BAB II

MATERI PENUNJANG

## 2.1 Pengertian Persamaan Differensial

Definisi 2.1.1

Persamaan differensial adalah satu atau beberapa turunan dari suatu persamaan yang memuat hubungan antara nilai-nilai suatu fungsi yang tidak diketahui.

Definisi 2.1.2

Orde dari suatu persamaan differensial adalah turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan differensial tersebut.

Contoh 2.1.1

Persamaan differensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2p\,\frac{dy}{dx} + y = 2 + 4x \qquad \text{<2.1>}$$

adalah sebuah persamaan orde dua dan disebut persamaan differensial orde kedua.

Definisi 2.1.3

Secara umum persamaan

$$F\ (x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0 \qquad \text{<2.2>}$$

disebut persamaan differensial biasa orde n, dengan batasan bahwa fungsi F dapat diselesaikan secara eksplisit untuk $\frac{d^my}{dx^m}$ dalam suku n + 1 varibel yaitu x, y, $\frac{dy}{dx}$, ... $\frac{d^n y}{dx^n}$ dan diperoleh

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) \qquad <2.3>$$

Contoh 2.1.2

Kita buktikan bahwa $y = c_1 \text{Cos } x + c_2 \text{ Sin } x$ adalah solusi dari persamaan

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0 \qquad <2.4>$$

Kita turunkan persamaan $y = c_1 \text{Cos } x + c_2 \text{ Sin } x$ terhadap x, maka diperoleh

$$y = c_1 \text{Cos } x + c_2 \text{ Sin } x \qquad <i>$$

$$\frac{dy}{dx} = - c_1 \text{Sin } x + c_2 \text{ Cos } x \qquad <ii>$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - c_1 \text{Cos } x - c_2 \text{ Sin } x \qquad <iii>$$

Kemudian persamaan <i> dan <iii> disubstitusikan ke persamaan <2.4> dihasilkan

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = - c_1 \text{Cos } x - c_2 \text{ Sin } x + c_1 \text{Cos } x + c_2 \text{Sin } x$$
$$= 0$$

Terbukti !

Definisi 2.1.4

Bentuk umum persamaan differensial orde-n adalah

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_n(x)\, y = R(x) \qquad <2.5>$$

dimana $R(x)$ dan $a_j(x)$ adalah independent dari variabel y, $j = 0,1,2,\ldots, n$ atau sering disebut persamaan differensial linier orde-n.

Definisi 2.1.5

Jika $R(x)$ dari persamaan <2.5> berharga nol dikatakan persamaan differensial homogen, tetapi jika $R(x) \neq 0$ disebut persamaan differensial non homogen.

## 2.2 Metode Variasi Parameter

Jika $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ fungsi komplemen dari

$$p_0 \frac{d^2y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = R(x) \qquad \text{<2.6>}$$

dengan $p_0 \neq 0$ dan $c_1$, $c_2$, $p_0$, $p_1$, $p_2$ adalah konstanta dimana $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ adalah solusi independent pada persamaan differensial homogen dari persamaan <2.6>, yaitu

$$p_0 \frac{d^2y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0 \qquad \text{<2.7>}$$

maka dengan mengambil bentuk

$$y = L_1(x) y_1(x) + L_2(x) y_2(x) \qquad \text{<2.8>}$$

dengan syarat

$$y = L_1'(x) y_1(x) + L_2'(x) y_2(x) \qquad \text{<2.9>}$$

kemudian dengan mensubstitusikan turunan dari persamaan <2.8> dan juga persamaan <2.7> dan

<2.9> ke dalam persamaan <2.6> dihasilkan

$$L_1'(x)y_1'(x) + L_2'(x)\ y_2'(x) = \frac{R(x)}{p_0} \qquad <2.10>$$

Dengan menyelesaikan persamaan <2.9> dan <2.10> akan diperoleh penyelesaian khusus dari persamaan <2.6>.

Contoh 2.2.1

Persamaan differensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2} \qquad <2.11>$$

mempunyai fungsi komplemen $y = c_1 e^{3x} + c_2 x\ e^{3x}$ dengan $c_1$ dan $c_2$ konstanta maka diambil

$$y = L_1(x)\ e^{3x} + L_2(x)\ x\ e^{3x} \qquad <2.12>$$

dan $e^{3x}$ dan $x\ e^{3x}$ adalah solusi independent dari persamaan

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0 \qquad <2.13>$$

Kemudian persamaan <2.12> diturunkan terhadap x dihasilkan

$$\frac{dy}{dx} = \left[3L_1(x) + L_2(x)\right]e^{3x} + 3L_2(x)x\ e^{3x}$$

$$+\left[L_1'(x)e^{3x} + L_2'(x)xe^{3x}\right] \qquad <2.14>$$

dengan syarat pada perssamaan <2.9>diambil

$$L_1'(x)e^{3x} + L_2'(x)xe^{3x} = 0 \qquad <2.15>$$

dari persamaan <2.14> diturunkan lagi, diperoleh

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[9L_1(x) + 6L_2(x)\right]e^{3x} + 9L_2(x)\ xe^{3x} +$$

$$\left[3L_1'(x) + L_2'(x)\right] e^{3x} + 3L_2'(x)xe^{3x} \quad <2.16>$$

Kemudian persamaan <2.12> sampai <2.16> disubstitusikan ke persamaan <2.11> dihasilkan

$$\left[3L_1'(x) + L_2'(x)\right]e^{3x} + 3L_2'(x)\ x\ e^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2} \quad <2.17>$$

Setelah persamaan <2.15> dan <2.17> diselesaikan dengan eliminasi dihasilkan $L_1(x) = -\ln x$ dan $L_2(x) = {}^1/x$ jadi penyelesaian khusus dari persamaan <2.11> adalah

$$y = L_1(x)e^{3x} + L_2(x)\ x\ e^{3x} = -\ e^{3x}\ln x - e^{3x}$$

dan penyelesaian umum dari persamaan <2.11> adalah

$$y = c_1e^{3x} + c_2x\ e^{3x} - e^{3x}\ (\ln x + 1)$$

## 2.3 Metode Newton

Andaikan $x_0$ merupakan suatu harga pendekatan awal dari persamaan $f(x) = 0$ dan $\partial n$ merupakan faktor koreksi yang dipakai untuk $x_0$, maka harga sebenarnya

$$x = x_0 + \partial n \quad <2.18>$$

Persamaan $f(x) = 0$ berubah menjadi $f(x_0 + \partial n) = 0$
Dengan deret Taylor, didapatkan :

$$f(x_0+\partial n) = f(x_0) + \partial n\, f'(x_0) + \frac{\partial n^2}{2} f''(x_0) + \frac{\partial n^3}{6} f'''(x_0) + \ldots \quad \text{<2.19>}$$

Langkah pertama, jika $\partial n$ relatif kecil maka suku yang memuat $\partial n^2$ dan seterusnya pada persamaan <2.19> dapat diabaikan, sehingga diperoleh

$$f(x_0) + \partial n_1\, f'(x_0) = 0 \quad \text{<2.20>}$$

atau

$$(\partial n_1)_1 = \partial n_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{<2.21>}$$

Untuk ketelitian yang lebih tinggi $\partial n_1$ disubstitusikan pada persamaan <2.19> dengan suku yang memuat $\partial n^3$ dan seterusnya diabaikan, maka diperoleh

$$(\partial n_2)_1 = \partial n_2 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0) + (1/2)\, \partial n_1\, f''(x_0)} \ldots$$

$$\ldots \quad \text{<2.22>}$$

dan selanjutnya $\partial n_2$ disubtitusikan pada persamaan <2.19> dengan $\partial n^4$ dan seterusnya diabaikan, maka didapatkan

$$(\partial n_3)_1 = \partial n_3 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0) + (1/2)\, \partial n_2\, f''(x_0) + (1/6)\, (\partial n_2)^2 f'''(x_0)} \quad \text{<2.23>}$$

sehingga diperoleh harga untuk x adalah sebagai berikut

$$x_1 = x_0 + (\partial n_3)_1 \qquad \text{<2.24>}$$

Analog dengan langkah pertama , dengan mengganti $x_0$ dengan $x_1$, pada langkah kedua didapatkan

$$x_2 = x_1 + (\partial n_3)_1 \qquad \text{<2.25>}$$

Demikian seterusnya sampai n+1 langkah atau $\partial n_3$ sangat mendekati nol, dan diperoleh hasil akhir untuk x yaitu

$$x_{n+1} = x_n + (\partial n_3)_{n+1} \qquad \text{<2.26>}$$

Contoh 2.3.1

Tentukan akar riil dari

$$2x - \text{Sin}x = 7 \qquad \text{<2.27>}$$

dengan $x_0 = 3,5$.

Untuk menyelesaikan soal diatas dibentuk persamaan sebagai berikut:

$$f(x) \equiv 2x - \text{Sin } x - 7 = 0 \qquad \text{<2.28>}$$

kemudian persamaan <2.28> diturunkan terhadap x diperoleh :

$$f'(x) = 2 - \cos x \qquad \text{<2.29a>}$$

$$f''(x) = \text{Sin } x \qquad \text{<2.29b>}$$

$$f'''(x) = \text{Cos } x \qquad \text{<2.29c>}$$

Untuk langkah pertama, dengan menggantim x dengan $x_0 = 3,5$ pada persamaan (2.28> sampai dengan <2.29c> dan menurut persamaan <2.21> sampai <2.23>dihasilkan :

$$(\partial n_1)_1 = -\frac{2\ .\ 3,5\ -\ \sin\ (3,5)\ -\ 7}{2\ -\ \cos\ (3,5)}$$

$$= \quad 0,060934884$$

$$(\partial n_2)_1 = -\frac{2\ .\ 3,5\ -\ \sin\ (3,5)\ -\ 7}{2\ -\ \cos\ (3,5) + (1/2).0,06093884\ \sin(3,5)}$$

$$= 0,060821966$$

$$(\partial n_3)_1 = -\frac{2\ .\ 3,5\ -\ \sin\ (3,5)\ -\ 7}{2\ -\ \cos\ (3,5) + (1/2).0,06082196\ \sin(3,5) + (1/6)\ (0,06082196)^2\ \cos\ (3,5)}$$

$$= 0,60784907$$

Sehingga diperoleh

$$x_1 \ = x_0 + (\partial n_3)_1 \ = 3,560784907$$

Untuk langkah kedua dengan mengganti $x_0$ pada langkah pertama dengan $x_1$, demikian seterusnya sampai diperoleh harga x yaitu ≈ 3,530792479.

## 2.4 Metode RUNGE-KUTTA Orde Keempat

Definisi 2.4.1

Metode Runge-Kutta merupakan suatu metode penyelesaian persamaan differensial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{<2.30>}$$

Pendekatan-pendekatan metode Runge-Kutta dari orde kedua,ketiga dan keempat menentukan perkiraan dari f(x,y) pada dua, tiga atau empat nilai x pada selang $x_m \le x \le x_{m+1}$. Semua metode Runge-Kutta mempunyai bentuk umum yaitu

$$y_{m+1} = y_m + h\ \theta\ (\ x_m,\ y_m,\ h\ ) \qquad \text{<2.31>}$$

dengan $\theta$ adalah penyederhanaan suatu fungsi pendekatan yang dipilih untuk f(x,y) pada selang $x_m \le x \le x_{m+1}$ dan $h = x_{m+1} - x_m$.

Definisi 2.4.2

Bentuk umum rumus metode Runge-Kutta orde keempat adalah

$$y_{m+1} = y_m + (h/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \text{<2.32>}$$

dengan $k_1, k_2, k_3$ dan $k_4$ adalah suatu fungsi perkiraan dari f(x,y) yang dihitung pada selang $x_m \le x \le x_{m+1}$ dengan

$$k_1 = f(x_m, y_m) \quad \text{<2.33a>}$$

$$k_2 = f(x_m + (1/2)\,h,\ y_m + (1/2)\,h\,k_1) \quad \text{<2.33b>}$$

$$k_3 = f(x_m + (1/2)\,h,\ y_m + (1/2)\,h\,k_2) \quad \text{<2.33c>}$$

$$k_4 = f(x_m + h,\ y_m + h\,k_3) \quad \text{<2.33d>}$$

Contoh 2.4.1

Selesaikan persamaan differensial orde kesatu dibawah ini dengan y(0) = 1 dan h = 0,5 pada interval 0 « x « 1.

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2 \quad \text{<2.34>}$$

Menurut persamaan <2.33a> sampai <2.33d> untuk $x_1 = 0,5$ dan y(0) = 1 adalah

$$k_1 = -2x_0 y_0^{\,2} = 0$$

$$k_2 = -2.(x_0 + (1/2)\,h)(y_0 + 1/2\,h\,k_1)^2$$

$$= -0,5$$

$$k_3 = -2.(x_0 + 1/2\,h)(y_0 + 1/2\,h\,k_2)^2$$

$$= -1,2578125$$

$$k_4 = -2\ (x_0 + 1/2\ h)(y_0 + 1/2\ hk_3\ )^2$$
$$= -0,137710571$$

maka $y(0,5) = y_0 + h/6\ (k_1 + 2\ k_2 + 2\ k_3 + k_4)$

$$= -3,653355$$

Untuk $x_2 = 1$ maka $x_1 = 0,5$ dan $y_1 = y_{0,5} = -3,653355$

dan $k_1 = -2x_1 y_1^{\ 2} = 3,6533745$

$$k_2 = -2.(x_1 + (1/2)\ h)(y_1 + 1/2\ h\ k_1)^2$$
$$= -\ 4,1100474$$
$$k_3 = -2.(x_1 + 1/2\ h\ )\ (y_1 + 1/2\ \ h\ k_2)^2$$
$$= 7,02133085$$
$$k_4 = -2\ (x_1 + 1/2\ h)(y_1 + 1/2\ hk_3\ )^2$$
$$= 0,2854202$$

maka $y(1) = y_{0,5} + h/6\ (k_1 + 2\ k_2 + 2\ k_3 + k_4)$

$$= -2,8399287$$

## 2.5 Lagrange's brackets

Definisi 2.5.1

Jika u dan v adalah dua fungsi yang dapat digeneralisasikan pada sistem koordinat x, y dan z dapat dinyatakan dalam bentuk

$$[u,v] = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \dot{x}}{\partial v} - \frac{\partial x}{\delta v}\frac{\partial \dot{x}}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \dot{y}}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial \dot{y}}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \dot{z}}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \dot{z}}{\partial u} \qquad \text{<2.35>}$$

disebut bentuk *Lagrange's brackets* dari fungsi u dan v dalam sistem koordinat xyz.

## 2.6 Rotasi Matrik

Definisi 2.6.1

Cosinus arah dari suatu sudut adalah besarnya cosinus sudut tersebut.

Definisi 2.6.2

Jika $[ix_1, iy_1, iz_1]$ dan $[ix_2, iy_2, iz_2]$ adalah dua himpunan unit vektor yang orthogonal parallel terhadap sumbu-sumbu koordinat x, y dan z dapat ditulis.

$$ix_2 = l_1 ix_1 + m_1 iy_1 + n_1 iz_1 \quad \text{<2.36a>}$$

$$iy_2 = l_2 ix_1 + m_2 iy_1 + n_2 iz_1 \quad \text{<2.36b>}$$

$$iz_2 = l_3 ix_1 + m_3 iy_1 + n_3 iz_1 \quad \text{<2.36c>}$$

dengan $l_j$, $m_j$, $n_j$ dan j = 1,2,3 disebut Cosinus arah yang ditentukan oleh salah satu sumbu dengan sumbu lainnya.

Definisi 2.6.3

Untuk memperoleh sebarang koordinat dalam sebuah sistem pada suku-suku yang lain, diambil perkalian skalar dari identitas persamaan <2.36a>sampai <2.36c> dengan unit vektor. Dalam cara ini kita peroleh dua himpunan dari tiga persamaan linier yang ditulis dalam bentuk matrik

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = R_{xyz} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad \text{<2.37a>}$$

$$\text{atau} \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = R_{xyz}{}^{T} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \qquad \langle 2.37b \rangle$$

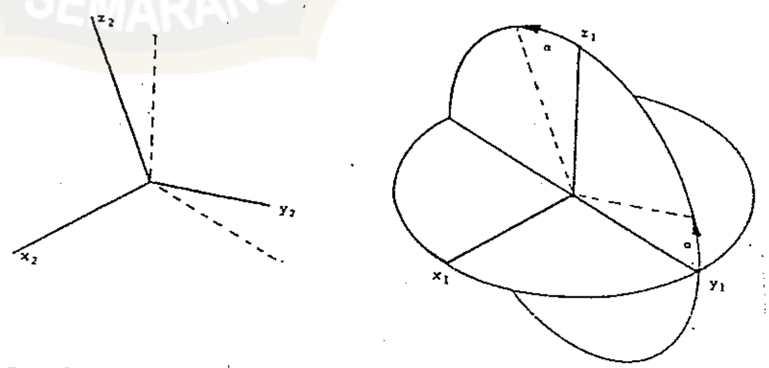
dengan $R_{xyz}$ disebut rotasi matrik pada sistem koordinat xyz

$$R_{xyz} = \begin{bmatrix} ix_1 ix_2 & ix_1 iy_2 & ix_1 ix_2 \\ iy_1 ix_2 & iy_1 iy_2 & iy_1 ix_2 \\ iz_1 ix_2 & iz_1 iy_2 & iz_1 ix_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \qquad \langle 2.38 \rangle$$

Contoh 2.6.1

Misalkan sebuah rotasi positip dari sistem koordinat $x_1$, $y_1$, $z_1$ ke $x_2$, $y_2$, $z_2$ dengan sudut $\alpha$ di sekitar sumbu $x_1$ ditunjukkan oleh gambar di bawah ini :




Frame 1 rotates α about $x_1$ to align with frame 2

Gambar 2.1 Rotasi disekitar sumbu x dengan sudut $\alpha$

Dari persamaan <2.38> diperoleh suku-suku $R_{xyz}$ sebagai berikut :

$ix_1 ix_2 = \text{Cos}\,0 = 1$ $\qquad ix_1 iy_2 = \text{Cos}\,\frac{\pi}{2} = 0$

$ix_1 iz_2 = \text{Cos}\,\frac{\pi}{2} = 0$ $\qquad iy_1 ix_2 = \text{Cos}\,\frac{\pi}{2} = 0$

$iy_1 iy_2 = \text{Cos}\,\alpha$ $\qquad iy_1 iz_2 = \text{Cos}\,(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\text{Sin}\,\alpha$

$iz_1 ix_2 = \text{Cos}\,\frac{\pi}{2} = 0$ $\qquad iz_1 iy_2 = \text{Cos}\,(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\,\alpha$

$iz_1 iz_2 = \text{Cos}\,\alpha$

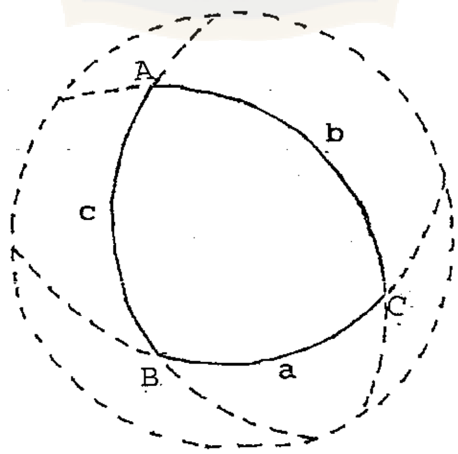
Jadi diperoleh

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}\alpha & -\text{Sin}\alpha \\ 0 & \text{Sin}\alpha & \text{Cos}\alpha \end{bmatrix} \qquad \text{<2.39>}$$

## 2.7 Segitiga Bola

Definisi 2.7.1

Segitiga bola adalah segitiga pada permukaan bola yang sisinya-sisinya dibentuk oleh tiga buah lingkaran bola yang sepusat.




Gambar 2.2 Segitiga bola ABC

Definisi 2.7.2

Hukum-hukum Cosinus untuk sisi-sisi dari segitiga bola adalah

$$\text{Cos } \mathbf{a} = \text{Cos } \mathbf{b} \text{ Cos } \mathbf{c} + \text{Sin } \mathbf{b} \text{ Sin } \mathbf{c} \text{ Cos } \mathbf{A} \quad \langle 2.40a\rangle$$

$$\text{Cos } \mathbf{b} = \text{Cos } \mathbf{c} \text{ Cos } \mathbf{a} + \text{Sin } \mathbf{c} \text{ Sin } \mathbf{a} \text{ Cos } \mathbf{B} \quad \langle 2.40b\rangle$$

$$\text{Cos } \mathbf{c} = \text{Cos } \mathbf{b} \text{ Cos } \mathbf{a} + \text{Sin } \mathbf{b} \text{ Sin } \mathbf{a} \text{ Cos } \mathbf{C} \quad \langle 2.40c\rangle$$

## 2.8 Persamaan Normal Orbit Satelit

Definisi 2.8.1

Dengan mengkombinasikan hukum kedua Newton dan hukum gravitasi, akan diperoleh persamaan yang menyatakan vektor percepatan satelit

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + (\mu r^{-3})\ \bar{r} = 0 \quad \langle 2.41\rangle$$

Persamaan <2.41> disebut juga persamaan gerak dua benda (titik massa)didalam ruang.

Definisi 2.8.2

Solusi persamaan gerak dua benda tersebut merupakan persamaan irisan kerucut <dalam bentuk polar>, yaitu:

$$r = \frac{a\ (1 - e^2)}{1 + e \text{ Cos } f} \quad \langle 2.42\rangle$$

Parameter r menyatakan posisi satelit dalam orbit dua benda, sedang yang lainnya

a = setengah sumbu panjang

e = *eksentrisitas* ( faktor kepipihan ellips)

$f$ = anomali benar (*true anomaly*)

Definisi 2.8.3

Persamaan gerak relatif dari titik massa $m_b$ terhadap $m_a$ dalam ruang dapat dinyatakan dalam koordinat kartesius sebagai berikut :

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3} \quad , \quad \ddot{y} = -\mu \frac{y}{r^3} \quad , \quad \ddot{z} = -\mu \frac{z}{r^3} \qquad \text{<2.43>}$$

Theorema 2.1

Integral luas dalam bidang xy dapat dirumuskan dalam eleman orbital sebagai berikut.

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \sqrt{\mu a\ (1 - e^2)} \qquad \text{<2.44>}$$

dan turunan dari r yang menyatakan kecepatan satelit adalah

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\tilde{n}a}{r} \quad \sqrt{a^2e^2 - (r - a)^2} \qquad \text{<2.45>}$$

dengan $\tilde{n} = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}}$ atau kecepatan sudut

Bukti 2.1

Misalkan $x = r \text{ Cos } \psi$ dan $z = r \text{ Sin } \psi$ dengan $x\dot{y} - y\dot{x} = \delta$ dan $\psi$ besarnya sudut orbit dihitung dari titik *Aries*, maka dapat dicari bahwa

$$\delta = r^2\dot{\psi} \qquad \text{<2.46>}$$

Dari persamaan <2.43> dengan masing -masing dikalikan dengan $\dot{x}$, $\dot{y}$ dan $\dot{z}$ dan dijumlahkan diperoleh

$$\dot{x}\,\ddot{x} + \dot{y}\,\ddot{y} + \dot{z}\,\ddot{z} = -\mu\,\frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r^3} \qquad \text{<2.47>}$$

atau dapat ditulis

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right] = -\frac{1}{2}\,\frac{\mu}{r^3}\,\frac{d(r^2)}{dt} \qquad \text{<2.48>}$$

dengan $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Persamaan <2.48> diselesaikan diperoleh

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\left(\frac{\mu}{r} + C\right) \qquad \text{<2.49>}$$

karena z = 0 maka diperoleh

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 = 2\left(\frac{\mu}{r} + C\right) \qquad \text{<2.50>}$$

atau

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{-\frac{\delta^2}{r^2} + 2\left(\frac{\mu}{r} + C\right)} \qquad \text{<2.51>}$$

Dari $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\psi}\,\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\delta}{r}\right)$

maka dihasilkan

$$-\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\delta}{r}\right) = \sqrt{-\frac{\delta^2}{r^2} + 2\left(\frac{\mu}{r} + C\right)} \qquad \text{<2.52>}$$

Misalkan $q = -\frac{\mu}{\delta} + \frac{\delta}{r}$ dan $Q^2 = 2C + \frac{\mu^2}{\delta^2}$

maka persamaan <2.52> menjadi

$$\frac{dq}{d\psi} = -\sqrt{Q^2 - q^2}$$

Dengan transformasi $\sigma = \frac{q}{Q}$ didapatkan bahwa

$$\psi = \text{arc Cos}\sigma + \gamma \qquad \text{<2.53>}$$

$\gamma$ adalah konstanta integrasi.

Dari persamaan <3.53> dengan memasukkan harga q dan Q dihasilkan :

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{\delta^2} + \frac{\mu}{\delta^2}\sqrt{\frac{2\delta^2 C}{\mu^2} + 1}\ \text{Cos}\ (\psi - \gamma) \qquad \text{<2.54>}$$

Dari persamaan <2.42> dengan mensubstitusikan $\vartheta = \psi - \tilde{\omega}$ dengan $\tilde{\omega}$ adalah *longitude of perigee* (jarak sudut dari titik Aries ke titik perigee ) didapatkan persamaan

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\ \text{Cos}\ (\psi - \tilde{\omega})}{a\ (1 - e^2)} \qquad \text{<2.55>}$$

Dengan membandingkan persamaan <2.54> dan <2.55> didapatkan suatu relasi

$$\gamma = \tilde{\omega} \qquad \text{<2.56a>}$$

$$\delta^2 = \mu a\ (1 - e^2) \qquad \text{<2.56b>}$$

$$C = -\frac{\mu}{2a} \qquad \text{<2.56c>}$$

Dari persamaan <2.56b> diperoleh bahwa integral luas dalam bidang xy adalah

$$x\dot{y} - \dot{x}y = \sqrt{\mu a\ (1 - e^2)}$$

Dan dari persamaan <2.51> dan persamaan <2.56b> dan <2.56c> didapatkan

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\tilde{n}a}{r}\sqrt{a^2e^2 - (r - a)^2}$$

Terbukti !

Definisi 2.8.3

Relasi-relasi dibawah ini disebut persamaan Kepler

$$M = E - e\sin \mathbf{E} = \tilde{n}(t - T) = \tilde{n}t + \varepsilon - \tilde{\omega} \quad \text{<2.57>}$$

dengan M = *Mean anomaly*

E = eksentrisitas anomaly

ε = *Mean longitude*

$\tilde{\omega}$ = *Longitude of perigee.*

Definisi 2.8.4

Persamaan koreksi differensial dari elemen-elemen I, Ω dan ω pada bidang xy adalah:

$$dI = dx\cos\omega + dy\sin\omega \quad \text{<2.58a>}$$

$$\sin I\, d\Omega = dx\sin\omega - dy\cos\omega \quad \text{<2.58b>}$$

$$d\omega + \cos I\, d\Omega = dr \quad \text{<2.58c>}$$

## 2.9 Fungsi Gangguan - *R*

Definisi 2.9.1

Misalkan sebuah satelit P yang memperoleh gangguan dari benda ketiga $P_1$, maka fungsi gangguan dapat dituliskan

$$R = Gm_1\left[\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r^3}\right] \quad \text{<2.59>}$$

Dimana [x, y, z] dan $[x_1, y_1, z_1]$ adalah

koordinat *Kartesius geocentric* dari P dan $P_1$

dan

$$\Delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \quad \text{<2.60>}$$

sehingga berturut-turut diperoleh

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -Gm_1 \left[ \frac{x - x_1}{\Delta^3} + \frac{x_1}{r_1^{\,3}} \right] \quad \text{<2.61a>}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -Gm_1 \left[ \frac{y - y_1}{\Delta^3} + \frac{y_1}{r_1^{\,3}} \right] \quad \text{<2.61b>}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -Gm_1 \left[ \frac{z - z_1}{\Delta^3} + \frac{z_1}{r_1^{\,3}} \right] \quad \text{<2.61c>}$$