BAB II
KEKONVERGENAN BARISAN

2.1 HIMPUNAN, KELAS, RUANG

Sebuah himpunan adalah kumpulan dari sebarang elemen yang didefinisikan dengan jelas dan himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai elemen. Suatu himpunan tidak kosong Ω yang memuat elemen-elemen disebut ruang. Elemen - elemen dari Ω dinamakan titik dan dinotasikan dengan ω. Notasi A, B, C, ... menunjukkan himpunan dari titik - titik, $\{\omega\}$ menunjukkan himpunan yang memuat satu titik dan ϕ menunjukkan himpunan kosong. Jika ω adalah sebuah titik dalam A, maka dinyatakan dengan $\omega \in A$ dan jika ω bukan titik di dalam A ditulis $\omega \notin A$.

Sebuah himpunan dari himpunan-himpunan disebut kelas yang biasanya dinotasikan dengan $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... Kelas dari semua himpunan - himpunan dalam Ω di sebut ruang dari himpunan - himpunan dalam Ω akan ditunjukkan dengan $S(\Omega)$.

Dalam suatu eksperimen setiap hasil yang mungkin akan disebut titik (ω) dan keseluruhan dari hasil yang mungkin disebut ruang sampel(Ω). Suatu event adalah suatu himpunan bagian dari ruang sampel. Kelas dengan anggota - anggotanya semua event yang mungkin dari suatu eksperimen disebut ruang event. Elementary event adalah event yang terdiri dari satu anggota, notasi $\{\omega\}$, ϕ, dan Ω merupakan

A dikatakan subset dari B atau termuat di B jika semua titik - titik dari A adalah titik - titik dari B, dinotasikan $A \subset B$ atau $B \supset A$. Untuk setiap himpunan A,

$$\phi \subset A \subset \Omega$$

Operasi aljabar dari himpunan - himpunan yang seringkali digunakan adalah hubungan dualitas :

$$\overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A_k}$$

$$\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A_k}$$

Definisi 2.2.1

Sebuah kelas tidak kosong $\mathfrak{R}$ dari himpunan bagian - himpunan bagian dari Ω dinamakan sebuah aljabar dari himpunan - himpunan dalam Ω jika mempunyai sifat-sifat berikut :

a. $A \in \mathfrak{R}$ dan $B \in \mathfrak{R}$ maka $A \cup B \in \mathfrak{R}$

b. $A \in \mathfrak{R}$ memenuhi $\bar{A} \in \mathfrak{R}$ untuk $\bar{A}$ adalah komplemen dari A yaitu himpunan titik-titik yang bukan anggota dari A, tetapi termasuk dalam Ω.

Akibat dari definisi :

1. Karena $A \cup \bar{A} = \Omega$ relasi $A \in \mathfrak{R}$ memenuhi $\Omega \in \mathfrak{R}$. Himpunan ϕ juga termasuk aljabar dari himpunan - himpunan.

2. $A \in \mathfrak{R}$ dan $B \in \mathfrak{R}$, maka dari sifat a dan b :

   $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \in \mathfrak{R}$ dan $A \backslash B = A \cap \bar{B} \in \mathfrak{R}$.

2.2 BARISAN DAN LIMIT

$A_1, A_2, \ldots$ adalah sebuah barisan tak berhingga himpunan - himpunan, biasanya dinyatakan dengan A_n, untuk $n = 1, 2, \ldots$. Barisan A_n disebut barisan monoton dari himpunan jika :

(1). $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_n$ dinamakan barisan monoton naik atau barisan increasing.

(2). $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots \supseteq A_n$ dinamakan barisan monoton turun atau barisan decreasing.

Limit dari barisan monoton didefinisikan sebagai :

(1). jika A_n barisan increasing maka $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

(2) jika A_n barisan decreasing maka $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Secara umum untuk setiap barisan $\{A_n\}$, untuk $n=1, 2, \ldots$ menunjukkan sebuah barisan tak berhingga dari himpunan-himpunan didefinisikan :

$$\overline{\lim} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\underline{\lim} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

$\overline{\text{Lim}}\, A_n$ adalah limit superior yaitu himpunan semua titik - titik yang berada dalam beberapa A_n yang tak berhingga. Sedangkan $\underline{\lim}\, A_n$ adalah limit inferior yaitu himpunan semua titik-titik yang berada hampir pada semua A_n (tetapi dalam harga yang berhingga).

Jika $\{A_n\}$ adalah sebuah barisan naik maka $\overline{\lim}\, A_n = \underline{\lim}\, A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ dan jika $\{A_n\}$ adalah sebuah barisan turun maka $\overline{\lim}\, A_n = \underline{\lim}\, A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Sebuah barisan himpunan-himpunan $\{A_n\}$, untuk $n = 1, 2, \ldots$ dikatakan konvergen jika $\overline{\lim}\ A_n = \underline{\lim}\ A_n$. Harga bersama dari limit superior dan inferior dari barisan $\{A_n\}$ disebut limit dari barisan A_n sehingga :

$$\underline{\lim}\ A_n = \overline{\lim}\ A_n = \lim A_n$$

Dari sini dapat dikatakan bahwa setiap barisan monoton adalah konvergen.

2.3 KEKONVERGENAN

Didefinisikan sebarang himpunan E. Barisan fungsi $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ didefinisikan pada suatu himpunan E dan diandaikan bahwa barisan bilangan-bilangan $\{f_n(x)\}$ adalah konvergen untuk setiap $x \in E$. Dengan demikian dapat didefinisikan suatu fungsi f pada E dengan :

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \qquad x \in E$$

Dalam hal ini dikatakan bahwa $\{f_n\}$ konvergen pada E dan bahwa f adalah limit atau fungsi limit barisan $\{f_n\}$. Dan biasanya digunakan istilah " barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke fungsi f titik demi titik pada E ".

Suatu barisan fungsi-fungsi $\{f_n\}$, konvergen seragam pada E ke suatu fungsi f, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan positif bulat P sehingga untuk semua $n \geq P$ dan semua $x \in E$ berlaku :

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon \qquad (1)$$

Ketidaksamaan (1) harus berlaku untuk semua $n \geq P$ dan untuk semua $x \in E$. Jadi jika diberikan $\varepsilon > 0$ harus dapat dicari P yang hanya tergantung pada ε tetapi tidak tergantung pada x. Untuk barisan fungsi yang hanya konvergen titik demi titik pada E ke fungsi f. Yaitu pada setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positip P sehingga untuk suatu titik yang diberikan $t \in E$ berlaku $| f_n(t)-f(t) | < \varepsilon$ untuk semua $n \geq P$. Dalam hal ini P tergantung pada ε dan juga pada t.

2.4 VARIABEL RANDOM

Dalam suatu eksperimen, tidak dapat ditentukan hasilnya dengan pasti, namun demikian dapat ditentukan koleksi-koleksi (himpunan) dari setiap hasilnya (yang mungkin). Apabila eksperimen itu dapat diulang di bawah kondisi yang sama maka eksperimen itu dikatakan suatu Eksperimen Random (Percobaan Random) Kumpulan hasil yang mungkin disebut dengan Ruang Sampel.Jadi variabel random adalah sebuah bilangan (variabel) yang berhubungan dengan kemungkinan hasil dari sebuah eksperimen.

Misalkan C menyatakan suatu himpunan dari setiap hasil yang mungkin dari suatu percobaan random, maka C dapat dinyatakan sebagai ruang sampel. Jika $A \subset C$, maka P(A) menyatakan probabilitas bahwa suatu hasil percobaan random adalah di A. Sebuah variabel random dapat dianggap sebagai suatu fungsi yang menunjukkan satu dan hanya satu bilangan riil yaitu $X(c) = x$, $\forall$ $c \in C$.

Jika variabel random x mempunyai fungsi probabilitas densitas $f(x)$ maka harga harapan (Ekspetasi matematika) dari variabel random x didefinisikan dengan :

1. $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ untuk suatu variabel random x adalah kontinu.
2. $E(x) = \sum x_n P \{ x = x_n \}$ jika x adalah suatu variabel random yang bertipe diskrit,untuk $P\{x= x_n\}$ adalah probabilitas kejadian ke n .