BAB III

MODEL PERSAMAAN DIFFERENSIAL PLANETARY LAGRANGE

3.1 Metode Variasi Parameter Pada Persamaan Gerak Dua Titik Massa Di Dalam Ruang

Persamaan gerak relatif sebuah titik massa terhadap pusat massa didalam ruang dari persamaan <2.43> dapat dinyatakan dalam koordinat Kartesius sebagai berikut

$$\ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} = XR \qquad \text{<3.1a>}$$

$$\ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} = YR \qquad \text{<3.1b>}$$

$$\ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} = ZR \qquad \text{<3.1c>}$$

Dimana suku pertama dalam ruas kiri adalah komponen dari percepatan relatif yang dihasilkan oleh pusat massa yang ditempatkan pada sistem koordinat. Dalam pembahasan ini sebagai pusat massa adalah planet bumi, yang diasumsikan sebagai titik massa. Ruas kanan adalah percepatan gangguan yang dihasilkan oleh semua gaya yang mempengaruhi gerak.

Definisi 3.1.1

Percepatan gangguan dapat ditulis sebagai turunan dari sebuah fungsi gangguan $-R$

Sehingga diperoleh

$$XR = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad YR = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad ZR = \frac{\partial R}{\partial z} \qquad \text{<3.2>}$$

dan terbentuklah persamaan differensial gerak orde-2 yaitu :

$$\ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \text{<3.3a>}$$

$$\ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y} \qquad \text{<3.3b>}$$

$$\ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z} \qquad \text{<3.3c>}$$

Jika ruas kanan dari persamaan <3.1a>sampai<3.1c> diambil nol maka terbentuklah persamaan differensial homogen orde-2, sehingga dipenuhi persamaan di bawah ini.

$$x = f_1\ (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6,\ t) \qquad \text{<3.4a>}$$

$$y = f_2\ (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6,\ t) \qquad \text{<3.4b>}$$

$$z = f_3\ (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6,\ t) \qquad \text{<3.4c>}$$

Pada sistem koordinat Kartesius pernyataan gerak ellips dinyatakan dalam suku-suku dari waktu dan gabungan enam parameter orbit, yaitu $a, e, I, \Omega, \tilde{\omega}$ dan ε. Dalam gerak ellips parameter-parameter tersebut mendekati konstan atau fungsi dari waktu, sehingga persamaan. <3.4a>sampai<3.4c> dapat diturunkan sebagai berikut :

$$\dot{x} = g_1\ (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6,\ t) \qquad \text{<3.5a>}$$

$$\dot{y} = g_2\ (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6,\ t) \qquad \text{<3.5b>}$$

$$\dot{z} = g_3\ (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6,\ t) \qquad \text{<3.5c>}$$

dimana

$$g_k = \frac{\partial f_k}{\partial t}\ ,\quad k = 1,\ 2,\ 3$$

Dalam metode variasi parameter persamaan <3.4a>sampai <3.4c> merupakan solusi yang memenuhi persamaan <3.1a> sampai <3.1c> yang digunakan untuk gerak ellips [3]. Langkah pertama adalah memperoleh persamaan differensial untuk variabel-variabel parameter-parameter orbit, dimulai dengan

$$x = f_1 \ (c_1, \ c_2, \ \ldots, \ c_6, \ t)$$

diturunkan terhadap waktu <t> diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum \frac{\partial f_1}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} \qquad \text{<3.6>}$$

demikian untuk y dan z dihasilkan $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{dz}{dt}$. Dalam metode variasi parameter suku yang memuat $\frac{dc_j}{dt}$ disamakan dengan nol, sehingga didapatkan :

$$\sum \frac{\partial f_1}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = 0 \qquad \text{<3.7a>}$$

$$\sum \frac{\partial f_2}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = 0 \qquad \text{<3.7b>}$$

$$\sum \frac{\partial f_3}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = 0 \qquad \text{<3.7c>}$$

Dari persamaan <3.5a>sampai<3.5c>,<3.6> dan <3.7a>sampai <3.7c> diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} = g_1 \qquad \text{<3.8a>}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_2}{dt} = g_2 \qquad \text{<3.8b>}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f_3}{dt} = g_3 \qquad \text{<3.8c>}$$

Dalam gerak gangguan, kedua komponen yaitu koordinat dan kecepatan pada saat t oleh rumus gerak ellips dinyatakan dalam suku-suku dari waktu dan parameter-parameter orbit pada saat t. Komponen kecepatan diperoleh dari turunan persamaan gerak ellips untuk koordinat jika parameter-parameter orbitnya konstan. Hal ini juga disebut dengan istilah *osculating elements.*

Langkah berikutnya dengan menurunkan persamaan <3.8a> sampai <3.8c> dihasilkan

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \frac{\partial^2 f_1}{dt^2} \quad \sum \frac{\partial g_1}{\partial c_j} \quad \frac{dc_j}{dt} \qquad \text{<3.9a>}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = \frac{\partial^2 f_2}{dt^2} \quad \sum \frac{\partial g_2}{\partial c_j} \quad \frac{dc_j}{dt} \qquad \text{<3.9b>}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} = \frac{\partial^2 f_3}{dt^2} \quad \sum \frac{\partial g_3}{\partial c_j} \quad \frac{dc_j}{dt} \qquad \text{<3.9c>}$$

Substitusikan persamaan <3.4a> sampai <3.4c> dan. <3.9a> sampai <3.9c> kedalam persamaan <3.3a> sampai <3.3c> didapatkan hasil sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 f_1}{dt^2} + \mu \frac{f_1}{r^3} + \sum \frac{\partial g_1}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \text{<3.10a>}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{dt^2} + \mu \frac{f_2}{r^3} + \sum \frac{\partial g_2}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial y} \qquad \text{<3.10b>}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{dt^2} + \mu \frac{f_3}{r^3} + \sum \frac{\partial g_3}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial z} \qquad \text{<3.10c>}$$

dimana $r^3 = (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}$

f_1, f_2 dan f_3 menyatakan koordinat dalam suku-suku dari waktu dan parameter-parameter orbit pada saat t, yang memenuhi rumus dari persamaan gerak ellips. Oleh karena itu dua suku yang pertama dan kedua pada ruas kiri dari persamaan <3.10a> sampai <3.10c>bernilai nol. Hasil dari tahap ini diambil secara lengkap dari persamaan <3.7a>sampai <3.7c> dan persamaan <3.10a> sampai <3.10c>yang telah disederhanakan. Maka didapatkan hasil sebagai berikut.

$$\sum \frac{\partial f_1}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = 0 \qquad \text{<3.11a>}$$

$$\sum \frac{\partial f_2}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = 0 \qquad \text{<3.11b>}$$

$$\sum \frac{\partial f_3}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = 0 \qquad \text{<3.11c>}$$

dan

$$\sum \frac{\partial g_1}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \text{<3.11d>}$$

$$\sum \frac{\partial g_2}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial y} \qquad \text{<3.11e>}$$

$$\sum \frac{\partial g_3}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial z} \qquad \text{<3.11f>}$$

Dalam pembicaraan semula bahwa simbol f dan g digunakan untuk menunjukkan komponen koordinat dan kecepataan dalam suku-suku dari waktu dan parameter-parameter orbital pada saat t. Untuk selanjutnya f dan g akan diganti dengan simbol x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$ dan $\dot{z}$ juga sebagai fungsi dari waktu dan parameter-parameter orbital.

Persamaan selanjutnya adalah :

$$\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial x}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt} + \frac{\partial x}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt} + \frac{\partial x}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt} + \frac{\partial x}{\partial c_6}\frac{dc_6}{dt} = 0$$

<3.12a>

$$\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial y}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}+\frac{\partial y}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}+\frac{\partial y}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt}+\frac{\partial y}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt}+\frac{\partial y}{\partial c_6}\frac{dc_6}{dt}=0 \qquad \text{<3.12b>}$$

$$\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial z}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}+\frac{\partial z}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}+\frac{\partial z}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt}+\frac{\partial z}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt}+\frac{\partial z}{\partial c_6}\frac{dc_6}{dt}=0 \qquad \text{<3.12c>}$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}+\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}+\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt}+\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt}+\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_6}\frac{dc_6}{dt}=\frac{\partial R}{\partial x} \qquad \text{<3.12d>}$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_6}\frac{dc_6}{dt}=\frac{\partial R}{\partial y} \qquad \text{<3.12e>}$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_6}\frac{dc_6}{dt}=\frac{\partial R}{\partial z} \qquad \text{<3.12f>}$$

3.2. Langrange's Brakets

Definisi 3.2.1

Andaikan c_j dan c_k adalah dua fungsi yang di generalisasikan pada sistem koordinat x,y dan z dapat dinyatakan dalam bentuk *Langrange's brackets* sebagai berikut :

$$\left[c_j, c_k\right] = \frac{\partial x}{\partial c_j}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_k} - \frac{\partial x}{\partial c_k}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j} + \frac{\partial y}{\partial c_j}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_k} - \frac{\partial y}{\partial c_k}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_j} + \frac{\partial z}{\partial c_j}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_k} - \frac{\partial z}{\partial c_k}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_j} \qquad \text{<3.13>}$$

Ini sering di tulis dalam bentuk :

$$\left[c_j, c_k\right] = \xi \left[\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j}\frac{\partial x}{\partial c_k} - \frac{\partial x}{\partial c_k}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j}\right]$$

$$= \xi \frac{\partial (x, \dot{x})}{\partial (c_j, c_k)} \qquad \text{<3.14>}$$

ξ menyatakan penjumlahan pada tiga koordinat, dan persamaan <3.14> hanya dinyatakan dalam koordinat x.

3.2.1 Sifat-sifat Penting dari Langrange's brackets

Theorema 3.1.

Suatu Langrange's brackets dalam sistem koordinat x, y dan z mempunyai sifat-sifat sebagai berikut

1. $[c_j, c_j] = 0$ <3.15a>
2. $[c_j, c_k] = -[c_k, c_j]$ <3.15b>
3. $\frac{d}{dt}[c_j, c_k] = 0$ <3.15c>

Bukti 3.1

Dari definisi 3.2.1 dapat dibuktikan dengan mudah sifat 1 dan sifat 2 sedangkan untuk sifat ketiga di buktikan sebagai berikut :

Dari persamaan <3.14> ditulis bentuk Langrange's brackets

$$\left[c_j, c_k\right] = \xi \left[\frac{\partial x}{\partial c_j}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_k} - \frac{\partial x}{\partial c_k}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j} \right]$$

Kemudian diturunkan terhadap t, diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[c_j, c_k\right] = \xi \left\{ \frac{\partial^2 x}{\partial c_j \partial t}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_k} + \frac{\partial x}{\partial c_j}\frac{\partial^2 x}{\partial c_k \partial t} - \left[\frac{\partial^2 x}{\partial c_k \partial t}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j} + \frac{\partial x}{\partial c_k}\frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial c_j \partial t} \right] \right\} \qquad \text{<3.16>}$$

untuk ruas kanan dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\xi \left\{ \frac{\partial}{\partial c_j} \left[\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_k} - \frac{\partial x}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial c_k} \left[\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j} - \frac{\partial x}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} \right] \right\} \qquad <3.17>$$

x dan $\dot{x}$ dalam persamaan <3.17> berarti fungsi dalam gerak ellips dengan $c_1, \ldots, c_6$ sebagai konstanta.

Kemudian $\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}$ dan $\frac{\partial \dot{x}}{\partial t} = \ddot{x}$ disubtitusikan pada persamaan <3.17>, maka persamaan <3.16> menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[c_j, c_k \right] = \xi \left\{ \frac{\partial}{\partial c_j} \left[\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_k} - \frac{\partial x}{\partial c_k} \ddot{x} \right] - \frac{\partial}{\partial c_k} \left[\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j} - \frac{\partial x}{\partial c_j} \ddot{x} \right] \right. \qquad <3.18>$$

Dengan mengambil bentuk $U = \frac{\mu}{r}$ maka persamaan <2.43> akan menjadi

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad <3.19>$$

Subtitusikan persamaan <3.19> kedalam persamaan <3.18> menghasilkan

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[c_j, c_k \right] = \xi \left\{ \frac{\partial}{\partial c_j} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial c_k} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c_k} \right] - \frac{\partial}{\partial c_k} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial c_j} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c_j} \right] \right.$$

$$= \xi \left[\left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \dot{x}^2}{\partial c_j \partial c_k} - \frac{\partial^2 U}{\partial c_k \partial c_j} \right] - \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \dot{x}^2}{\partial c_j \partial c_k} - \frac{\partial^2 U}{\partial c_k \partial c_j} \right] \right]$$

$$= 0$$

jadi $$\frac{\partial}{\partial t} \left[c_j, \dot{c}_k \right] = 0 \qquad \text{<3.20>}$$

Terbukti !

Dalam hal ini Lagrange's brackets pada persamaan <3.20> diharapkan dapat dinyatakan sebagai fungsi dari konstanta-konstanta integrasi dan t. Jika turunan parsialnya terhadap t adalah nol, maka Lagrange's Brackets bukan merupakan fungsi dari t tetapi hanya fungsi dari konstanta-konstanta integrasi saja. Oleh karena itu dibolehkan menghitungnya pada sebarang pilihan titik yang sesuai dalam orbit.

3.2.2. Bentuk Lagrange's Brackets dari Parameter-parameter Orbital.

Persamaan <3.12a>sampai <3.12f> tidak sesuai untuk perhitungan parameter-parameter orbital. Dalam aplikasi akan lebih berguna jika hasil bagi diferensial $\frac{dc_j}{dt}$ diperoleh secara eksplisit.

Enam persamaan baru akan diperoleh dengan cara mengalihkan persamaan <3.12a>sampai <3.12f> dengan $-\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j}$, $-\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_j}$, $-\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_j}$ dan $+\frac{\partial x}{\partial c_j}$, $+\frac{\partial y}{\partial c_j}$, $+\frac{\partial z}{\partial c_j}$, kemudian dijumlahkan hasilnya. Ruas kanan dari persamaan baru adalah

$$\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c_j} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c_j} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c_j} = \frac{\partial R}{\partial c_j} \qquad \text{<3.21>}$$

Kita mulai untuk c_1. Persamaan <3.12a> dikalikan dengan $\left[-\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right]$, didapatkan

$$\left[-\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right]\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt} + \left[-\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right]\frac{\partial x}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt} + \left[-\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right]\frac{\partial x}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt} +$$

$$\left[-\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right]\frac{\partial x}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt} + \left[-\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right]\frac{\partial x}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt} + \left[-\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right]\frac{\partial x}{\partial c_6}\frac{dc_6}{dt} = 0$$

<3.22>

Persamaan <3.12d> dikalikan dengan $\left[+\frac{\partial x}{\partial c_1}\right]$ akan dihasilkan :

$$\left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\right]\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt} + \left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\right]\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt} + \left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\right]\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}$$

$$\left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\right]\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt} + \left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\right]\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt} + \left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\right]\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_6}\frac{dc_6}{dt}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial R}{\partial x} \qquad \text{<3.23>}$$

Kemudian persamaan <3.22> dan persamaan. <3.23> dijumlahkan, menghasilkan

$$\left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1} - \frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right]\frac{dc_1}{dt} + \left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_2} - \frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_2}\right]\frac{dc_2}{dt} +$$

$$\left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_3} - \frac{\partial x}{\partial c_3}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right]\frac{dc_3}{dt} + \left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_4} - \frac{\partial x}{\partial c_4}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right]\frac{dc_4}{dt} +$$

$$\left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_5} - \frac{\partial x}{\partial c_5}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right]\frac{dc_5}{dt} + \left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_6} - \frac{\partial x}{\partial c_6}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right]\frac{dc_6}{dt} +$$

$$= \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c_1} \qquad \text{<3.24>}$$

Langkah berikutnya persamaan <3.12b> dikalikan dengan $\left[-\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right]$, didapatkan

$$\left[-\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] \frac{\partial y}{\partial c_1} \frac{dc_1}{dt} + \left[-\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] \frac{\partial y}{\partial c_2} \frac{dc_2}{dt} + \left[-\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] \frac{\partial y}{\partial c_3} \frac{dc_3}{dt} +$$

$$\left[-\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] \frac{\partial y}{\partial c_4} \frac{dc_4}{dt} + \left[-\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] \frac{\partial y}{\partial c_5} \frac{dc_5}{dt} + \left[-\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] \frac{\partial y}{\partial c_6} \frac{dc_6}{dt} = 0$$

$$\text{<3.25>}$$

juga persamaan <3.12e> dikalikan $\left[+\frac{\partial y}{\partial c}\right]$ menghasilkan

$$\left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right] \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1} \frac{dc_1}{dt} + \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right] \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_2} \frac{dc_2}{dt} + \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right] \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_3} \frac{dc_3}{dt} +$$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right] \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_4} \frac{dc_4}{dt} + \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right] \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_5} \frac{dc_5}{dt} + \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right] \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_6} \frac{dc_6}{dt}$$

$$= \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c_1} \qquad \text{<3.26>}$$

Kemudian persamaan <3.25> dan persamaan <3.26> dijumlahkan menghasilkan :

$$\left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1} - \frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] \frac{dc_1}{dt} + \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_2} - \frac{\partial y}{\partial c_2}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] \frac{dc_2}{dt} +$$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_3} - \frac{\partial y}{\partial c_3}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] \frac{dc_3}{dt} + \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_4} - \frac{\partial y}{\partial c_4}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] \frac{dc_4}{dt} +$$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_5} - \frac{\partial y}{\partial c_5}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] \frac{dc_5}{dt} + \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_6} - \frac{\partial y}{\partial c_6}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] \frac{dc_6}{dt} +$$

$$= \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c_1} \qquad \text{<3.27>}$$

Selanjutnya persamaan <3.12c> dikalikan dengan $\left[-\frac{\partial z}{\partial c_1}\right]$, didapatkan

$$\left[-\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\left[-\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\frac{\partial z}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}+\left[-\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\frac{\partial z}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}+$$

$$\left[-\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\frac{\partial z}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt}+\left[-\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\frac{\partial z}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt}+\left[-\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\frac{\partial z}{\partial c_6}\frac{dc_6}{dt}=0$$

<3.28>

dan persamaan <3.12f> dikalikan dengan $\left[+\frac{\partial z}{\partial c_1}\right]$, diperoleh hasil

$$\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\right]\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\frac{d\,c_1}{dt}+\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\right]\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}+\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\right]\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}+$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\right]\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt}+\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\right]\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt}+\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\right]\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_6}\frac{dc_6}{dt}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial R}{\partial z}$$

<3.29>

kemudian persamaan <3.28> dan persamaan. <3.29> dijumlahkan, menghasilkan :

$$\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}-\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\frac{dc_1}{dt}+\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_2}-\frac{\partial z}{\partial c_2}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\frac{dc_2}{dt}+$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_3}-\frac{\partial z}{\partial c_3}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\frac{dc_3}{dt}+\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_4}-\frac{\partial z}{\partial c_4}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\frac{dc_4}{dt}+$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_5}-\frac{\partial z}{\partial c_5}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\frac{dc_5}{dt}+\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_6}-\frac{\partial z}{\partial c_6}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\frac{dc_6}{dt}+$$

$$=\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c_1}$$

<3.30>

Terakhir persamaan <3.24>, persamaan <3.27> dan persamaan <3.30> dijumlahkan sehingga menghasilkan :

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1} - \frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right] + \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1} - \frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] + \left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1} - \right.\right. \\
&\left.\left.\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\right\} \frac{dc_1}{dt} + \left\{\left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_2} - \frac{\partial x}{\partial c_2}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right] + \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_2} - \right.\right. \\
&\left.\left.\frac{\partial y}{\partial c_2}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] + \left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_2} - \frac{\partial z}{\partial c_2}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\right\} \frac{dc_2}{dt} + \left\{\left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_3} - \right.\right. \\
&\left.\frac{\partial x}{\partial c_3}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right] + \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_3} - \frac{\partial y}{\partial c_3}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] + \left.\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_3} \quad \frac{\partial z}{\partial c_3}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\right\} \frac{dc_3}{dt} + \\
&\left\{\left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_4} - \frac{\partial x}{\partial c_4}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right] + \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_4} - \frac{\partial y}{\partial c_4}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] + \left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_4} - \right.\right. \\
&\left.\left.\frac{\partial z}{\partial c_4}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\right\} \frac{dc_4}{dt} + \left\{\left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_5} - \frac{\partial x}{\partial c_5}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right] + \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_5} - \frac{\partial y}{\partial c_5}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] + \right. \\
&\left.\left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_5} - \frac{\partial z}{\partial c_5}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\right\} \frac{dc_5}{dt} + \left\{\left[\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_6} - \frac{\partial x}{\partial c_6}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\right] + \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_6} - \right.\right. \\
&\left.\left.\frac{\partial y}{\partial c_6}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\right] + \left[\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_6} \quad \frac{\partial z}{\partial c_6}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\right]\right\} \frac{dc_6}{dt} + \\
&= \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c_1} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c_1} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c_1} \qquad \text{<3.31>}
\end{aligned}
$$

Menurut definisi 3.2.1 dan persamaan <3.21> maka persamaan. <3.31> dapat disederhanakan menjadi

$$
\begin{aligned}
&\left[c_1, c_1\right]\frac{dc_1}{dt} + \left[c_1, c_2\right]\frac{dc_2}{dt} + \left[c_1, c_3\right]\frac{dc_3}{dt} + \left[c_1, c_4\right]\frac{dc_4}{dt} + \\
&\left[c_1, c_5\right]\frac{dc_5}{dt} + \left[c_1, c_6\right]\frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_1} \qquad \text{<3.32>}
\end{aligned}
$$

Analog dengan cara diatas diperoleh bentuk Lagrange's brackets untuk parameter-parameter c_2, c_3, c_4, c_5, dan c_6. Sehingga diperoleh enam persamaan baru dalam bentuk persamaan Lagrange's brackets, yaitu :

$$\left[c_1, c_1\right]\frac{dc_1}{dt} + \left[c_1, c_2\right]\frac{dc_2}{dt} + \left[c_1, c_3\right]\frac{dc_3}{dt} + \left[c_1, c_4\right]\frac{dc_4}{dt} + \left[c_1, c_5\right]\frac{dc_5}{dt} + \left[c_1, c_6\right]\frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_1} \qquad \text{<3.33a>}$$

$$\left[c_2, c_1\right]\frac{dc_1}{dt} + \left[c_2, c_2\right]\frac{dc_2}{dt} + \left[c_2, c_3\right]\frac{dc_3}{dt} + \left[c_2, c_4\right]\frac{dc_4}{dt} + \left[c_2, c_5\right]\frac{dc_5}{dt} + \left[c_2, c_6\right]\frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_2} \qquad \text{<3.33b>}$$

$$\left[c_3, c_1\right]\frac{dc_1}{dt} + \left[c_3, c_2\right]\frac{dc_2}{dt} + \left[c_3, c_3\right]\frac{dc_3}{dt} + \left[c_3, c_4\right]\frac{dc_4}{dt} + \left[c_3, c_5\right]\frac{dc_5}{dt} + \left[c_3, c_6\right]\frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_3} \qquad \text{<3.33c>}$$

$$\left[c_4, c_1\right]\frac{dc_1}{dt} + \left[c_4, c_2\right]\frac{dc_2}{dt} + \left[c_4, c_3\right]\frac{dc_3}{dt} + \left[c_4, c_4\right]\frac{dc_4}{dt} + \left[c_4, c_5\right]\frac{dc_5}{dt} + \left[c_4, c_6\right]\frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_4} \qquad \text{<3.33d>}$$

$$\left[c_5, c_1\right]\frac{dc_1}{dt} + \left[c_5, c_2\right]\frac{dc_2}{dt} + \left[c_5, c_3\right]\frac{dc_3}{dt} + \left[c_5, c_4\right]\frac{dc_4}{dt} + \left[c_5, c_5\right]\frac{dc_5}{dt} + \left[c_5, c_6\right]\frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_5} \qquad \text{<3.33e>}$$

$$\left[c_6, c_1\right]\frac{dc_1}{dt} + \left[c_6, c_2\right]\frac{dc_2}{dt} + \left[c_6, c_3\right]\frac{dc_3}{dt} + \left[c_6, c_4\right]\frac{dc_4}{dt} + \left[c_6, c_5\right]\frac{dc_5}{dt} + \left[c_6, c_6\right]\frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_6} \qquad \text{<3.33f>}$$

Dari persamaan. <3.33a>sampai <3.33f> tampak terdapat 36 Lagrange's brackets. Menurut sifat-sifat Lagrange's brackets terdapat matrik anti simetrik yang dibentuk oleh koefisien persamaan <3.33a>sampai <3.33f>, artinya elemen dibawah diagonal utama adalah sama tetapi berlawanan tanda dan berhubungan secara simetrik dengan elemen-elemen diatas diagonal. Matrik tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} 0 & -[c_2,c_1] & -[c_3,c_1] & -[c_4,c_1] & -[c_5,c_1] & -[c_6,c_1] \\ [c_2,c_1] & 0 & -[c_3,c_2] & -[c_4,c_2] & -[c_5,c_2] & -[c_6,c_2] \\ [c_3,c_1] & [c_3,c_2] & 0 & -[c_4,c_3] & -[c_5,c_3] & -[c_6,c_3] \\ [c_4,c_1] & [c_4,c_2] & [c_4,c_3] & 0 & -[c_5,c_4] & -[c_6,c_4] \\ [c_5,c_1] & [c_5,c_2] & [c_5,c_3] & [c_5,c_4] & 0 & -[c_6,c_5] \\ [c_6,c_1] & [c_6,c_2] & [c_6,c_3] & [c_6,c_4] & [c_6,c_5] & 0 \end{bmatrix} \quad \langle 3.34 \rangle$$

Jadi Lagrange's brackets yang berbeda dalam matrik tersebut adalah lima belas.

3.3. Persamaan Differensial Planetary Lagrange

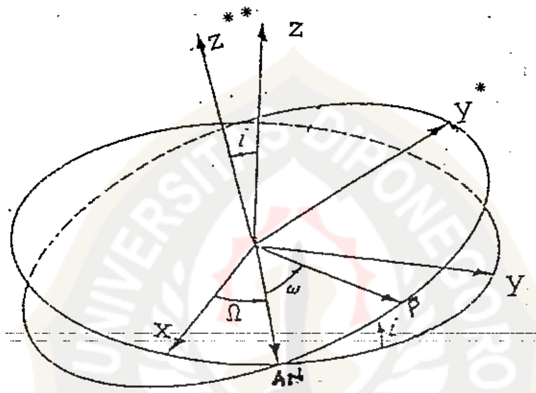
Enam elemen-elemen Kepler yang sering digunakan untuk menggambarkan posisi satelit dalam ruang angkasa adalah a, e, I, ε, $\tilde{\omega}$ dan Ω . Tiga elemen yang pertama sudah biasa dikenal. ε adalah *mean longitude* (jarak sudut dari Grenwich ke satelit) pada saat mulai perhitungan.

$\tilde{\omega}$ adalah *longitude of perigee* (jarak sudut dari titik Aries ke titik perigee)dan Ω *longitude of ascending node* (jarak sudut dari titik Aries ketitik nodal) dengan $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$, dimana ω adalah jarak sudut dari *ascending node* (titik nodal)ke *perigee* (titik terdekat jarak satelit ke bumi), sering dinyatakan sebagai *argument of perigee.*

Menghitung harga suatu Lagrange's brackets [p,q] pada dasarnya adalah menghitung rotasi dari sistem koordinat x,ydan z pada sudut Ω, I dan ω yangdihitung dalam elemen elemen orbit [3]. Untuk tujuan tersebut diatas ditulis

$$[p,q] = \frac{\partial(x,\dot{x})}{\partial(p,q)} + \frac{\partial(y,\dot{y})}{\partial(p,q)} + \frac{\partial(z,\dot{z})}{\partial(p,q)} \qquad <3.35$$

Perhatikan gambar dibawah ini!



Gambar 3.1. Sistem Koordinat Kartesius

Langkah pertama adalah memutar (merotasikan) sistem koordinat disekitar sumbu z oleh sudut + Ω yang membawa *ascending node* (titik perpotongan bidang orbit dengan bidang ekuator)ke sumbu x^*. Dari penjabaran rotasi matrik di sekitar sumbu z diperoleh matrik rotasi, yaitu

$$R_z(\Omega) = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga hubungan antara koordinat lama dengan koordinat baru adalah :

$$x = x^* \cos\Omega - y^* \sin\Omega \qquad <3.36a>$$

$$y = x^* \sin\Omega + y^* \cos\Omega \qquad <3.36b>$$

$$z = z^* \qquad <3.36c>$$

Turunan parsial terhadap p dari persamaan <3.36a>,<3.36b> dan <3.36c> adalah :

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial x^*}{\partial p}\text{Cos } \Omega - \frac{\partial y^*}{\partial p}\text{Sin } \Omega + \left[x^*(-\text{Sin } \Omega)\frac{\partial \Omega}{\partial p} - y^*\text{Cos } \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial p}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial x^*}{\partial p} - y^* \frac{\partial \Omega}{\partial p}\right]\text{Cos } \Omega - \left[\frac{\partial y^*}{\partial p} + x^* \frac{\partial \Omega}{\partial p}\right]\text{Sin } \Omega \qquad \text{<3.37>}$$

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\partial x^*}{\partial p}\text{ sin } \Omega + \frac{\partial y^*}{\partial p}\text{ cos } \Omega + x^*\text{cos } \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial p} - y^*\text{Sin } \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial p}$$

$$= \left[\frac{\partial y^*}{\partial p} + x^* \frac{\partial \Omega}{\partial p}\right]\text{Cos } \Omega + \left[\frac{\partial x^*}{\partial p} - y^* \frac{\partial \Omega}{\partial p}\right]\text{Sin } \Omega \qquad \text{<3.38>}$$

Apabila $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ dan $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$ dimasukkan ke persamaan <3.36a>, <3.36b> dan <3.36c> akan dipenuhi :

$$\dot{x} = \dot{x}^* \text{ Cos } \Omega - \dot{y}^* \text{ Sin } \Omega \qquad \text{<3.39a>}$$

$$\dot{y} = \dot{x}^* \text{ Sin } \Omega + \dot{y}^* \text{ Cos } \Omega \qquad \text{<3.39b>}$$

$$\dot{z} = \dot{z}^* \qquad \text{<3.39c>}$$

Analog untuk persamaan <3.37> dan persamaan <3.38> didapatkan :

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial p} = \left[\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial p} + \dot{y}^* \frac{\partial \Omega}{\partial p}\right]\text{Cos } \Omega - \left[\frac{\partial \dot{y}^*}{\partial p} + \dot{x}^* \frac{\partial \Omega}{\partial p}\right]\text{ Sin } \Omega \qquad \text{<3.40>}$$

dan

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial p} = \left[\frac{\partial \dot{y}^*}{\partial p} + \dot{x}^* \frac{\partial \Omega}{\partial p}\right]\text{Cos } \Omega + \left[\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial p} - \dot{y}^* \frac{\partial \Omega}{\partial p}\right]\text{ Sin } \Omega \qquad \text{<3.41>}$$

Persamaan <3.37>, <3.38>, <3.40> dan <3.41> dalam bentuk yang sederhana adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial x}{\partial p} = A_1 \cos\Omega - B_1 \sin\Omega \qquad \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} = C_1 \cos\Omega - D_1 \sin\Omega \qquad \text{<3.42a>}$$

$$\frac{\partial y}{\partial p} = B_1 \cos\Omega + A_1 \sin\Omega \qquad \frac{\partial \dot{y}}{\partial p} = D_1 \cos\Omega + C_1 \sin\Omega \qquad \text{<3.42b>}$$

Dimana $A_1 = \frac{\partial x^*}{\partial p} - y^* \frac{\partial \Omega}{\partial p}$ $\quad C_1 = \frac{\partial \dot{x}^*}{\partial p} - \dot{y}^* \frac{\partial \Omega}{\partial p}$

$$B_1 = \frac{\partial y^*}{\partial p} + x^* \frac{\partial \Omega}{\partial p} \qquad D_1 = \frac{\partial \dot{y}^*}{\partial p} + \dot{x}^* \frac{\partial \Omega}{\partial p}$$

Kemudian A_2, B_2, C_2, dan D_2, diperoleh dengan mengganti p pada persamaan <3.42> dengan q, maka

$$\frac{\partial(x,\dot{x})}{\partial(p,q)} = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial \dot{x}}{\partial p}$$

$$= (A_1 \operatorname{Cos}\Omega - B_1 \operatorname{Sin}\Omega)\ (C_2 \operatorname{Cos}\Omega - D_2 \operatorname{Sin}\Omega) -$$
$$(A_2 \operatorname{Cos}\Omega - B_2 \operatorname{Sin}\Omega)\ (C_1 \operatorname{Cos}\Omega - D_1 \operatorname{Sin}\Omega)$$
$$= (A_1C_2 - A_2C_1) \operatorname{Cos}^2\Omega + (B_1D_2 - B_2D_1) \operatorname{Sin}^2\Omega +$$
$$(A_2D_1 + C_1B_2 - A_1D_2 - B_1C_2) \operatorname{Sin}\Omega \operatorname{Cos}\Omega \qquad \text{<3.43>}$$

dan juga

$$\frac{\partial(y,\dot{y})}{\partial(p,q)} = \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial \dot{y}}{\partial p}$$

$$= (B_1 \operatorname{Cos}\Omega + A_1 \operatorname{Sin}\Omega)\ (D_2 \operatorname{Cos}\Omega + C_2 \operatorname{Sin}\Omega) -$$
$$(B_2 \operatorname{Cos}\Omega + A_2 \operatorname{Sin}\Omega)\ (D_1 \operatorname{Cos}\Omega + C_1 \operatorname{Sin}\Omega)$$
$$= (B_1D_2 - B_2D_1) \operatorname{Cos}^2\Omega + (A_1C_2 - A_2C_1) \operatorname{Sin}\Omega +$$
$$(A_1D_2 + B_1C_2 - A_2D_1 - B_2C_1) \operatorname{Sin}\Omega \operatorname{Cos}\Omega \qquad \text{<3.44>}$$

Persamaan <3.43> dan persamaan <3.44> disubtitusikan pada persamaan <3.35>, menghasilkan

$$[p,q] = [A_1C_2 - A_2C_1] + [B_1D_2 - B_2D_1] + \frac{\partial(z,\dot{z})}{\partial(p,q)} \qquad \text{<3.45>}$$

Oleh karena itu

$$A_1C_2 - A_2C_1 = \left[\frac{\partial x^*}{\partial p} - y^*\frac{\partial \Omega}{\partial p}\right]\left[\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial q} - \dot{y}^*\frac{\partial \Omega}{\partial q}\right] - \left[\frac{\partial x^*}{\partial q} - y^*\frac{\partial \Omega}{\partial q}\right]\left[\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial p} - \dot{y}^*\frac{\partial \Omega}{\partial p}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial q} - \frac{\partial x^*}{\partial q}\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial p}\right] + \left[-y^*\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial q} + \dot{y}^*\frac{\partial x^*}{\partial q}\right]\frac{\partial \Omega}{\partial p} + \left[-\dot{y}^*\frac{\partial x^*}{\partial p} + y^*\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial p}\right]\frac{\partial \Omega}{\partial q} + \left[y^*\dot{y}^* - \dot{y}^*y^*\right]\frac{\partial \Omega}{\partial p}\frac{\partial \Omega}{\partial q}$$

$$A_1C_2 - A_2C_1 = \frac{\partial(x^*,\dot{x}^*)}{\partial(p,q)} + \left[\dot{y}^*\frac{\partial x^*}{\partial q} - y^*\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial q}\right]\frac{\partial \Omega}{\partial p} + \left[y^*\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial q} - \dot{y}^*\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]\frac{\partial \Omega}{\partial q} \qquad \text{<3.46>}$$

Analog untuk

$$B_1D_2 - B_2D_1 = \frac{\partial(y^*,\dot{y}^*)}{\partial(p,q)} + \left[x^*\frac{\partial \dot{y}^*}{\partial q} - \dot{x}^*\frac{\partial y^*}{\partial q}\right]\frac{\partial \Omega}{\partial p} + \left[\dot{x}^*\frac{\partial y^*}{\partial p} - x^*\frac{\partial \dot{y}^*}{\partial p}\right]\frac{\partial \Omega}{\partial q} \qquad \text{<3.47>}$$

Misalkan

$$[p,q]^* = \frac{\partial(x^*,\dot{x}^*)}{\partial(p,q)} + \frac{\partial(y^*,\dot{y}^*)}{\partial(p,q)} + \frac{\partial(z^*,\dot{z}^*)}{\partial(p,q)}$$

Karena $z = z^*$ dan $z = \dot{z}^*$, maka hasil dari persamaan <3.45> setelah disubtitusi persamaan <3.46> dan persamaan <3.47> adalah

$$[p,q] = [p,q]^* + \left[x^*\frac{\partial \dot{y}^*}{\partial q} + \dot{y}^*\frac{\partial x}{\partial q} - y^*\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial q} - \dot{x}^*\frac{\partial y^*}{\partial q}\right]\frac{\partial \Omega}{\partial p} - \left[x^*\frac{\partial \dot{y}^*}{\partial p} + \dot{y}^*\frac{\partial x^*}{\partial p} - y^*\frac{\partial \dot{x}^*}{\partial p} - \dot{x}^*\frac{\partial y^*}{\partial p}\right]\frac{\partial \Omega}{\partial q}$$

$$[p,q] = [p,q]^* + \frac{\partial(\Omega, x^* \dot{y}^* - y^* \dot{x}^*)}{\partial(p,q)} \tag{3.48}$$

Dari teori normal orbit satelit (gangguan diabaikan), persamaan <3.1a> dikalikan dengan y dan persamaan <3.1b> dengan x diperoleh hubungan

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$$

Kemudian diintegrasikan dengan konstanta integral H, maka

$$x\dot{y} - y\dot{x} = H$$

Untuk integral luas dalam bidang xy dinyatakan dalam parameter-parameter orbit dari persamaan <2.44> yaitu

$$H = \sqrt{\mu a\ (1 - e^2)}\ \text{Cos } I \tag{3.49}$$

sehingga diperoleh

$$[p,q] = [p,q]^* + \frac{\partial\ (\Omega, H)}{\partial\ (p,q)} \tag{3.50}$$

Langkah berikutnya adalah rotasi ke sebuah sistem koordinat x^{**}, y^{**}, z^{**} yang dibuat oleh perputaran disekitar sumbu x^* sebesar sudut + I. Dari penjabaran rotasi matrik sekitar sumbu x diperoleh matrik rotasi terhadap sumbu x^*, yaitu :

$$R_{x^*}\ (I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos } I & -\text{Sin } I \\ 0 & \text{Sin } I & \text{Cos } I \end{bmatrix}$$

Sehingga hubungan antara koordinat lama dan baru adalah:

$$x^* = x^{**} \tag{3.51a}$$

$$y^* = y^{**}\text{Cos } I - z^{**}\text{Sin } I \tag{3.51b}$$

$$z^* = y^{**}\text{Sin } I + z^{**}\text{Cos } I \tag{3.51c}$$

Analog dalam persamaan <3.36a> sampai dengan persamaan <3.48> didapatkan bahwa

$$\left[p,q\right]^{*} = \left[p,q\right]^{**} + \frac{\partial\ [I, y^{**}\dot{z}^{**} - z^{**}\dot{y}^{**}]}{\partial\ [p,q]} \qquad <3.52>$$

Harga - harga z^{**} dan $\dot{z}^{**}$ adalah nol, karena rotasi terhadap +I mengakibatkan bidang $x^{**}y^{**}$ berimpit dengan bidang orbit, jadi diperoleh hubungan

$$\left[p,q\right]^{*} = \left[p,q\right]^{**} \qquad <3.53>$$

Selanjutnya dilakukan terhadap sumbu z^{**} sebesar sudut $+\omega = \tilde{\omega} - \Omega$. Misalkan koordinat baru ditunjukkan oleh X,Y . Bidang XY berimpit dengan bidang orbital ,dan sumbu X menunjukkan kearah *perigee*. Dengan cara yang sama untuk mendapatkan persamaan <3.48> diperoleh:

$$\left[p,q\right]^{**} = \left[p,q\right]^{***} + \frac{\partial\ [\ \tilde{\omega} - \Omega,\ X\dot{Y} - Y\dot{X}\ ]}{\partial\ [p,q]} \qquad <3.54>$$

Karena bidang XY berimpit dengan bidang orbit maka besar sudut inklinasi sama dengan nol, maka persamaan <3.49>menjadi

$$\delta = \sqrt{\mu a\ (1 - e^{2}\ )} \qquad <3.55>$$

sehingga diperoleh

$$\left[p,q\right]^{**} = \left[p,q\right]^{***} + \frac{\partial\ [\tilde{\omega} - \Omega\ ,\ \delta\ ]}{\partial\ [p,q\ ]} \qquad <3.56>$$

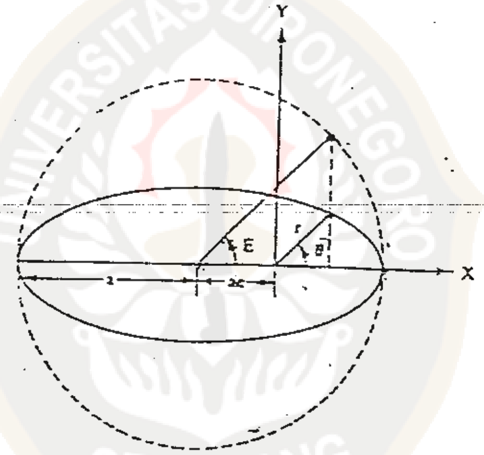
Penjumlahan persamaan <3.48>, <3.53> dan persamaan<3.56> menghasilkan

$$\left[p,q\right] = \left[p,q\right]^{***} + \frac{\partial\ [\tilde{\omega} - \Omega, \delta\ ]}{\partial\ [p,q\ ]} + \frac{\partial\ [\Omega,\ H\ ]}{\partial\ [p,q\ ]} \qquad <3.57>$$

Sekarang kita menghitung $[p,q]^{***}$,maka

$$\left[p,q\right]^{***} = \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial \dot{X}}{\partial q} - \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial \dot{X}}{\partial q} + \frac{\partial Y}{\partial p}\frac{\partial \dot{Y}}{\partial q} - \frac{\partial Y}{\partial p}\frac{\partial \dot{Y}}{\partial q} \qquad \text{<3.58>}$$

Karena Lagrange's brackets independent terhadap waktu,maka untuk mempermudah perhitungan cukup dievaluasi pada titik perigee, yaitu *eksentrisitas anolmaly* E sama dengan nol . Untuk lebih jelasnnya perhatikan gambar dibawah ini.



Gambar 3.2 Eksentrisitas anomaly E pada orbit.

Menurut [1] dalam suku-suku *eksentrisitas anomaly* E ,posisi satelit adalah :

$$X = a\ (\cos E - e) \qquad \text{<3.59a>}$$

$$Y = a\sqrt{1 - e^2}\ \sin E \qquad \text{<3.59b>}$$

maka pada E = 0 diperoleh

$$X_0 = a\ (1 - e) \qquad \text{<3.60a>}$$

$$Y_0 = 0 \qquad \text{<3.60b>}$$

kemudian persamaan <3.59> diturunkan terhadap t,diperoleh

$$\dot{X} = -\ a \sin E\ \dot{E} \qquad \text{<3.61a>}$$

$$\dot{Y} = a\sqrt{1 - e^2}\ \cos E\ \dot{E} \qquad \text{<3.61b>}$$

Dari persamaan <3.55>diperoleh luasan integral pada bidang XY sebagai berikut

$$X\dot{Y} - \dot{X}Y = \sqrt{\mu\ a\ (1-e^2)}$$

maka $\dot{E}\ a^2\ (1-e\ \mathrm{Cos}\ E)\ \sqrt{1-\ e^2} = \sqrt{\mu\ a\ (1-e^2)}$

$$\dot{E} = \frac{\tilde{n}}{(\ 1-\ e\ \mathrm{Cos}E)}$$

$$= \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

sehingga $\dot{X} = \dfrac{\sqrt{\mu a}}{r}\ \mathrm{Sin}\ E$ <3.62a>

$$\dot{Y} = \frac{\sqrt{\mu\ a(1-e^2)}}{r}\ \mathrm{Cos}\ E$$ <3.62b>

Pada titik perigee, E =0 didapatkan

$$\dot{X}_0 = 0$$ <3.63a>

$$\dot{Y}_0 = a\tilde{n}\left[\frac{1\ +\ e}{1\ -\ e}\right]^{1/2}$$ <3.63b>

Turunan kedua dari persamaan <3.59> adalah

$$\ddot{X} = \frac{\sqrt{\mu\ a}}{r}\ \mathrm{Cos}\ E\ .\ \dot{E}$$

$$\ddot{Y} = \frac{\sqrt{\mu\ a(1-e^2)}}{r}\ \mathrm{Sin}\ E\ .\ \dot{E}$$

atau

$$\ddot{X} = \frac{a\ \tilde{n}^{\ 2}}{(\ 1-\ e\ \mathrm{Cos}E)^{\ 2}}\ \mathrm{Cos}\ E$$ <3.64a>

$$\ddot{Y} = \frac{\sqrt{\mu\ a(1-e^2)}}{r}\ \mathrm{Sin}\ E$$ <3.64b>

Pada titik perigee, E = 0 didapatkan

$$\ddot{X}_0 = - \frac{a\,\tilde{n}^2}{(1 - e)^2} \qquad \text{<3.65a>}$$

$$\ddot{Y}_0 = 0 \qquad \text{<3.65b>}$$

demikian seterusnya.

Dengan menggunakan deret Taylor diperoleh persamaan

$$X = X_0 + \dot{X}_0 (t - T) + \frac{1}{2} \ddot{X}_0 (t - T)^2 + \ldots$$

$$= a\,(1 - e) - \frac{a\,M^2}{2(1 - e)^2} + \ldots \qquad \text{<3.66a>}$$

$$Y = Y_0 + \dot{Y}_0 (t - T) + \frac{1}{2} \ddot{Y}_0 (t - T)^2 + \ldots$$

$$= a\,M \left[\frac{1 + e}{1 - e} \right]^{1/2} + \ldots \qquad \text{<3.66b>}$$

dimana $T = t_0$ adalah waktu saat satelit melintasi perigee.

Turunan X dan Y terhadap t , adalah

$$\dot{X} = - \frac{a\tilde{n}\,M}{(1-e^2)} + \ldots \qquad \text{<3.67a>}$$

$$\dot{Y} = a\tilde{n} \left[\frac{1 + e}{1 - e} \right]^{1/2} + \ldots \qquad \text{<3.67b>}$$

Dari persamaan <3.66a> sampai <3.67b> diturunkan terhadap a, e dan $\varepsilon-\tilde{\omega}$ dihasilkan bahwa :

$$\frac{\partial X}{\partial a} = (1-e) \qquad \frac{\partial X}{\partial e} = - a \qquad \frac{\partial X}{\partial(\varepsilon-\tilde{\omega})} = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial Y}{\partial e} = 0 \qquad \frac{\partial Y}{\partial(\varepsilon-\tilde{\omega})} = a\left[\frac{1+e}{1-e}\right]^{1/2} \qquad \text{<3.69>}$$

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial \dot{X}}{\partial e} = 0 \qquad \frac{\partial \dot{X}}{\partial (\varepsilon - \tilde{\omega}\ )} = - \frac{a\tilde{n}}{(1-e\ )^2}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = -\frac{1}{2}\,\tilde{n}\left[\frac{1+e}{1-e}\right] \qquad \frac{\partial Y}{\partial e} = a\tilde{n}\,\frac{[1+e]^{-1/2}}{[1-e]^{3/2}} \qquad \frac{\partial Y}{\partial (\varepsilon - \tilde{\omega}\ )} = 0$$

Dengan mudah dapat dibuktikan bahwa :

$$\left[p,q\right]^{***} = \frac{\partial\ [a,e]}{\partial\ [p,q]}\left[\frac{\partial\ [\ X,\dot{X}\ ]}{\partial\ [a,e]} + \frac{\partial\ [\ Y,\dot{Y}\ ]}{\partial\ [a,e]}\right] - \frac{\partial\ [e,\varepsilon-\tilde{\omega}\ ]}{\partial\ [p,q]}$$

$$\left[\frac{\partial\ [\ X,\dot{X}\ ]}{\partial\ [e,\varepsilon-\tilde{\omega}\ ]} + \frac{\partial\ [\ Y,\dot{Y}\ ]}{\partial\ [e,\varepsilon-\tilde{\omega}\ ]}\right] + \frac{\partial\ [\varepsilon-\tilde{\omega},a\ ]}{\partial\ [p,q]}$$

$$\left[\frac{\partial\ [\ X,\dot{X}\ ]}{\partial\ [\varepsilon-\tilde{\omega},a\ ]} + \frac{\partial\ [\ Y,\dot{Y}\ ]}{\partial\ [\varepsilon-\tilde{\omega},a\ ]}\right] \qquad \text{<3.70>}$$

substitusi dari nilai persamaan <3.69> pada <3.70>, didapatkan

$$\frac{\partial\ [\ X,\dot{X}\ ]}{\partial\ [a,e]} + \frac{\partial\ [\ Y,\dot{Y}\ ]}{\partial\ [a,e]} = 0 \qquad \text{<3.71a>}$$

$$\frac{\partial\ [\ X,\dot{X}\ ]}{\partial\ [e,\varepsilon-\tilde{\omega}\ ]} + \frac{\partial\ [\ Y,\dot{Y}\ ]}{\partial\ [e,\varepsilon-\tilde{\omega}\ ]} = 0 \qquad \text{<3.71b>}$$

$$\frac{\partial\ [\ X,\dot{X}\ ]}{\partial\ [\varepsilon-\tilde{\omega},a]} + \frac{\partial\ [\ Y,\dot{Y}\ ]}{\partial\ [\varepsilon-\tilde{\omega}\ ,a]} = \frac{1}{2}\,\mu^{1/2}\ a^{-1/2} \qquad \text{<3.71c>}$$

sehingga persamaan <3.71a> sampai <3.71c> disubstitusikan pada persamaan <3.70> menghasilkan

$$\left[p,q\right]^{***} = \frac{\partial\ [\varepsilon-\tilde{\omega},\ a\ ]}{\partial\ [p,q]}\cdot\frac{1}{2}\ \mu^{1/2}\ a^{-1/2}$$

jika dimisalkan $L = (\ \mu\ a\ )^{1/2}$ maka

$$\left[p,q \right]^{***} = \frac{\partial\ [\varepsilon-\tilde{\omega}\ ,\ L\ ]}{\partial\ [p,q]} \qquad \text{<3.72>}$$

Kombinasikan persamaan <3.57> dan persamaan <3.72> mendapatkan hasil akhir sebagai berikut:

$$\left[p,q \right] = \frac{\partial\ [\varepsilon-\tilde{\omega},\ L\ ]}{\partial\ [\ p,q\ ]} + \frac{\partial\ [\ \tilde{\omega}\ -\Omega\ ,\ \delta\ ]}{\partial\ [p,q\ ]} + \frac{\partial\ [\ \Omega,H\ ]}{\partial\ [p,q]} \qquad \text{<3.73>}$$

Dari uraian diatas diperoleh himpunan- himpunan dari Lagrange's brackets ,yaitu:

$$L = (\ \mu\ a\ )^{1/2} \qquad \delta = L\sqrt{(1-e^2)} \qquad H = \delta\ \text{Cos I}$$

dengan mengambil $\tilde{n}a^2$ untuk $(\mu\ a)^{1/2}$ dan na untuk $\mu^{1/2}\ a^{-1/2}$ dan L, δ dan H diturunkan secara parsial, diperoleh

$$\left.\begin{aligned}
&L_a = \frac{1}{2}\tilde{n}a && \delta_a = \frac{1}{2}\tilde{n}a\sqrt{(1-e^2)} \\
&L_e = 0 && \delta_e = -\tilde{n}a^2 e(1-e^2)^{-1/2} \\
&L_I = 0 && \delta_I = 0 \\
&H_a = \frac{1}{2}\tilde{n}a\sqrt{(1-e^2)}\ \text{CosI} \\
&H_e = -\tilde{n}a^2 e\ (1-e^2)^{-1/2}\ \ \text{CosI} \\
&H_I = -\tilde{n}a^2\sqrt{(1-e^2)}\ \text{SinI}
\end{aligned}\right] \qquad \text{<3.74>}$$

Dari persamaan <3.73> dengan menggunakan persamaan <3.74> diperoleh hasil sebagai berikut:

$$[\varepsilon,a] = -\ [a,\varepsilon] = \frac{1}{2}\tilde{n}a \qquad \text{<3.75a>}$$

$$[\tilde{\omega},a] = -\ [a,\tilde{\omega}] = -\frac{1}{2}\tilde{n}a\left[\ 1-(1-e^2)^{1/2}\ \right] \qquad \text{<3.75b>}$$

$$[\Omega,a] = -\ [a,\Omega] = -\frac{1}{2}\tilde{n}a\sqrt{1-e^2}\ \ (1-\ \text{Cos I}) \qquad \text{<3.75c>}$$

$$[\tilde{\omega},e] = -\ [\tilde{e},\omega\ ] = -\tilde{n}a^2\ (1-e^2)^{-1/2} \qquad \text{<3.75d>}$$

$$[\Omega,e] = -[e,\Omega] = \tilde{n}a^2 \; (1-e^2)^{-1/2} \; (1-\mathrm{Cos} I) \qquad \text{<3.75e>}$$

$$[\Omega,I] = -[I,\Omega] = -\tilde{n}a^2\sqrt{1-e^2} \; \mathrm{Sin}\ I \qquad \text{<3.75f>}$$

Semua Lagrange,s brackets yang lain berharga nol. Persamaan <3.75a> samapi <3.75f> disubstitusikan ke persamaan <3.33a>sampai <3.33f> dengan mengganti $c_1 = \varepsilon$, $c_2 = \tilde{\omega}$, $c_3 = \Omega$, $c_4 = a$, $c_5 = e$,dan $c_6 = I$,menhasilkan persamaan -persamaan sebagai berikut yang disebut *persamaan differensial Planetary Lagrange.*

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{\tilde{n}a}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \qquad \text{<3.76a>}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\tilde{n}a^2 e}\left[1-\sqrt{1-e^2}\right]\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{\tilde{n}a^2\ e}\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} \qquad \text{<3.76b>}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\mathrm{tg}\ (1/2\ I}{\tilde{n}a^2\sqrt{1-e}}\left[\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}\right] - \frac{1}{\tilde{n}a^2\sqrt{1-e}\ \mathrm{Sin}\ I}\frac{\partial R}{\partial \Omega} \qquad \text{<3.76c>}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\tilde{n}a^2\sqrt{1-e^2}\ \mathrm{Sin}\ I}\frac{\partial R}{\partial I} \qquad \text{<3.76d>}$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\tilde{n}a^2\ e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\mathrm{tg}\ (1/2)\ I}{\tilde{n}a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial I} \qquad \text{<3.76e>}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{\tilde{n}a}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}\left[1-\sqrt{1-e^2}\right]}{\tilde{n}a^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\mathrm{tg}\ (1/2)\ I}{\tilde{n}a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial I} \qquad \text{<3.76f>}$$

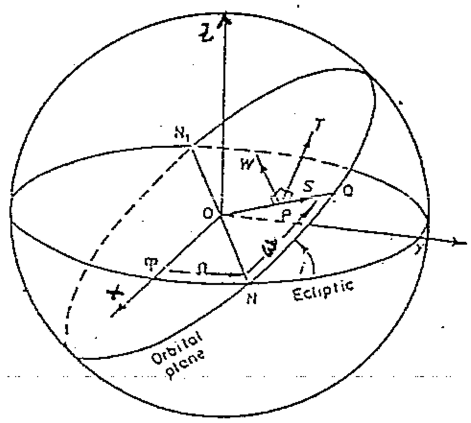
3.4 Penyelesaian Dari Fungsi Gangguan

Untuk beberapa aplikasi, persamaan differensial *Planetary Lagrange* dinyatakan dalam bentuk yang memberikan kemungkinan lebih baik untuk perhitungan numerik.

Untuk tujuan tersebut di atas fungsi gangguan - *R* diuraikan menjadi tiga komponen yang saling tegak lurus pada bidang orbital. Ketiga komponen itu adalah :

1. **S** yaitu komponen *radial* dengan arah menuju ke satelit dalam radius vektor.
2. **T** yaitu komponen *tranversal* pada bidang orbit, tegak lurus dengan S, dengan arah searah dengan kecepatan satelit.
3. **W** adalah komponen yang *tegak lurus dengan bidang orbit*, dengan arah positif apabila gerak orbit berlawanan arah jarum jam demikian sebaliknya.

Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 3.3.Komponen -komponen **S**,**T** dan **W** pada bidang orbital

Definisi 3.4.1

Misalnya r adalah radius vektor, ψ *longitude* dari orbit dihitung dari sebuah titik permulaan, z adalah koordinat yang tegak lurus pada bidang orbital, positif selama arah **W** positif.maka dapat dibentuk suatu relasi

$$S = \frac{\partial R}{\partial r}, \quad T = \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \psi}, \quad W = \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (3.77)$$

Misalnya **c** adalah salah satu elemen/parameter sebarang dari orbit satelit, maka diperoleh

$$\frac{\partial R}{\partial c} = \frac{\partial R}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial c} + \frac{\partial R}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial c} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c} \qquad (3.78)$$

Agar diperoleh pernyataan untuk $\frac{\partial R}{\partial c}$ dalam suku-suku **S**,**T** dan **W** maka diperlukan suatu pernyataan untuk turunan parsial dari r, ψ dan z dalam gerak ellips terhadap parameter-parameternya.

Dari persamaan r = a(1 - e Cos E), didapatkan

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a} \qquad (3.79)$$

dan persamaan Kepler M = E - e Sin E, diturunkan terhadap e

$$0 = -\text{Sin } E + (1 - e \text{ Cos } E)\frac{\partial E}{\partial e}$$

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a \text{ Cos } E + ae \text{ Sin } E \frac{\partial E}{\partial e}$$

dengan mengeliminasikan $\frac{\partial E}{\partial e}$ dari kedua persamaan di atas diperoleh

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a\frac{\text{Cos } E - e}{1 - e \text{ Cos } E} \qquad (3.80)$$

Dari persamaan normal orbit $r = \dfrac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$ diperoleh

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

maka $$\frac{\partial r}{\partial e} = -a \cdot \cos f \tag{3.81}$$

Untuk $\dfrac{\partial r}{\partial \varepsilon} = \dfrac{\partial r}{\partial t} \dfrac{\partial t}{\partial M} \dfrac{\partial M}{\partial \varepsilon}$, dengan $M = \tilde{n}t + \varepsilon - \tilde{\omega}$ maka

didapatkan :

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\tilde{n}} \frac{\partial r}{\partial t} .$$

Dari persamaan (2.45) diperoleh

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = \sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2} \, \frac{a}{r} .$$

atau $$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = \frac{ae}{\sqrt{1 - e^2}} \sin f$$ <3.82>

dan untuk $$\frac{\partial r}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \tilde{\omega}}$$

$$= -\frac{1}{\tilde{n}} \frac{\partial r}{\partial t}$$

sehingga $$\frac{\partial r}{\partial \tilde{\omega}} = -\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}$$ <3.83>

Dari $\cos f = \dfrac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$ diperoleh

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

atau $$\frac{dE}{\sin E} = \frac{df}{\sin f} - \frac{de}{1 - e^2}$$

Padahal $\dfrac{dE}{\sin E} = \dfrac{a}{r}$ de dan karena f dan ψ adalah dua vektor yang mempunyai arah sama dengan f (*true anomaly*) maka dengan demikian f identik dengan ψ, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial\psi}{\partial e} = \left\{ \frac{a}{r} + \frac{1}{1 - e^2} \right\} \text{Sin } f \qquad <3.84>$$

Untuk $\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial\psi}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial\varepsilon}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} = \frac{a^2\sqrt{1 - e^2}}{r^2} \qquad <3.85>$$

dan $\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\omega}} = 1 - \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\omega}} = 1 - \frac{a^2\sqrt{1 - e^2}}{r^2} \qquad <3.86>$$

Dari vektor-vektor ψ, f dan $\bar{r}$ deperoleh hubungan $d\psi = df + d\bar{r}$ dan dari persamaan <2.58c> didaptkan

$$d\psi = df + d\tilde{\omega} + \text{Cos I d } \Omega$$

$$d\psi = df + d\tilde{\omega} - (1 - \text{Cos I }) \text{ d } \Omega$$

Sehingga $\frac{\partial\ \psi}{\partial\ \Omega} = -1 + \text{Cos I}$ <3.87>

Dengan mengeliminasikan persamaan <2.58a> dan <2.58b> untuk $\bar{z} = \bar{x}\ x\ \bar{y}$ untuk $\bar{x}$ = r Cos f dan $\bar{y}$ = r Sin f dihasilkan :

$$d\bar{z} = r \text{ Sin } (\omega + f)dI - r \text{ Sin I Cos } (\omega + f) \ d\Omega$$

maka diperoleh

$$\frac{\partial\bar{z}}{\partial I} = r \text{ Sin } (\omega + f) \qquad <3.88>$$

$$\frac{\partial\bar{z}}{\partial\Omega} = -r \text{ Sin I Cos } (\omega + f) \qquad <3.89>$$

sedangkan untuk harga-harga yang lainnya dihasilkan nol.

Dengan mensubtitusikan persamaan <3.79> sampai dengan persamaan <3.89> ke dalam persamaan <3.78> dan c diganti dengan elemen-elemen orbital , yaitu $a, e, I, \Omega, \tilde{\omega}, \varepsilon$ sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{r}{a}\frac{\partial R}{\partial r} \qquad \text{<3.90a>}$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = -a \cos f \frac{\partial R}{\partial r} + \left\{ \frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2} \right\} \sin f \frac{\partial R}{\partial \psi} \qquad \text{<3.90b>}$$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = r \sin (\omega + f) \frac{\partial R}{\partial z} \qquad \text{<3.90c>}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} \sin f \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2} \frac{\partial R}{\partial \psi} \qquad \text{<3.90d>}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} \sin f \frac{\partial R}{\partial r} + \left[1 - \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2} \right] \frac{\partial R}{\partial \psi} \qquad \text{<3.90e>}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = -r \sin I \cos(\omega + f) \frac{\partial R}{\partial z} - 2 \sin^2 (1/2) I \frac{\partial R}{\partial \psi} \qquad \text{<3.90f>}$$

Kemudian persamaan <3.90a> sampai <3.90f> disubstitusikan ke persamaan <3.76a> sampai<3.76f>, sehingga dihasilkan persamaan differensial *Planetary Lagrange untuk gangguan benda ketiga* adalah sebagai berikut:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} \left[\mathbf{S}\, e \sin f + \frac{a(1-e^2)}{r^2} \mathbf{T} \right] \qquad \text{<3.91a>}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\tilde{n}a} \left[\mathbf{S} \sin f + \mathbf{T} \left\{ \frac{1}{e} \left[\frac{a(1-e^2)}{r} - \frac{r}{a} \right] \right\} \right] \qquad \text{<3.91b>}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathbf{W}\, r}{\tilde{n}a^2 \sqrt{1-e^2}} \cos(\omega + f) \qquad \text{<3.91c>}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{W\ r\ \mathrm{Cos}\ (\omega + f\ )}{\tilde{n}a^2\sqrt{1-e^2}\ \mathrm{Sin}\ I} \qquad \text{<3.91d>}$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{e\sqrt{\mu}}\left[-\ S\ \mathrm{Cos}\ f + T\left\{\frac{r}{a(1-e^2)} + 1\right\}\mathrm{Sin}\ f\ \right]$$

$$+\ 2\frac{d\Omega}{dt}\ \mathrm{Sin}\ ^2(1/2)I \qquad \text{<3.91e>}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\ \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + 2\sqrt{1-e^2}\ \frac{d\Omega}{dt}\ \mathrm{Sin}^2(1/2)I - \frac{2r}{\sqrt{\mu a}}\ S \qquad \text{<3.91f>}$$

3.5 Menentukan Komponen -Komponen Radial(S),Transversal(T) Dan Tegak Lurus(W) Pada Bidang Orbit

Definisi 3.5.1

Misalkan cosinus arah - cosinus arah dari **S**,**T** dan **W** adalah (l_S, m_S, n_S), (l_T, m_T, n_T) dan (l_W, m_W, n_W) terhadap ox,oy dan oz didapatkan relasi sebagai berikut :

$$\frac{\partial R}{\partial x} = l_S\ S + l_T\ T + l_W\ W \qquad \text{<3.92a>}$$

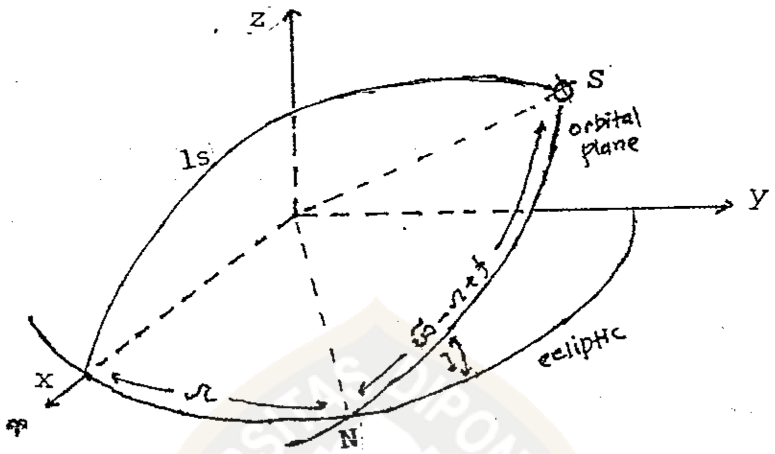
$$\frac{\partial R}{\partial y} = m_S\ S + m_T\ T + m_W\ W \qquad \text{<3.92b>}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = n_S\ S + n_T\ T + n_W\ W \qquad \text{<3.92c>}$$

dimana $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$ dan $\frac{\partial R}{\partial z}$ turunan dari fungsi gangguan terhadap x,y dan z (terlihat dalam persamaan <2.61a> sampai <2.61c>).

Untuk mencari harga dari cosinus arah- cosinus arah dari **S**, **T** dan **W** dengan cara sebagai berikut.

Perhatikan gambar dibawah ini !.



Gambar 3.4 Segitiga Bola x**SN**

Dari gambar diatas terlihat segitiga bola xSN .

Menurut persamaan <2.40> diperoleh

$$l_S = \text{Cos}\Omega\ \text{Cos}(\tilde{\omega} -\Omega+f) + \text{Sin}\ \Omega\ \text{SWin}(\tilde{\omega} -\Omega+f)\ \cos(180-I)$$

atau

$$l_S=\text{Cos}\Omega\ \text{Cos}(\tilde{\omega}-\Omega+f)-\text{Sin}\Omega\ \text{Sin}(\tilde{\omega}-\Omega+f)\ \text{Cos}I \qquad <3.93>$$

Dengan cara yang sama untuk mendapatkan persamaan <3.93> dihasilkan harga dari cosinus arah S,T dan W dalam parameter- parameter otbit satelit,yaitu:

$$l_S = \text{Cos}\ \Omega\ \text{Cos}(\tilde{\omega}-\Omega+f) - \text{Sin}\ \Omega\ \tilde{\text{Sin}}(\omega-\Omega+f)\ \text{Cos}\ I \qquad <3.94a>$$

$$m_S = \text{Sin}\ \Omega\ \text{Cos}(\tilde{w}-\Omega+f) + \text{Cos}\ \Omega\ \text{Sin}(\tilde{\omega}-\Omega+f)\ \text{Cos}\ I \qquad <3.94b>$$

$$n_S = \text{Sin}\ (\tilde{\omega}-\Omega+f)\ \text{Sin}\ I \qquad <3.94c>$$

$$l_T = -\text{Cos}\ \Omega\ \text{Sin}(\tilde{\omega}-\Omega+f) - \text{Sin}\ \Omega\ \text{Cos}(\tilde{\omega}-\Omega+f)\ \text{Cos}\ I \qquad <3.94d>$$

$$m_T = -\text{Sin}\ \Omega\ \text{Sin}(\tilde{\omega}-\Omega+f) + \text{Cos}\ \Omega\ \text{Cos}(\tilde{\omega}-\Omega+f)\ \text{Cos}\ I \qquad <3.94e>$$

$$n_T = \text{Cos}\ (\tilde{\omega}-\Omega+f)\ \text{Sin}\ I \qquad <3.94f>$$

$$l_W = \text{Sin}\ \Omega\ \text{Sin}\ I \qquad <3.94g>$$

m_W = -Cos Ω Sin I <3.94h>

n_W = Cos I <3.94i>

Analog pada persamaan <2.37a> dan <2.37b> ,maka dari persamaan <3.92a>sampai <3.92c> dapat disimpilkan bahwa harga dari S, T dan W sebagai berikut:

$$S = l_S \frac{\partial R}{\partial x} + m_S \frac{\partial R}{\partial y} + n_S \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{<3.95a>}$$

$$T = l_T \frac{\partial R}{\partial x} + m_T \frac{\partial R}{\partial y} + n_T \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{<3.95b>}$$

$$W = l_W \frac{\partial R}{\partial x} + m_W \frac{\partial R}{\partial y} + n_W \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{<3.95c>}$$

Oleh karena itu harga **S**, **T** dan **W** bisa dihitung pada setiap waktu tertentu bila parameter-parameter orbit dan posisi dari satelit P serta benda pengganggu P_1 diketahui.