dari fungsi $\mathfrak{S}$-terukur. Maka fungsi-fungsi :

$$\operatorname*{Sup}_n f_n(u),\ \operatorname*{Inf}_n f_n(u),\ \overline{\operatorname*{Lim}_n} f_n(u),\ \underline{\operatorname*{Lim}_n} f_n(u)$$

adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Bukti:

Diperoleh dari relasi - relasi :

$$\{u;u \in M,\ \operatorname*{Sup}_n f_n(u) > x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ u;u \in M,\ f_n(u) > x \}$$

$$\{u;u \in M,\ \operatorname*{Inf}_n f_n(u) < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ u;u \in M,\ f_n(u) < x \}$$

$$\{u;u \in M,\ \overline{\operatorname*{Lim}_n} f_n(u) < x \} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \{u;u \in M,\ f_j(u) < x - \frac{1}{k} \}$$

$$\{u;u \in M,\ \underline{\operatorname*{Lim}_n} f_n(u) > x \} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \{u;u \in M,\ f_j(u) > x + \frac{1}{k} \} \quad \square$$

Definisi 3.2.2

Fungsi indikator $\chi_A(u)$ dari sebuah himpunan A didefinisikan sebagai sebuah fungsi yang sama dengan 1 untuk $u \in A$ dan sama dengan 0 untuk $u \notin A$. Jadi bisa dinyatakan :

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{jika } u \in A \\ 0 & \text{jika } u \notin A \end{cases}$$

Catatan :

$$\chi_{A\cap B}(u) = \chi_A(u)\, \chi_B(u)$$

$$\chi_{A\cup B}(u) = \chi_A(u) + \chi_B(u) \quad (A \cap B = \emptyset)$$

$$\chi_{\bar{A}}(u) = 1 - \chi_A(u)$$

$$\chi_{\overline{\mathrm{Lim}}\, A_n} = \overline{\mathrm{Lim}}\, \chi_{A_n}(u)$$

$$\chi_{\underline{\mathrm{lim}}\, A_n} = \underline{\mathrm{Lim}}\, \chi_{A_n}(u)$$

Definisi 3.2.3

Sebuah fungsi $\mathfrak{S}$-terukur , $f(u)$ dikatakan "fungsi sederhana" jika didefinisikan pada sebuah himpunan $M \in \mathfrak{S}$ dan diasumsikan harga-harga $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (untuk $a_i \neq a_j$, jika $i \neq j$, untuk $i,j = 1,2, \ldots, n$). Ambil himpunan $A_j = \{ u ; u \in M , f(u) = a_j \}$ untuk $j = 1,2,\ldots,n$. Maka A_j adalah $\mathfrak{S}$-terukur dan

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n} a_j\, \chi_{A_j}(u) \quad , u \in M \qquad (1)$$

dengan $\chi_{A_j}(u)$ adalah fungsi indikator dari himpunan A_j. Setiap fungsi yang digambarkan dalam bentuk (1) merupakan fungsi sederhana yang didefinisikan pada M.

Teorema 3.2.2

Untuk sebuah fungsi $f(u)$ (untuk $u \in M \in \mathfrak{S}$) $\mathfrak{S}$-terukur jika dan hanya jika limit dari barisan fungsi sederhana konvergen di mana-mana (everywhere) pada M.

Bukti :

Syarat perlu ($\longrightarrow$)

Fungsi $f(u)$ $\mathfrak{S}$-terukur $\longrightarrow$ limitnya konvergen everywhere pada M. Dapat diambil :

$A_{N,-2^N N} = \{ u \,;\, u \in M,\ f(u) < -N \}$

$A_{N,k} = \{ u \,;\, u \in M, \frac{k-1}{2^N} \le f(u) < \frac{k}{2^N} \},$

$k = -2^N N + 1, -2^N N + 2, \ldots, 2^N N,$

$A_{N,2^N N+1} = \{ u \,;\, u \in M,\ f(u) \ge N \},$

$$f_N(u) = \sum_{k=-2^N N}^{2^N N+1} \frac{k-1}{2^N} \chi_{A_{N,k}}(u),\quad u \in M,$$

Maka $| f_N(u) - f(u) | < 2^{-N}$ jika $| f(u) | \le N$, $f_N(u) = N$ jika $f(u) \ge N$ dan $f_N(u) < -N$ jika $f(u) < -N$. Maka dari itu $\operatorname{Lim} f_N(u) = f(u)$, $u \in M$.

Syarat cukup ($\longleftarrow$)

Limit sebuah barisan fungsi sederhana konvergen everywhere pada M $\longrightarrow$ fungsi $f(u)$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Bukti syarat cukup mengikuti theorema 1 : □

Barisan fungsi sederhana konvergen everywhere pada M maka :

$$\operatorname{Lim} f_N(u) = f(u)\quad , u \in M$$

dan dari definisi limit inferior dan superior bahwa sebuah barisan konvergen jika :

$$\overline{\text{Lim}}\ f_N(u) = \underline{\text{Lim}}\ f_N(u) = \text{Lim}\ f_N(u) = f(u)$$

Dari sini diperoleh bahwa fungsi $f(u)$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Jika $f(u)$ adalah non negatif dan $\mathfrak{S}$-terukur maka $f(u)$ adalah limit dari barisan tidak turun yang konvergen everywhere, dimana $f(u)$ adalah fungsi sederhana. Dari sini diketahui bahwa fungsi-fungsi $f_N(u)$ merupakan sebuah barisan tidak turun dengan beberapa bilangan N.

Definisi 3.2.4

Ambil μ menunjukkan sebuah ukuran dengan daerah asal dari definisi $\mathfrak{S}$. Dua fungsi f dan g dikatakan ekivalen (lebih tepatnya μ ekivalen) pada sebuah himpunan $M \in \mathfrak{S}$, jika himpunan :

$A = \{\ u\ ;\ u \in M,\ f(u) \neq g(u)\ \}$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur dan $\mu(A) = 0$.

Definisi 3.2.5

Sebuah σ-aljabar dari himpunan $\mathfrak{S}$ dikatakan lengkap (atau μ lengkap atau lengkap terhadap ukuran μ) jika sebarang himpunan bagian N' dari himpunan N dengan ukuran μ , 0 adalah $\mathfrak{S}$-terukur , yaitu jika relasi $N' \subset N$, $N \in \mathfrak{S}$ dan $\mu(N) = 0$ menyatakan :

$$N' \in \mathfrak{S}$$

Ukuran μ didefinisikan pada sebuah μ-lengkap σ-aljabar dari himpunan-himpunan adalah juga dikatakan lengkap. Sehingga $\mu(N') = 0$.

Teorema 3.2.3

Jika $\mathfrak{S}$ adalah sebuah μ-lengkap σ-aljabar, jika $f(u)$ untuk $u \in M$, adalah sebuah fungsi $\mathfrak{S}$-terukur dan jika fungsi-fungsi $f(u)$ dan $g(u)$ adalah ekivalen pada M, maka $g(u)$, untuk $u \in M$ adalah juga $\mathfrak{S}$-terukur.

Bukti :

Dari theorema sebelumnya bahwa untuk sebarang real a, maka :

$\{ u ; u \in M, g(u) < a \} = \{ u ; u \in M , f(u) < a \} \setminus N' \cup N''$,

dengan N' dan N'' adalah himpunan bagian dari himpunan $N = \{ u; u \in M, f(u) \neq g(u) \}$ dengan ukuran μ,0. Berdasarkan kelengkapan dari ukuran, himpunan $\{ u ; u \in M , g(u) < a \}$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Himpunan dari semua fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur didefinisikan pada M dan ekivalen pada fungsi yang diberikan $f(u)$ merupakan klas ekivalen yang lengkap dari fungsi-fungsi. Dalam beberapa masalah tidak ada titik yang membedakan (khusus) diantara fungsi-fungsi ekivalen, maka kata "fungsi" berlaku untuk semua klas dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur yang ekivalen terhadap yang lain.

Sifat tertentu dikatakan memenuhi "μ-almost everywhere" pada M jika ukuran μ dari himpunan titik-titik yang tidak diberikan atau tidak didefinisikan dianggap sama dengan 0. Contohnya, jika dua fungsi f dan g ekivalen pada M, dikatakan bahwa f dan g sama / serupa μ-almost everywhere (μ hampir di mana-mana) pada M.

Sebuah barisan dari fungsi-fungsi $f_n(u)$ untuk n=1,2,...

dan $u \in M$ dikatakan konvergen μ-almost everywhere ke fungsi $f(u)$ pada M, jika ukuran μ dari himpunan titik-titik $u \in M$ dengan $\lim_{n\to\infty} f_n(u)$ tidak ada atau tidak sama dengan $f(u)$ adalah sama dengan nol (0).

Jika memenuhi sifat μ-almost everywhere pada sebuah himpunan M, dapat diyatakan dengan (mod μ) sebagai pengganti μ-almost everywhere. Maka jika f dan g adalah ekivalen pada M, dapat dinyatakan dengan $f(u) = g(u), u \in M$ (mod μ). Dengan cara yang sama, jika $\{ f_n(u) \}$ konvergen ke $f(u)$ μ-almost everywhere pada M, maka dapat dinyatakan $\lim_{n\to\infty} f_n(u) = f(u)$, $u \in M$ (mod μ) $\square$