BAB II

MONIC MATRIK POLYNOMIALS

2.1 Pengertian

Monic matrik polynomials adalah matrik polynomials bujursangkar dengan bentuk $L(\lambda)=\sum_{i=0}^{\ell} A_i\lambda^i$ dimana A_0, A_1, ..., A_ℓ adalah matrik-matrik skalar berordo nxn, dan $A_\ell = I$ (matrik identitas). Monic matrik polynomials dengan degree ℓ dapat ditulis :

$$L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{i=0}^{\ell-1} A_i\lambda^i \qquad \text{.............(2.1)}$$

Contoh 2.1 :

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda^2-\lambda & \lambda^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$L(\lambda)$ adalah monic matrik polynomials dengan degree 3, dimana $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ (matrik identitas).

2.2 Eigenvalue dan Eigenvektor Matrik Polynomials

Definisi 2.1:

$L(\lambda)=\sum_{j=0}^{\ell} A_j\lambda^j$ adalah matrik polynomial, dimana A_0, A_1, ...A_ℓ masing-masing adalah matrik berukuran nxn. Dengan determinan $L(\lambda)$, yang selanjutnya ditulis det $L(\lambda)$, merupakan polynomial dengan degree tidak lebih dari $n\ell$. Akar-akar polynomial yang memenuhi det $L(\lambda) = 0$ disebut eigenvalue untuk matrik polynomial $L(\lambda)$. Himpunan yang memuat eigenvalue-eigenvalue dari matrik polynomial $L(\lambda)$ ditulis $\sigma(L) = \{\lambda_0 | \lambda_0$ adalah eigenvalue dari $L(\lambda)\}$.

Definisi 2.2:

Vektor x dimensi-n yang tidak sama dengan nol, yang memenuhi $L(\lambda_0)x = 0$ ....(2.2)

disebut eigenvektor untuk matrik polynomial $L(\lambda)$ yang terkait dengan eigenvalue λ_0.

Contoh 2.2 :

Pandang $L(\lambda)$ dengan bentuk :

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda-3 & 1 \\ \lambda^3+4 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det } L(\lambda) = \lambda^3+\lambda^2-3\lambda-\lambda^3-4$$

$$= \lambda^2-3\lambda-4$$

Eigenvalue-eigenvalue dapat dicari dengan det $L(\lambda)=0$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$, maka $\sigma(L) = \{4,-1\}$

Selanjutnya dicari eigenvektor yang sesuai dengan

eigenvalue $\lambda_1=4$ ambil $x_1=\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} \neq 0$

sehingga memenuhi

sehingga memenuhi

$$L(4)x_1 = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 68 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh

$$17x_{11} + x_{12} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(i)$$

$$68x_{11} + 4x_{12} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(ii)$$

Persamaan (i) dan (ii) berkelipatan, sehingga rank L(4) kurang dari n variabel (1<2).

Karena itu cukup diambil satu persamaan, misal:

$17x_{11} + x_{12} = 0$, dapat dipilih $x_{11} = c$, $x_{12} = -17c$,

c = konstanta $\neq 0$, sehingga

$$x_1 = \begin{bmatrix} c \\ -17c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -17 \end{bmatrix}$$

Eigenvektor yang sesuai dengan $\lambda_2 = -1$,

ambil $x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} \neq 0$

sehingga memenuhi $L(-1)x_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

maka

$$-3x_{21} + x_{22} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

$$3x_{21} - x_{22} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

Persamaan (i) dan (ii) berkelipatan, maka cukup diambil satu persamaan: $-3x_{21}+x_{22} = 0$, ambil $x_{21}=c$, $x_{22} = 3c$, sehingga $x_2 = \begin{bmatrix} c \\ 3c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

2.3 Companion Matrik

Definisi 2.3:

Pandang monic matrik polynomial $L(\lambda)$ berukuran n×n

$L(\lambda) = \sum_{j=0}^{\ell} A_j \lambda^j$, didefinisikan matrik C berordo $n\ell \times n\ell$ berbentuk

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \cdots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3)$$

matrik C diatas disebut companion matrik, dimana 0 adalah matrik nol.

Contoh 2.3:

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda \\ \lambda-2 & \lambda^2+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$n = 2$, $\ell = 2$, maka ordo C adalah 4

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4 Jordan Chains (Rantai Jordan)

Definisi 2.4 :

Barisan vektor-vektor dimensi-n : x_0, x_1, ..., x_k dengan x_0 bukan vektor nol, yang memenuhi persamaan:

$$\sum_{p=0}^{i} \frac{1}{p!} L^{(p)}(\lambda_0) x_{i-p} = 0, \quad i = 0,1,\ldots,k \quad \ldots\ldots\ldots(2.4)$$

dengan $L^{(p)}(\lambda_0)$ adalah derivatif tingkat-p dari $L(\lambda)$ ke-λ, i=0,1,...,k dan sesuai dengan eigenvalue λ_0

disebut rantai Jordan dengan panjang k+1, untuk monic matrik polynomial:

$$L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j\lambda^j.$$

<u>Contoh 2.4</u>:

Ambil $L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$

$\det L(\lambda) = \lambda^4$

Eigenvalue-eigenvalue dicari dengan $\det L(\lambda)=0$

$\lambda^4 = 0$

$\lambda_0 = 0$ maka $\sigma(L) = \{0\}$

Eigenvektor dicari dengan persamaan (2.2):

$L(\lambda_0)x = 0$, dimana $\lambda_0 = 0$ maka $L(0)x = 0$

Sehingga setiap vektor dimensi-2 yang tidak sama dengan nol adalah eigenvektor dari $L(\lambda)$.

Ambil $x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

Eigenvektor umum pertama ambil $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$

dan memenuhi persamaan (2.4) dengan $i = 1$

$L'(0)x_0 + L(0)x_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = 0$$

x_1 ada jika $x_{01} = 0$ dan $x_{02} \neq 0$, dapat diambil sembarang konstan.

Eigenvektor umum kedua ambil $x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$

dan memenuhi persamaan (2.4) dengan $i = 2$

$$\tfrac{1}{2}L''(0)x_0 + L'(0)x_1 + L(0)x_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ x_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = 0$$

dipenuhi bila $x_{02} = -x_{11}$, x_{12} dapat diambil sembarang konstan.

Selanjutnya rantai Jordan diperpanjang dengan x_3, sehingga dengan cara yang sama untuk $x_3 = \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix}$, memenuhi persamaan (2.4) dengan $i = 3$

$$\tfrac{1}{3!}L'''(0)x_0 + \tfrac{1}{2!}L''(0)x_1 + L'(0)x_2 + L(0)x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ x_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix} = 0$$

dipenuhi untuk $x_{12} = -x_{21}$ dan $x_{11} = 0$

Kontradiksi sebab $x_{11} = -x_{02} \neq 0$, sehingga tidak mungkin ada x_3.

Dari penyelidikan diatas dapat diketahui bahwa panjang rantai Jordan dari $L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$ tidak dapat melebihi 3 dengan eigenvektor $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{02} \end{bmatrix}$.

Penyelidikan diatas untuk eigenvektor $x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$,

dimana $x_{02} \neq 0 \in R$ atau $\mathbb{C}$

Sekarang dipilih eigenvektor yang lain yaitu $x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ 0 \end{bmatrix}$

Eigenvektor umum pertama ambil $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$

dan memenuhi persamaan (2.4) dengan $i = 1$

$L'(0)x_0 + L(0)x_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{01} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = 0$$

diperoleh $x_{01} = 0$, kontradiksi sebab $x_{01} \neq 0$

Sehingga rantai Jordan dengan eigenvektor

$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ 0 \end{bmatrix}$ mempunyai panjang satu yaitu $x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dari contoh diatas, secara umum rantai Jordan dapat ditulis sebagai berikut:

(1) Rantai Jordan dengan panjang satu: $x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$

dimana x_{01}, $x_{02} \in R$ atau $\mathbb{C}$ dan keduanya tidak sama dengan nol

(2) Rantai Jordan dengan panjang dua:

$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{02} \end{bmatrix}$, $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$

dimana $x_{02} \neq 0$, x_{11}, $x_{12} \in R$ atau $\mathbb{C}$

(3) Rantai Jordan dengan panjang tiga:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{02} \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

dimana $x_{02} \neq 0$, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, $\in$ R atau $\mathbb{C}$

2.5 Pasangan Jordan (Jordan Pair)

Pandang $L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j\lambda^j$ adalah monic matrik polynomial berdegree ℓ dan berordo-n. Det $L(\lambda)$ adalah polynomial skalar dengan degree $n\ell$, yang mempunyai harga nol paling banyak $n\ell$. Pandang λ_1, λ_2, ..., λ_r adalah harga nol yang berlainan dari det.$L(\lambda)$, dan misalkan banyaknya λ_i adalah α_i, i=1,2,...,r sehingga $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = n\ell$. .

Spektrum $L(\lambda)$ adalah $\sigma(L) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$.

Setiap λ_i dapat ditentukan rantai-rantai Jordan dari monic matrik polynomial $L(\lambda)$ yang sesuai dengan λ_i dengan panjang $\mu_j^{(i)}$.

Misalkan:

$$x_{j0}^{(i)}, \; x_{j1}^{(i)}, \; \ldots, \; x_{j\mu_j^{(i)}-1}^{(i)}, \quad j = 1,2,\ldots,s$$

menyatakan banyak rantai Jordan yang sesuai dengan λ_i untuk i=1,2,...,r dengan syarat $\sum_{j=1}^{s} \mu_j^{(i)} = \alpha_i$

Selanjutnya dibentuk pasangan matrik (X_i, J_i), dimana

$$X_i = \left[x_{10}^{(i)}, \ldots, x_{1\mu_1^{(i)}-1}^{(i)}, x_{20}^{(i)}, \ldots, x_{2\mu_2^{(i)}-1}^{(i)}, \right.$$

$$\left. \ldots\ldots\ldots, x_{s0}^{(i)}, \ldots, x_{s\mu_s^{(i)}-1}^{(i)} \right]$$

yaitu matrik berukuran $n \times \sum_{j=1}^{s} \mu_j^{(i)} = n \times \alpha_i$ dan J_i adalah matrik diagonal blok Jordan dimana

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & & & 0 \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{is} \end{bmatrix}$$

sedangkan J_{ij} adalah blok Jordan dengan ukuran $\mu_j^{(i)} x \mu_j^{(i)}$ dengan eigenvalue λ_i, untuk j=1,2,...,s dan i=1,2,...,r, blok Jordan:

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Pasangan (X_i, J_i) disebut pasangan Jordan dari $L(\lambda)$ sesuai dengan eigenvalue λ_i. Pasangan matrik (X,J) disebut pasangan Jordan untuk $L(\lambda)$, dimana $X = \left[X_1 \ldots X_r\right]$ adalah matrik berukuran $n \times n\ell$, dan $J = \mathrm{diag}\left[J_1, \ldots, J_r\right]$ adalah matrik berukuran $n\ell \times n\ell$.

Suatu ciri penting dari pasangan Jordan yang terkait dengan λ_i adalah memenuhi persamaan berikut:

$$A_0X_i + A_1X_iJ_i + \ldots + A_{\ell-1}X_iJ_i^{\ell-1} + X_iJ_i^{\ell} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.5)$$

Contoh 2.5:

Ambil $L(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda(\lambda-1)^2 & b\lambda \\ 0 & \lambda^2(\lambda-2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda & b\lambda \\ 0 & \lambda^3-2\lambda^2 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3+\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix} 2 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ b \in \mathbb{C}$$

Akan dicari pasangan Jordan untuk monic matrik polynomial $L(\lambda)$.

Pertama, mencari eigenvalue-eigenvalue dari $L(\lambda)$

$\det L(\lambda) = \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

$\lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$

$\lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = 1,\quad \lambda_3 = 2$

sehingga diperoleh $\sigma(L) = \{0, 1, 2\}$

Selanjutnya, dicari pasangan-pasangan Jordan (X_1,J_1), (X_2,J_2), (X_3,J_3) berturut-turut terkait dengan eigenvalue- eigenvalue

$\lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = 1,\quad \lambda_3 = 2.$

Pandang untuk $\lambda_1 = 0$

Banyaknya $\lambda_1 = 0$ adalah 3 maka $\alpha_1 = 3$

Rantai Jordan dengan $\lambda_1 = 0$ diperoleh dengan cara berikut

Karena $L(0)=0$ maka setiap vektor dimensi dua yang tidak sama dengan nol adalah eigenvektor dari $L(\lambda)$ yang terkait dengan eigenvalue nol, misal $x_{10}^{(1)}=\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya akan ditentukan rantai-rantai Jordan yang terkait dengan $\lambda_1 = 0$.

Untuk eigenvektor $x_{10}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$, ambil $x_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$

yang memenuhi persamaan (2.4) dengan $i = 1$

$$L'(0)x_{10}^{(1)} + L(0)x_{11}^{(1)} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} u_1+bv_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

dipenuhi bila $u_1 = -bv_1$, ambil $u_1=-b$, $v_1=1$, u_2, v_2, sembarang konstan.

Jadi $x_{01}^{(1)} = \begin{bmatrix} -b \\ 1 \end{bmatrix}$ dan misal $x_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk eigenvektor $x_{01}^{(1)} = \begin{bmatrix} -b \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ambil $x_{12}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$ yang memenuhi persamaan (2.4) dengan $i = 2$

$$\tfrac{1}{2} L''(0)x_{10}^{(1)} + L'x_{11}^{(1)} + L(0)x_{12}^{(1)} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -b \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ternyata persamaan tidak dipenuhi, sehingga rantai Jordan dengan eigenvektor $x_{01}^{(1)} = \begin{bmatrix} -b \\ 1 \end{bmatrix}$ mempunyai panjang dua yaitu $x_{01}^{(1)} = \begin{bmatrix} -b \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Sehingga $\mu_1^{(1)} = 2$

Rantai $x_{01}^{(1)} = \begin{bmatrix} -b \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ini berpasangan dengan blok Jordan $J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (berukuran 2 x 2).

Karena $\sum_{j=1}^{s} \mu_j^{(i)} = \alpha_i$, s = 3 dan $\mu_1^{(1)} = 2$ maka dicari rantai lagi untuk eigenvektor $x_{20}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ambil $x_{21}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$ yang memenuhi persamaan (2.4) dengan i = 1

$L'(0)x_{20}^{(1)} + L(0)x_{21}^{(1)} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

Ternyata persamaan tidak dipenuhi, sehingga rantai Jordan dengan eigenvektor $x_{20}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ mempunyai panjang satu yaitu $x_{20}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Sehingga $\mu_2^{(1)} = 1$

Rantai $x_{20}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ini berpasangan dengan blok Jordan $J_{12} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ (berukuran 1 x 1).

Sehingga diperoleh :

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{10}^{(1)} & x_{11}^{(1)} & x_{20}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \text{diag.} \begin{bmatrix} J_{11} & , J_{12} \end{bmatrix} = \text{diag.} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Pandang untuk $\lambda_2 = 1$

$$L(1) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Eigenvektor yang terkait dengan $\lambda_2 = 1$ misal $x_{10}^{(2)}$ sehingga $L(1)\, x_{10}^{(2)} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = 0$$

dipenuhi oleh:

$$\begin{bmatrix} bv_1 \\ -v_1 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow v_1 \begin{bmatrix} b \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$ maka $v_1=0$, u_1 sebarang konstan, ambil $u_1=1$

Sehingga: $x_{10}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk eigenvektor $x_{10}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ambil $x_{11}^{(2)} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$ yang memenuhi persamaan (2.4) dengan i=1

$$L'(1)x_{10}^{(2)} + L(1)x_{11}^{(2)} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

dipenuhi oleh:

$$\begin{bmatrix} bv_2 \\ -v_2 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow v_2 \begin{bmatrix} b \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$ maka $v_2=0$, u_2 sebarang konstan, ambil $u_2=0$

diperoleh: $x_{11}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Sehingga $\mu_1^{(2)} = 2$

Rantai $x_{10}^{(2)} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $x_{11}^{(2)} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ berpasangan dengan blok Jordan $J_{21} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ (berukuran 2x2)

Sehingga diperoleh:

$$X_2 = \begin{bmatrix}x_{10}^{(2)} & x_{11}^{(2)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$J_2 = \text{diag}\begin{bmatrix}J_{21}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

<u>Pandang untuk $\lambda_3 = 2$</u>

$$L(2) = \begin{bmatrix}2 & 2b\\0 & 0\end{bmatrix}$$

Eigenvektor yang terkait dengan $\lambda_3=2$

$L(2)x_{10}^{(3)} = 0,\ x_{10}^{(3)} \neq 0$

$\begin{bmatrix}2 & 2b\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\v_1\end{bmatrix} = 0$, dipenuhi oleh:

$\begin{bmatrix}2u_1 + 2bv_1\\0\end{bmatrix} = 0 \longrightarrow 2u_1 + 2bv_1 = 0$

$u_1 = -bv_1$, ambil $u_1=-b$, $v_1=1$

maka diperoleh: $x_{10}^{(3)} = \begin{bmatrix}-b\\1\end{bmatrix} = X_3$

Panjang rantai Jordan adalah satu, sehingga blok Jordan 1x1 yaitu $J_3 = [\ 2\ ]$.

Jadi pasangan Jordan (X,J) untuk $L(\lambda)$ adalah:

$$X = [\ X_1 \quad X_2 \quad X_3\ ] = \begin{bmatrix}-b & 0 & 1 & 1 & 0 & -b\\1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$J = \text{diag}.\begin{bmatrix}J_1, & J_2, & J_3\end{bmatrix} = \text{diag}.\left\{\begin{bmatrix}0 & 1 & \\0 & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\right\}.$$

2.6 Pasangan Standar

Definisi 2.5:

Pasangan dalam bentuk (X,T) dimana X adalah matrik berordo $n \times n\ell$ dan T matrik berordo $n\ell \times n\ell$ disebut pasangan standar untuk monic matrik polynomial $L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j\lambda^j$ jika memenuhi:

(i) $\text{col}\,(XT^i)_{i=0}^{\ell-1} = \begin{bmatrix} X \\ XT \\ \vdots \\ XT^{\ell-1} \end{bmatrix}$ adalah non singular

(ii) $\sum_{i=0}^{\ell-1} A_i XT^i + XT^{\ell} = 0$

Pasangan Jordan (X,J) merupakan pasangan standar bila $\text{col}(XJ^i)_{i=0}^{\ell-1}$ non singular.

Contoh 2.6:

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda-1)^2 & b\lambda \\ 0 & \lambda^2(\lambda-2) \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{C}$$

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3-2\lambda^2+\lambda & b\lambda \\ 0 & \lambda^3-2\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan perhitungan pada contoh 2.5 didapat pasangan Jordan dimana

$$X = \begin{bmatrix} -b & 0 & 1 & 1 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Dapat dicek:

(i) $$\begin{bmatrix} X \\ XJ \\ XJ^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & 0 & 1 & 1 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 & 1 & 1 & -2b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} X \\ XJ \\ XJ^2 \end{bmatrix} = -4 \neq 0 \text{ maka non singular}$$

(ii) $A_0X + A_1XJ + A_2XJ^2 + XJ^3 = 0$

$$X = \begin{bmatrix} -b & 0 & 1 & 1 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_1 = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -b & 0 & 1 & 1 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -8b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -8b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -8b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 0$$

(0 adalah matrik nol $n \times n\ell$)

2.7 Tripel Standar dan Tripel Jordan

Misalkan $L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j\lambda^j$ adalah monic matrik polynomial dengan pasangan standar (X,T), dimana X adalah matrik berukuran $n \times n\ell$ dan T matrik berukuran $n\ell \times n\ell$.

Definisi 2.6:

Jika pasangan standar (X,T) dan matrik Y yang

didefinisikan dengan $Y = \begin{bmatrix} X \\ XT \\ \vdots \\ XT^{\ell-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}$

maka (X,T,Y) disebut tripel standar untuk $L(\lambda)$.

Jika T=J (matrik Jordan) maka (X,J,Y) disebut tripel Jordan untuk $L(\lambda)$.

Catatan bahwa pada tripel standar memenuhi persamaan berikut:

$$YA_0 + TYA_1 + \ldots + T^{\ell-1}YA_{\ell-1} + T^{\ell}Y = 0$$

Contoh 2.7:

Ambil $L(\lambda)$ sama seperti pada contoh 2.6

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda-1)^2 & b\lambda \\ 0 & \lambda^2(\lambda-2) \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{C}$$

Pasangan Jordan untuk $L(\lambda)$ adalah (X,J) yang merupakan pasangan standar.

Sekarang ambil:

$$\begin{bmatrix} X \\ XJ \\ XJ^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -b & 0 & 1 & 1 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 & 1 & 1 & -2b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & b & -2 & -2b & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & 2b & -1 & -b \\ 0 & 0 & -1 & -b & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ XJ \\ XJ^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & b \\ -1 & -b \\ 1 & b \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Karena (X,J) pasangan standar (menurut contoh 2.6) maka $\mathrm{col}(XJ^i)_{i=0}^{\ell-1}$ non singular, sehingga tripel (X,J,Y) adalah tripel standar dan karena T=J maka tripel (X,J,Y) adalah tripel Jordan.

2.8 Similaritas

2.8.1 Similaritas Dua Pasangan Standar

Theorema 2.7:

Misalkan $P = \begin{bmatrix} I & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$ dan

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I \\ -A_0 & -A_1 & \ldots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix}$$

dimana P adalah matrik berordo $n \times n\ell$, dan C adalah companion matrik dari suatu monic matrik polynomial

$L(\lambda)$, maka (P,C) adalah pasangan standar.

Bukti:

Dapat ditunjukkan bahwa

$$PC^{i} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & I & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \; i = 0, 1, \ldots, \ell-1$$

dimana I terletak di i+1, dan

$$PC^{\ell} = \begin{bmatrix} -A_0 & -A_1 & \ldots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga:

$$\mathrm{col}\,(PC^{i})_{i=0}^{\ell-1} = I \longrightarrow \det \left[\mathrm{col}\,(PC^{i})_{i=0}^{\ell-1}\right] = \det I = 1$$

Syarat pertama untuk pasangan standar dipenuhi yaitu $\mathrm{col}(XT^{i})_{i=0}^{\ell-1}$ adalah non singular, dimana X=P dan T=C.

Syarat kedua untuk pasangan standar yakni:

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} A_i PC^{i} + PC^{\ell} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} A_i \begin{bmatrix} 0 \ldots 0 & I & 0 \ldots 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_0 & -A_1 & \ldots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix} = 0$$

Terbukti (P,C) adalah pasangan standar.

Theorema 2.8:

Dua pasangan standar (X,T) dan (X',T') dari monic matrik polynomial $L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j\lambda^{j}$ yang berordo nxn dan berdegree-ℓ, adalah similar jika terdapat matrik non singular S berordo $n\ell x n\ell$, sedemikian hingga:

$$X'=XS, \; T'=S^{-1}T\,S \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.5)$$

$$\text{dengan } S = \left[\mathrm{col}\,\left(XT^{i}\right)_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1} \mathrm{col}\,\left(X'T'^{i}\right)_{i=0}^{\ell-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.6)$$

Sebaliknya:

Jika (X,T) pasangan standar dan suatu pasangan lain

(X',T') dimana $X' = XS$, $T' = S^{-1}TS$ dan matrik S diberikan oleh (2.6) diatas, maka (X',T') juga pasangan standar untuk monic matrik polynomial $L(\lambda)$ dengan X' berordo $nxn\ell$ dan T' berordo $n\ell xn\ell$.

Bukti:

Untuk pernyataan kedua bahwa (X',T') juga pasangan standar dibuktikan demikian:

(i) $\operatorname{col}\left(X'T'^{i}\right)_{i=0}^{\ell-1} = \operatorname{col}\left(XT^{i}\right)_{i=0}^{\ell-1} S$

Karena $\operatorname{col}\left(XT^{i}\right)_{i=0}^{\ell-1}$ non singular dan S juga matrik non singular maka $\operatorname{col}\left(X'T'^{i}\right)_{i=0}^{\ell-1}$ adalah non singular

(ii) $\sum_{i=1}^{\ell-1} A_i X'T'^{i} + X'T'^{\ell} = \left[\sum_{i=1}^{\ell-1} A_i XT^{i} + XT^{\ell}\right] S = 0$

Syarat-syarat pasangan standar dipenuhi oleh pasangan (X',T') maka (X',T') juga pasangan standar.

Pernyataan pertama bahwa $X' = XS$, $T' = S^{-1}TS$ dimana S diberikan oleh (2.6) dapat dibuktikan demikian.

Diperlihatkan bahwa $C \operatorname{col}\left(XT^{i}\right)_{i=0}^{\ell-1} = \left(XT^{i}\right)_{i=0}^{\ell-1} T$, dimana C adalah companion matrik

$$\begin{bmatrix} 0 & I & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I \\ -A_0 & -A_1 & \dots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ XT \\ \vdots \\ XT^{\ell-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XT \\ XT^2 \\ \vdots \\ XT^{\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ XT \\ \vdots \\ XT^{\ell-1} \end{bmatrix} T$$

Karena $A_0X + A_1XT + \dots + A_{\ell-1}XT^{\ell-1} + XT^{\ell} = 0$

maka blok baris terakhir dari hasil kali

$C \operatorname{col}(XT^i)_{i=0}^{\ell-1}$ adalah

$-(A_0X + A_1XT + \ldots + A_{\ell-1}XT^{\ell-1} + XT^{\ell}) = XT^{\ell}$

Sehingga $C \operatorname{col} (XT^i)_{i=0}^{\ell-1} = \operatorname{col} (XT^i)_{i=0}^{\ell-1} T$

Karena (X',T') juga pasangan standar maka dengan cara yang sama diperoleh:

$$C \operatorname{col} (X'T'^i)_{i=0}^{\ell-1} = (X'T'^i)_{i=0}^{\ell-1} T'$$

$$C = \operatorname{col}(XT^i)_{i=0}^{\ell-1} T \left[\operatorname{col}(XT^i)_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1} \quad \ldots\ldots(i)$$

$$C = \operatorname{col}(X'T'^i)_{i=0}^{\ell-1} T' \left[\operatorname{col}(X'T'^i)_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1} \ldots\ldots(ii)$$

Sehingga perbandingan persamaan (i) dan (ii) didapat:

$$\operatorname{col} (XT^i)_{i=0}^{\ell-1} T \left[\operatorname{col}(XT^i)_{i=0}^{\ell-1} \right]^{-1} =$$

$$\operatorname{col} (X'T'^i)_{i=0}^{\ell-1} T' \left[\operatorname{col}(X'T'^i)_{i=0}^{\ell-1} \right]^{-1}.$$

$$\left[\operatorname{col}(X'T'^i)_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1} \operatorname{col}(XT^i)_{i=0}^{\ell-1} T \left[\operatorname{col}(XT^i)_{i=0}^{\ell-1} \right]^{-1}$$

$$\operatorname{col} (X'T'^i)_{i=0}^{\ell-1} = T'$$

Karena $\left[\operatorname{col}(XT^i)_{i=0}^{\ell-1} \right]^{-1} \operatorname{col}(X'T'^i)_{i=0}^{\ell-1} = S$ dan

$S^{-1} = \left[\operatorname{col}(X'T'^i)_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1} \operatorname{col}(XT^i)_{i=0}^{\ell-1}$ sehingga:

$S^{-1}TS = T'$ atau $T' = S^{-1}TS$

Dari definisi matrik invers, maka:

$$\operatorname{col} (XT^i)_{i=0}^{\ell-1} \left[\operatorname{col}(XT^i)_{i=0}^{\ell-1} \right]^{-1} = I$$

Karena col $(XT^i)_{i=0}^{\ell-1}$ berordo $n\ell xn\ell$ sehingga I berordo $n\ell xn\ell$ pula. Maka sekarang tinggal melihat perkalian blok baris pertama dari col $(XT^i)_{i=0}^{\ell-1}$ dengan $\left[col(XT^i)_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1}$, yaitu:

$$X\left[col(XT^i)_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Karena X berordo $nxn\ell$ dan $\left[col(XT^i)_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1}$ berordo $n\ell xn\ell$ maka $\begin{bmatrix} I & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$ berordo $nxn\ell$. Dengan I berordo nxn. Sehingga:

$$\begin{aligned} XS &= X\left[col(XT^i)_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1} col(X'T'^i)_{i=0}^{\ell-1} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} col(X'T'^i)_{i=0}^{\ell-1} \\ &= X' \end{aligned}$$

Jadi terbukti $X' = XS$ dan $T' = S^{-1}TS$.

2.8.2 Similaritas Dua Tripel Standar

Dari Theorema 2.8 dan definisi tripel standar dapat dinyatakan bahwa dua tripel standar (X,T,Y) dan (X′,T′,Y′) adalah similar, yaitu untuk suatu matrik non singular S berordo $n\ell xn\ell$ sama seperti pada (2.6), memenuhi relasi-relasi:

$$X' = XS, \quad T' = S^{-1}TS \qquad \text{...........(2.7)}$$

Pernyataan ini dapat dijelaskan sebagai berikut.
Karena (X,T,Y) tripel standar maka (X,T) pasangan standar dan (X′,T′) pasangan standar yang similar dengan (X,T).
Sehingga tinggal membuktikan bahwa

$Y'=S^{-1}Y$

$$S^{-1}Y=\left[col(X'T'^{i})\right]^{-1}col(XT^{i})_{i=0}^{\ell-1}\left[col(XT^{i})_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1}col(\delta_{i\ell}I)_{i=1}^{\ell}$$

$$=\left[col(X'T'^{i})\right]^{-1}col(\delta_{i\ell}I)_{i=1}^{\ell} = Y'$$

Konvers pernyataan diatas juga benar yaitu jika (X,T,Y) adalah tripel standar dari $L(\lambda)$ dan (X',T',Y') adalah tripel matrik dimana ukuran X', T', Y' berturut-turut adalah $nxn\ell$, $n\ell xn\ell$, dan $n\ell xn$ sedemikian hingga (2.7) memenuhi, maka (X',T',Y') adalah tripel standar dari $L(\lambda)$. Hal ini dapat dijelaskan, karena pada Theorema 1.25 telah dibuktikan bahwa (X',T') pasangan standar maka tinggal membuktikan untuk Y'

$Y'= S^{-1}Y$

$$= \left[col(X'T'^{i})\right]^{-1}col(XT^{i})_{i=0}^{\ell-1}\left[col(XT^{i})_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1}col(\delta_{i\ell}I)_{i=1}^{\ell}$$

$$= \left[col(X'T'^{i})\right]^{-1}col(\delta_{i\ell}I)_{i=1}^{\ell}.$$

2.9 Representasi Monic Matrik Polynomials

Theorema 2.9:

Ambil $L(\lambda)=I\lambda^{\ell}+\sum_{j=0}^{\ell-1}A_j\lambda^j$ adalah monic matrik polynomial berdegree ℓ dengan tripel standar (X,T,Y). Maka $L(\lambda)$ dapat disajian dalam bentuk berikut:

(1) *Right canonical form*:

$$L(\lambda)=I\lambda^{\ell}-XT^{\ell}\left(V_1+V_2\lambda+\ldots+V\lambda^{\ell-1}\right) \qquad \ldots\ldots.(2.8)$$

dimana V_i adalah matrik-matrik berukuran $n\ell xn$

sedemikian hingga $\left[V_1 \;\ldots\; V_\ell\right] = \left[\mathrm{col}(XT^i)_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1}$;

(2) *Left canonical form*:

$L(\lambda)=\lambda^\ell I-\left[W_1+\lambda W_2+\ldots+\lambda^{\ell-1}W_\ell\right]T^\ell Y$.........(2.9)

dimana W_i adalah matrik-matrik berukuran $n x n\ell$ sedemikian hingga

$$\mathrm{col}\,(W_i)_{i=0}^{\ell} = \left[\mathrm{row}\,(T^iY)_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1};$$

$$= \left[Y \;\; TY \;\; T^2Y \;\ldots\; T^{\ell-1}Y\right]^{-1}$$

(3) *Resolvent form*:

$(L(\lambda))^{-1}=X(I\lambda-T)^{-1}Y,\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(L)$, ...(2.10)

λ bukan eigenvalue dari $L(\lambda)$

Catatan bahwa X dan T terdapat pada right canonical form dari $L(\lambda)$, sedangkan T dan Y terdapat pada left canonical form. Istilah *right* dan *left* digunakan untuk menyatakan pasangan berturut-turut (X,T) dan (T,Y) dari $L(\lambda)$.

Bukti:

Ketiga bentuk (2.8), (2.9), (2.10) dipilih bebas dari tripel standar (X,T,Y).

Pandang (2.8)

Dibuktikan bahwa jika (X,T,Y) dan (X',T',Y') tripel-tripel standar dari $L(\lambda)$, maka

$XT^\ell\left[V_1 \;\ldots\; V_\ell\right]=X'(T')^\ell\left[V_1' \;\ldots\; V_\ell'\right]$ ....(2.11)

dimana $\left[V_1 \;\ldots\; V_\ell\right] = \left[\mathrm{col}(XT^i)_{i=0}^{\ell-1}\right]^{-1}$

$$\left[\, V_1' \;\dots\; V_\ell' \,\right] = \left[\, \mathrm{col}(X'T'^{i})_{i=0}^{\ell-1} \,\right]^{-1} \;;$$

Karena tripel-tripel standar adalah similar:

$X' = XS$, $T' = S^{-1}TS$

$$\begin{aligned} \text{Maka } \left[\, V_1' \;\dots\; V_\ell' \,\right] &= \left[\, \mathrm{col}(X'T'^{i})_{i=0}^{\ell-1} \,\right]^{-1} \\ &= \left[\, \mathrm{col}(\; XS\;(S^{-1}TS)^{i}\;)_{i=0}^{\ell-1} \,\right]^{-1} \\ &= \left[\, \mathrm{col}(XT^{i})_{i=0}^{\ell-1}\; S \,\right]^{-1} \\ &= S^{-1}\left[\, V_1 \;\dots\; V_\ell \,\right]. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} X'(T')^{\ell}\left[V_1' \;\dots\; V_\ell'\right] &= XS\;(S^{-1}TS)^{\ell}\; S^{-1}\left[V_1 \;\dots\; V_\ell\right] \\ &= XS\;S^{-1}T^{\ell}S\;S^{-1}\left[\, V_1 \;\dots\; V_\ell \,\right] \\ &= XT^{\ell}\left[\, V_1 \;\dots\; V_\ell \,\right] \end{aligned}$$

(2.11) terbukti.

<u>Pandang (2.9)</u>

Dibuktikan bahwa jika (X,T,Y) dan (X',T',Y') tripel-tripel standar dari $L(\lambda)$, maka

$$\mathrm{col}\;(W_i)_{i=1}^{\ell}T^{\ell}Y = \mathrm{col}(W_i')_{i=1}^{\ell}(T')^{\ell}Y' \quad \text{...........(2.12)}$$

dimana

$$\mathrm{col}\;(W_i)_{i=1}^{\ell} = \left[\; Y \quad TY \quad \dots \quad T^{\ell-1}Y \;\right]^{-1}$$

$$\mathrm{col}\;(W_i')_{i=1}^{\ell} = \left[\; Y' \quad T'Y' \quad \dots \quad (T')^{\ell-1}Y' \;\right]^{-1}$$

Karena tripel-tripel standar adalah similar:

$T' = S^{-1}TS$, $Y' = S^{-1}Y$, maka

$$\mathrm{col}\ (W_i)_{i=1}^{\ell} = \begin{bmatrix} Y' & T'Y' & \dots & (T')^{\ell-1}Y' \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} S^{-1}Y & S^{-1}TY & \dots & S^{-1}T^{\ell-1}Y \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} S^{-1}(Y & TY & \dots & T^{\ell-1}Y) \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} (Y & TY & \dots & T^{\ell-1}Y) \end{bmatrix} S$$

Sehingga

$$\mathrm{col}\ (W_i')_{i=1}^{\ell}(T')^{\ell}Y' = \mathrm{col}\ (W_i)_{i=1}^{\ell}\ S\ (S^{-1}TS)^{\ell}S^{-1}Y$$
$$= \mathrm{col}\ (W_i)_{i=1}^{\ell}\ S\ S^{-1}T^{\ell}S\ S^{-1}Y$$
$$= \mathrm{col}\ (W_i)_{i=1}^{\ell}\ T^{\ell}Y$$

(2.12) terbukti.

<u>Pandang (2.10)</u>

Dibuktikan bahwa jika (X,T,Y) dan (X',T',Y') tripel-tripel standar dari $L(\lambda)$ maka

$$XT^{-1}Y = X'(T')^{-1}Y' \qquad \dots\dots\dots\dots(2.13)$$

Karena tripel-tripel standar adalah similar:

$$X' = XS,\ T' = S^{-1}TS,\ Y' = S^{-1}Y$$

maka

$$X'(T')^{-1}Y' = XS\ (S^{-1}TS)^{-1}\ S^{-1}Y$$
$$= XS\ (TS)^{-1}S\ S^{-1}Y$$
$$= XS\ S^{-1}T^{-1}S\ S^{-1}Y$$
$$= X\ T^{-1}\ Y$$

(2.13) terbukti.