BAB II

TEORI UKURAN DALAM RUANG PROBABILITAS

Didefinisikan himpunan U dan klas $\mathfrak{S}$ dari himpunan bagian U sehingga setiap event A dapat diartikan sebagai beberapa himpunan bagian dari himpunan U yang berada dalam $\mathfrak{S}$. Sembarang event A dapat diartikan sebagai gabungan dari elemen-elemen U yang berada dalam A. Titik-titik dalam U disebut event-event elementer dan U disebut ruang dari event-event elementer. Sebagai contoh, jika suatu eksperimen memuat gambaran grafik dari fungsi random kontinu dalam interval tertentu dari waktu [a,b], maka U dapat diartikan sebagai ruang dari fungsi kontinu pada interval [a,b].

2.1. Ukuran

U menunjukkan suatu himpunan abstrak, yang disebut dengan ruang. Dimisalkan bahwa definisi dan sifat-sifat sederhana dari operasi aljabar dalam himpunan diketahui dan dinyatakan hubungan dualitas :

$$\overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A_k} \qquad (1)$$

$$\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A_k} \qquad (2)$$

dimana indeks k berada dalam sembarang himpunan-himpunan yang mempunyai harga.

Definisi 2.2.1 :

Suatu klas tidak kosong $\mathcal{R}$ dari himpunan-himpunan bagian U disebut suatu aljabar dari himpunan-himpunan U jika memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

a. $A \in \mathcal{R}$ dan $B \in \mathcal{R}$ maka $A \cup B \in \mathcal{R}$.

b. $A \in \mathcal{R}$ maka $\overline{A} \in \mathcal{R}$

Akibat sederhana dari definisi : karena $A \cup \overline{A}$, dan $A \in \mathcal{R}$ maka $U \in \mathcal{R}$. Hal ini berarti bahwa himpunan kosong berada dalam himpunan-himpunan aljabar. Jika $A \in \mathcal{R}$ dan $B \in \mathcal{R}$, maka berdasarkan (1) dan (2) $A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} \in \mathcal{R}$ dan $A \backslash B = A \cup \overline{B} \in \mathcal{R}$.

Definisi 2.1.2 :

Suatu aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ disebut suatu σ-aljabar jika untuk sembarang barisan dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathfrak{S}$, dimana $k = 1,2,\ldots$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{S}$. Himpunan - himpunan $A \in \mathfrak{S}$ disebut $\mathfrak{S}$-terukur. (Karena $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}}$, maka interseksi dari sembarang gabungan dari himpunan - himpunan countable yang berada dalam $\mathfrak{S}$ juga berada dalam $\mathfrak{S}$)

Definisi 2.1.3 :

Suatu himpunan fungsi W disebut additive, jika dianggap harga-harga tak berhingga dan jika untuk sembarang barisan berhingga dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathcal{A}$ (untuk $k=1,2,\ldots,n$) adalah pasangan terpisah (yaitu : $A_k \cap A_r = \emptyset$, untuk $k \neq r$

Definisi 2.2.1 :

Suatu klas tidak kosong $\mathcal{R}$ dari himpunan-himpunan bagian U disebut suatu aljabar dari himpunan-himpunan U jika memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

a. $A \in \mathcal{R}$ dan $B \in \mathcal{R}$ maka $A \cup B \in \mathcal{R}$.

b. $A \in \mathcal{R}$ maka $\overline{A} \in \mathcal{R}$

Akibat sederhana dari definisi : karena $A \cup \overline{A}$, dan $A \in \mathcal{R}$ maka $U \in \mathcal{R}$. Hal ini berarti bahwa himpunan kosong berada dalam himpunan-himpunan aljabar. Jika $A \in \mathcal{R}$ dan $B \in \mathcal{R}$, maka berdasarkan (1) dan (2) $A \cap B = (\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}) \in \mathcal{R}$ dan $A \setminus B = \overline{A \cup \overline{B}} \in \mathcal{R}$.

Definisi 2.1.2 :

Suatu aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ disebut suatu σ-aljabar jika untuk sembarang barisan dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathfrak{S}$, dimana $k = 1,2,\ldots,$ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{S}$. Himpunan - himpunan $A \in \mathfrak{S}$ disebut $\mathfrak{S}$-terukur. (Karena $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k}$, maka interseksi dari sembarang gabungan dari himpunan - himpunan countable yang berada dalam $\mathfrak{S}$ juga berada dalam $\mathfrak{S}$)

Definisi 2.1.3 :

Suatu himpunan fungsi W disebut additive, jika dianggap harga-harga tak berhingga dan jika untuk sembarang barisan berhingga dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathcal{A}$ (untuk $k=1,2,\ldots,n$) adalah pasangan terpisah (yaitu : $A_k \cap A_r = \emptyset$, untuk $k \neq r$

dimana $k,r=1,2,\ldots,n$ dan $\emptyset$ adalah himpunan kosong) sedemikian sehingga :

$$\bigcup_{k=1}^{n} A \in \mathscr{A}$$

sehingga didapat :

$$W\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} W(A_k) \qquad (3)$$

Jika persamaan (3) untuk sembarang gabungan yang countable, yaitu jika :

$$W\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} W(A_k)$$

untuk sembarang barisan dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathscr{R}$, dimana $A_k \cap A_r = \emptyset$ bila $k \neq r$, untuk $k,r = 1,2,\ldots,n$ sedemikian sehingga :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A \in \mathscr{A}$$

maka himpunan fungsi $W = W(A)$ disebut additive countable (atau additive lengkap)

Definisi 2.1.4 :

Suatu fungsi himpunan additive countable nonnegatif $\mu=\mu(A)$ didefinisikan dalam suatu σ-aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ dan memenuhi persamaan $\mu(\emptyset)=0$ disebut dengan suatu ukuran.

Jika suatu σ-aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ didefinisikan dalam suatu himpunan U disebut dengan suatu ruang ukuran $(U,\mathfrak{S},\mu)$ atau suatu ruang terukur.

Dalam masalah khusus, jika U merupakan ruang sampel dan jika P menunjukkan suatu ukuran yang didefinisikan dalam $\mathfrak{S}$ sedemikian sehingga $P(U) = 1$, maka tripel $\{U, \mathfrak{S}, P\}$ disebut dengan suatu *Ruang Probabilitas.*

Selanjutnya akan dibahas beberapa sifat dari ukuran

Teorema 2.1.1 :

a. Jika A dan $B \supset A$ berada dalam $\mathfrak{S}$, maka $\mu(A) \leq \mu(B)$ dan jika $\mu(A) \neq \infty$, maka $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

b. Jika $\{A_n\}$ adalah barisan-barisan yang countable atau infinit dari himpunan - himpunan yang berada dalam $\mathfrak{S}$ maka :

$$\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$$

c. Jika $\{A_n\}$ adalah suatu barisan naik dari himpunan-himpunan dalam $\mathfrak{S}$, yaitu jika $A_{n+1} \supset A_n$, untuk $n = 1,2,\ldots$,maka :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad (4)$$

d. Jika $\{A_n\}$ untuk $n = 1,2, \ldots$ adalah suatu barisan turun dari himpunan-himpunan dalam $\mathfrak{S}$ dan jika $\mu(A_1)<\infty$, maka :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad (5)$$

Bukti :

a. Karena $B \setminus A \in \mathfrak{S}$ dan $B = A \cup (B \setminus A)$ (untuk $A \subset B$), maka diperoleh : $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

sehingga $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

b. Ambil $C_1 = A_1$ dan $C_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$ untuk $n = 2,3,\ldots$ Kemudian himpunan-himpunan C_n berada dalam $\mathfrak{S}$ dan pasangan disjoint (yaitu $C_n \cap C_r = \emptyset$ untuk $n \neq r$). Oleh karena itu :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

dan

$$\mu (C_n) \leq \mu (A_n), \text{ maka :}$$

$$\mu (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \mu (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu (C_n)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu (A_n)$$

c. Jika $A_n \subset A_{n+1}$ untuk $n = 1,2,\ldots$, maka diperoleh :

$$C_n = A_n \setminus A_{n-1} \text{ (berdasarkan b)}$$

dan $\mu(C_n) = \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})$ jika $\mu(A_{n-1}) \neq \infty$

misalkan : $\mu(A_{n-1}) \neq \infty$ untuk setiap n dan $A_o = \emptyset$, maka :

$$\mu (\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu (C_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [\mu (A_n) - \mu (A_{n-1})]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mu (A_n) = \mu (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

Di sisi lain, jika $\mu (A_{no}) = \infty$, untuk beberapa $n=n_o$, maka untuk $n > n_o$ didapat :

$$\mu (A_n) = \infty \quad \text{dan} \quad \mu (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty.$$

d. Ambil $B_n = A_1 \setminus A_n$, untuk $n = 1,2,\ldots$ Himpunan-himpunan B_n berada dalam σ-aljabar $\mathfrak{S}$. Dengan menambah sifat monoton (yaitu : $B_n \subset B_{n-1}$) dan dari c maka :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

Di sisi lain,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Oleh karena itu :

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

$$= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

$$= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} [\mu(A_1) - \mu(A_n)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Dengan demikian teorema ini telah terbukti.

Sifat-sifat dari ukuran ini juga berlaku dalam ruang probabilitas, yaitu :

2.1.1. Jika $A \subset B$ maka : $P(A) \leq P(B)$

2.1.2. Jika $\{A_n\}$ adalah suatu hipunan berhingga atau countable dari pasangan event - event terpisah, maka :

$$P(\cup_n A_n) = \Sigma_n P(A_n)$$

2.1.3. Jika $\{A_n\}$ suatu barisan naik dari event-event yaitu jika A_n berada dalam A_{n+1} maka :

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\sim} A_n\right)$$

Jika $\{A_n\}$ suatu barisan turun dari event-event yaitu jika A_{n+1} berada dalam A_n maka :

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\sim} A_n\right)$$

Definisi 2.1.5 :

Ambil $\{A_n\}$, untuk n=1,2,... menunjukkan suatu barisan tak berhingga dari himpunan-himpunan. Limit superior $\overline{\lim}\ A_n$ dari barisan $\{A_n\}$ didefinisikan sebagai himpunan yang memuat titik-titik dari U yang berada dalam ketakberhinggaan dari himpunan-himpunan A_n. Limit inferior $\underline{\lim}\ A_n$ dari barisan $\{A_n\}$ didefinisikan sebagai semua himpunan dari titik-titik ruang U yang berada dalam semua himpunan-himpunan A_n (semua tetapi yang berhingga) untuk n = 1,2,...

Kemudian

$$\overline{\lim}\ A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad (5)$$

$$\underline{\lim}\ A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \qquad (6)$$

Jika $\{A_n\}$ untuk n = 1,2,... adalah suatu barisan naik, maka :

$$\overline{\lim}\ A_n = \underline{\lim}\ A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Disisi lain jika $\{A_n\}$ adalah suatu barisan turun, maka :

$$\overline{\lim}\ A_n = \underline{\lim}\ A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Dari (5) dan (6) limit-limit superior dan inferior dari barisan dari himpunan-himpunan berada dalam σ-aljabar $\mathfrak{S}$.

Definisi 2.1.6 :

Suatu barisan dari himpunan-himpunan $\{A_n\}$, untuk n=1,2,..., dikatakan konvergen jika $\overline{\lim}\ A_n = \underline{\lim}\ A_n$.

Dalam masalah ini harga bersama dari limit superior dan limit inferior dari barisan $\{A_n\}$ disebut dengan limit dari barisan $\{A_n\}$: $\lim A_n = \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$.

μ menunjukkan suatu ukuran dalam $\mathfrak{S}$, selanjutnya definisi tentang hubungan barisan dari himpunan-himpunan yang mana setiap titik $u \in U$ berada dalam hanya suatu harga berhingga dari himpunan-himpunan atau semua A_n dari beberapa n didalamnya. Selanjutnya setiap barisan monoton adalah konvergen.

Karena :

$$\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

dengan dasar formula (4) dan (5) , setiap barisan konvergen $\{A_n\}$ dari himpunan-himpunan A_n dan setiap ukuran berhingga μ,

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n) \qquad (7)$$

Keadaan nomor (7) dapat diperlihatkan sebagai berikut :

Jika A_n menunjukkan suatu barisan naik, maka :

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

sehingga :

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Dan jika A_n menunjukkan suatu barisan turun maka :

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

sehingga :

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right)$$

Definisi 2.1.7 :

Suatu klas $\mathbb{M}$ dari himpunan-himpunan dikatakan monoton jika kekonvergenan dari sembarang barisan monoton dari himpunan-himpunan $A_n \in \mathbb{M}$, untuk $n=1,2,\ldots$, ini berarti bahwa limit dari suatu barisan berada dalam $\mathbb{M}$.

Teorema 2.1.2 :

Klas monoton minimal $m\{\mathscr{A}\}$ memuat aljabar $\mathscr{A}$ yang sama dengan σ-aljabar minimal $\sigma\{\mathscr{A}\}$.

Bukti :

Interseksi dari klas-klas monoton adalah suatu klas monoton, Selanjutnya dalam sembarang klas monoton $\mathscr{A}$ dari himpunan-himpunan ada suatu klas monoton minimal $m\{\mathscr{A}\}$ yang memuat $\mathscr{A}$.

Jelas bahwa, setiap σ-aljabar adalah suatu klas monoton dan setiap aljabar yaitu suatu klas monoton adalah suatu σ-aljabar :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Dalam beberapa masalah terlihat bahwa suatu klas partikuler dari himpunan-himpunan berisi suatu σ-aljabar minimal yang dihasilkan oleh suatu aljabar.

Dari definisi diatas terlihat bahwa $m\{\mathscr{A}\} \supset \sigma\{\mathscr{A}\}$ adalah aljabar.

2.2. Fungsi-fungsi Terukur

Suatu variabel random ξ adalah suatu bilangan (variabel) yang berkorespondensi dengan tiap-tiap keluaran yang mungkin dari sebuah eksperimen. Karena keluaran-keluaran (out come) dari suatu eksperimen digambarkan oleh kejadian-kejadian elementer, suatu variabel random dapat digambarkan sebagai suatu fungsi dari suatu kejadian elementer, $\xi = f(u)$ untuk $u \in U$. Disisi lain, dalam teori probabilitas dasar, suatu variabel random ξ dikarakterisasikan oleh fungsi distribusi :

$$F(x) = P\{ \xi < x \}.$$

Sedangkan dalam teori ukuran pengertian kejadian $\{ \xi < x \}$ ditunjukkan dengan $\{ u, f(u) < x \}$. Oleh karena itu dalam membahas fungsi distribusi dari sebuah variabel random, maka himpunan $\{ u, f(u) < x \}$ harus untuk sembarang harga x yang real berada dalam $\mathfrak{S}$. Dalam bab ini akan dibahas klas-klas dari fungsi yang didefinisikan pada ruang terukur $\{U, \mathfrak{S}, \mu\}$.

Definisi 2.2.1 :

$\mathfrak{S}$ menunjukkan suatu σ-aljabar dari himpunan-himpunan ruang U. Diambil $f(u)$ menunjukkan suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu himpunan $\mathfrak{S}$-terukur M dan mengasumsikan harga-harga real (dan kemungkinan harga-harganya $\pm\infty$). Sehingga suatu fungsi $f(u)$ dikatakan $\mathfrak{S}$-terukur jika untuk setiap harga real x , himpunan $\{ u;\ f(u) < x \}$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Definisi 2.2.2 :

Fungsi $f(x)$ untuk $x \in R$ dikatakan sebagai suatu fungsi Borel jika untuk sembarang real a himpunan $\{ x;\ f(x) < a \}$ adalah suatu himpunan Borel.

Teorema 2.2.1 :

A menunjukkan sembarang himpunan Borel dalam ruang E_n dimensi n dan $f_1(u), \ldots, f_n(u)$ menunjukkan fungsi $\mathfrak{S}$-terukur yang semuanya didefinisikan dalam beberapa himpunan $M \in \mathfrak{S}$. Maka himpunan :

$$\{ u;\ u \in M,\ (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u)) \in A \}$$

adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Bukti :

Karena :

$$\{ u;\ u \in M,\ (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u)) \in A' \setminus A'' \}$$
$$= \{ u;\ u \in M,\ (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u)) \in A' \} \setminus \{ u;\ u \in M,\ (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u)) \in A'' \}$$

$$\{ u;\ u \in M,\ (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u)) \in \tilde{\bigcup_{k=1}} A^{\langle k \rangle} \}$$
$$= \tilde{\bigcup_{k=1}} \{ u;\ u \in M,\ (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u)) \in A^{\langle k \rangle} \}$$

klas $\mathscr{A}$ dari himpunan-himpunan A yang termuat dalam E_n sedemikian sehingga himpunan

$$\{ u;\ u \in M,\ (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u)) \in A \}$$

adalah $\mathfrak{S}$-terukur yang merupakan suatu σ-aljabar. $\mathscr{A}$ berisi interval tak berhingga demensi-n

$$I_{a1,\ldots,an} = \{ (x_1,\ldots,x_n); x_1<a_1,\ldots,x_n<a_n \}$$

Karena :

$$\{ u;\ u \in M,\ (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u)) \in I_{a1,\ldots,an} \}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\sim} \{ u;\ u \in M,\ (f_k(u) < a_k \}.$$

Akibatnya $\mathscr{A}$ berisi semua himpunan Borel dalam E_n.

Teorema 2.2.2 :

$f_1(u),\ldots,f_n(u)$ menunjukkan suatu barisan dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur berhingga yang didefinisikan dalam suatu himpunan $\mathfrak{S}$-terukur M dan $\varphi(t_1,\ldots,t_n)$ menunjukkan suatu fungsi Borel dalam ruang E_n demensi-n. Maka fungsi $\varphi(f_1(u),\ldots,f_n(u))$ untuk $u \in M$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Bukti :

Untuk sembarang real a, himpunan :

$$B_a = \{ (t_1,\ldots,t_n);\ \varphi(t_1,\ldots,t_n) < a \}$$

adalah suatu himpunan bagian dari E_n. Himpunan :

$$\{ u;\ u \in M,\ \varphi(f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u)) < a \}$$

$$= \{ u;\ u \in M,\ (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u)) \in B_a \}$$

adalah $\mathfrak{S}$-terukur, dengan dasar teorema 2.2.1, maka terbuktilah teorema ini.

Selanjutnya adalah pembahasan istilah-istilah yang sering digunakan. Jika μ dianggap mempunyai sifat hampir dimana-mana pada himpunan M, maka pernyataan (mod μ) sebagai pengganti μ hampir dimana-mana. Misalnya : jika f dan g adalah ekuivalen pada himpunan M, maka dapat ditulis $f(u)=g(u)$, $u \in M (\text{mod}\,\mu)$. Jika $\{f_n(u)\}$ konvergen μ hampir dimana-mana ke $f(u)$ pada M, maka dapat ditulis :

$$\lim_{n\to\infty} f(u) = f(u),\ u \in M\ (\text{mod}\ \mu)$$

2.3 Fungsi Terukur dalam Ruang Probabilitas

Selanjutnya dalam ruang probabilitas berlaku definisi dibawah ini:

Definisi 2.3.1 :

Sembarang fungsi $\mathfrak{S}$-terukur terbatas dan real (mod P) disebut suatu variabel random.

Dua variabel random $\xi_1 = f_1(u)$ dan $\xi_2 = f_2(u)$ dianggap sama jika dua variabel random tersebut ekuivalen

$$\xi_1 = \xi_2$$

(Jika $f_1(u) = f_2(u)$ (mod P))

Untuk setiap variabel random ξ, suatu fungsi $F(x)$ dari argumen real x, dikatakan sebagai fungsi distribusi dari variabel random ξ, dan didefinisikan :

$$F(x) = P\{\ \xi < x\ \} = P\{\ u;\ f(u) < x\ \}$$

Jika $\{\ \xi_k = f_k(u),\ k = 1,2,\ldots,n\ \}$ adalah n-tupel dari variabel-variabel random, fungsi (dari n variabel real) :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\}$$

$$= P[\bigcap_{k=1}^{n} \{u; f_k(u) < x_k\}]$$

disebut dengan fungsi ditribusi bersama dari variabel-variabel random ξ_k untuk k = 1,2,...,n.

Jika $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ menunjukkan suatu fungsi Borel dalam ruang Euclid berdemensi n dan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ menunjukkan n variabel-variabel random, dan didefinisikan

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \varphi(f_1(u), \ldots f_n(u)) = F(u)$$

dengan $\xi_k = f_k(u)$ untuk k = 1,2,...,n. Jika fungsi $f_k(u)$ diganti suatu fungsi $f_k(u)$ (mod P), fungsi $F(u)$ diganti dengan suatu fungsi (mod μ), maka dengan dasar teorema 2.2.2 dalam ruang probabilitas diperoleh sifat sebagai berikut :

Jika suatu fungsi Borel $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ dari suatu variabel-variabel random $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ adalah berhingga (mod P), maka fungsi Borel tersebut adalah variabel random juga.

2.4. Kekonvergenan dalam Ukuran

Barisan dari variabel random ξ_n dikatakan konvergen dalam probabilitas ke suatu variabel random ξ jika untuk sembarang $\varepsilon > 0$, $P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \to 0$ untuk $n \to \infty$, dan dapat ditulis dengan : $\xi = \text{P} - \lim \xi_n$

Selanjutnya akan diberikan definisi dari fungsi : $\{U,\mathfrak{S},\mu\}$ menunjukkan suatu ruang terukur dan $\{f_n(u)\}$ untuk n=1,2,... menunjukkan suatu barisan dari fungsi- fungsi $\mathfrak{S}$-terukur yang berhingga, μ hampir dimana - mana dalam U.

Definisi 2.4.1 :

Suatu barisan dikatakan konvergen dalam ukuran μ untuk suatu fungsi $\mathfrak{S}$-terukur $f(u)$, jika untuk sembarang $\varepsilon > 0$, $\mu\{ u; |f_n(u) - f(u)| > \varepsilon \} \to 0$ dimana $n\to\infty$, maka dapat ditulis $f(u) = \mu - \lim f_n(u)$

Selanjutnya $\{f_n(u)\}$ untuk n=1,2,... menunjukkan suatu barisan dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur yang berhingga (mod μ) dalam U. S menunjukkan himpunan titik-titik dari U yang mana barisan $\{f_n(u)\}$ konvergen ke suatu limit berhingga dan D menunjukkan himpunan titik-titik dimana barisan ini divergen, maka :

$$S = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \{ u; |f_n(u) - f_{n+m}(u)| < \tfrac{1}{k} \}$$

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \{ u; |f_n(u) - f_{n+m}(u)| \geq \tfrac{1}{k} \}$$

S dan D adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Definisi 2.4.2 :

Suatu barisan $\{ f_n(u) \}$, untuk n=1,2,... dikatakan konvergen hampir seragam dalam U, jika untuk sembarang $\varepsilon>0$ ada suatu himpunan H sedemikian sehingga $\mu(H)<\varepsilon$ dan barisan $\{ f_n(u) \}$ konvergen seragam dalam $U\setminus H$.

Definisi 2.4.3 :

Suatu barisan $\{f_n(u)\}$ dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur berhingga dikatakan fundamental dalam ukuran μ jika untuk sembarang $\varepsilon>0$, $\mu\{\ u;\ |f_n(u) - f_m(u)| > \varepsilon\ \} \to 0$ untuk $n,m\to\infty$.

Teorema 2.4.1 :

Jika suatu barisan $\{\ f_n(u)\ \}$ dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur yang berhingga (mod μ) adalah fundamental dalam ukuran μ maka memuat suatu himpunan bagian yang konvergen hampir seragam $\{\ f_n(u)\ \}$, untuk n = 1, 2, ...

Bukti :

Tentukan sebuah n_k sedemikian sehingga:

$$\mu\{\ u;\ |f_n(u) - f_m(u)| > 1/2^k\ \} < 1/2^k$$

untuk $n,m \geq n_k$. Misalkan bahwa barisan $\{\ n_k\ \}$ adalah suatu barisan naik. Dan misalkan bahwa :

$$E_k = \mu\{\ u;\ |f_{n_k}(u) - f_{n_{k+1}}(u)| > 1/2^k\ \}$$

Maka jika $u \notin \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$ dan $i,j \geq k$ (untuk $i<j$), selanjutnya :

$$|f_{n_i}(u) - f_{n_j}(u)|$$

$$\leq |\ f_{n_i}(u) - f_{n_{i+1}}(u)\ | + |\ f_{n_{i+1}}(u) - f_{n_{i+2}}(u)\ | + \ldots$$

$$+ |f_{n_{j-1}}(u) - f_{n_j}(u)|$$

$$\leq 1/2^{i} + 1/2^{i+1} + 1/2^{i+2} + \ldots + 1/2^{j-1} \leq 1/2^{i-1},$$

sehingga barisan $\{\ f_{n_k}(u)\ \}$ konvergen seragam dalam himpunan $U\setminus H_k$, dimana $H_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$ dan

$\mu(H_k) \leq \Sigma_{j=k}^{\infty} \mu(E_j) \leq 2^{1-k}$, dengan kata lain barisan $\{ f_{n_k}(u) \}$ konvergen hampir seragam dalam U. Dengan demikian terbuktilah teorema 2.4.1.

Teorema 2.4.2 :

Syarat perlu dan cukup untuk suatu barisan $\{ f_n(u) \}$ konvergen dalam ukuran μ bila barisan tersebut suatu barisan fundamental dalam ukuran μ

Bukti :

Syarat perlu :

Jika $\{ f_n(u) \}$ konvergen dalam ukuran ke fungsi $f(u)$, maka berlaku :

$$\mu\{ u;\ |f_n(u) - f_m(u)| > \varepsilon \}$$

$$\leq \mu\{ u; |f_n(u) - f(u)| > \tfrac{\varepsilon}{2} \} + \mu\{ u; |f(u) - f_m(u)| > \tfrac{\varepsilon}{2} \} \to 0$$

untuk $n, m \to \infty$.

Syarat cukup :

Jika suatu barisan $\{ f_n(u) \}$ adalah fundamental dalam ukuran, berdasarkan teorema 1 memuat sebuah himpunan bagian $\{ f_{n_k}(u) \}$ yang konvergen hampir seragam dan dari sini dalam ukuran untuk beberapa fungsi $\mathfrak{S}$-terukur yang berhingga (mod μ) $f(u)$. Maka berlaku :

$$\mu\{ u;\ |f(u) - f_n(u)| > \varepsilon \}$$

$$\leq \mu\{ u; |f(u) - f_{n_k}(u)| > \tfrac{\varepsilon}{2} \} + \mu\{ u; |f_{n_k}(u) - f_n(u)| > \tfrac{\varepsilon}{2} \}$$

berdasarkan pilihan dari barisan { $f_{n_k}(u)$ }, bentuk pertama dalam ruas kanan dari pertidaksamaan mendekati nol untuk $k \to \infty$ dan bentuk kedua mendekati nol untuk $k, n \to \infty$, terlihat { $f_n(u)$ } adalah fundamental dalam ukuran. Terbuktilah teorema 2.4.2.

Selanjutnya jika { ξ_n } menunjukkan suatu barisan dari variabel-variabel random. Dan didefinisikan suatu event S yang berarti bahwa barisan { ξ_n } konvergen ke suatu limit berhingga dan didefinisikan $P(S)$ adalah probabilitas dari event tersebut, maka diperoleh definisi sebagai berikut :

Definisi 2.4.4 :

Jika $P(S) = 1$, maka barisan dari fungsi-fungsi $\xi_n = f_n(u)$ konvergen hampir dimana-mana dan dikatakan bahwa barisan { ξ_n } konvergen hampir tertentu (atau bahwa { ξ_n } konvergen dengan probabilitas 1).

Definisi 2.4.5 :

Jika suatu variabel random ξ sedemikian sehingga :

$P \{ \mid \xi_n - \xi \mid > \varepsilon \} \to 0$ untuk $n \to \infty$ untuk sembarang $\varepsilon > 0$, maka barisan { ξ_n } dikatakan konvergen dalam probabilitas ke variabel random ξ, yaitu jika :

$$\xi = P\text{-}\lim \xi_n .$$

Selanjutnya dari teorema-teorema dan definisi diatas dalam suatu ruang probabilitas berlaku sifat sebagai berikut :

Syarat perlu dan cukup suatu barisan dari variabel-variabel random agar konvergen dalam probabilitas adalah untuk sembarang $\varepsilon > 0$ *dan untuk sembarang* $\delta > 0$ *ada suatu* $n_o = n_o(\varepsilon, \delta)$ *sedemikian sehingga pertidaksamaan* $n' > 0$ *dan pertidaksamaan* $n > n_o$ *berada dalam pertidaksamaan :*

$$P\{ | \xi_n' - \xi_n | > \varepsilon \} < \delta$$

dan bentuk ini disebut dengan bentuk Chauchy terhadap probabilitas dari barisan $\{\xi_n\}$.

2.5 Integral dalam Ukuran

Dalam teori probabilitas, ditentukan suatu variabel random ξ, suatu harga khusus $M\xi$ yang dikenal sebagai ekspektasi matematika dari ξ. Jika variabel random ξ diasumsikan sebagai beberapa harga berhingga $x_1, x_2, \dots, x_n$, ekspektasi matematika diberikan oleh formula :

$$M\xi = \sum_{i=1} x_i P\{\xi = x_i\}$$

dan memiliki sifat-sifat berikut :

$$M(a\xi + b\eta) = a M\xi + b M\eta$$

dan pertidaksamaan $\xi \le \eta$ berarti $M\xi < M\eta$.

Jika variabel random diubah ke sembarang fungsi yang didefinisikan dalam ruang terukur, konsep dari ekspektasi matematika menjadi konsep suatu integral.

Diasumsikan suatu ruang terukur $\{U,\mathfrak{S},\mu\}$ dan bahwa semua fungsi-fungsi adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Definisi 2.5.1 :

Integral :

$$M\xi = \int_U f(u)\ \mu(du), \text{ dengan } \xi = f(u)$$

disebut dengan *Ekspektasi Matematika* dari variabel random ξ dan dinotasikan dengan $M\xi$.

Berikut adalah sifat-sifat sederhana dari integral fungsi sederhana :

$$\text{jika } f(u) \geq 0 \text{ berarti : } \int_U f(u)\ \mu(du) \geq 0$$

$$\int_U k\ f(u)\ \mu(du) = k \int_U f(u)\mu(du)$$

dimana k adalah sembarang konstanta.

$$\int_U [f_1(u) + f_2(u)]\ \mu(du) = \int_U f_1(u)\mu(du) + \int_U f_2(u)\mu(du)$$

Selanjutnya akan dibahas teorema-teorema perubahan limit.

Teorema 2.5.1 (Lebesgue) :

Misalkan $\{f_n(u)\}$ adalah suatu barisan tidak turun dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur nonnegatif. Definisikan bahwa :

$$f(u) = \lim f_n(u) \pmod{\mu}$$

Maka :

$$\lim \int_U f_n(u)\ \mu(du) = \int_U f(u)\ \mu(du)$$

Bukti :

Untuk tiap-tiap n, $\{g_{n_k}(u)\}$ menunjukkan suatu barisan tidak turun dari fungsi-fungsi sederhana nonnegatif yang konvergen ke $f_n(u)$

$$\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(u) = f_n(u)$$

dan definisikan $h_n(u) = \max_{i\le n} g_{i_n}(u)$

karena $g_{i_n}(u) \le f_i(u)$, maka diperoleh :

$$h_n(u) \le \max_{i\le n} f_i(u) = f_n(u)$$

dan

$$\lim h_n(u) \le \lim f_n(u) = f(u) \qquad (1)$$

barisan $\{ h_n(u) \}$ adalah barisan tidak turun, yang terdiri dari fungsi-fungsi sederhana untuk semua k

$$\lim_{n\to\infty} h_n(u) \ge \lim_{n\to\infty} g_{n_k}(u) = f_k(u)$$

Akibatnya :

$$\lim_{n\to\infty} h_n(u) \ge \lim_{k\to\infty} f_k(u) = f(u)$$

Dengan berdasarkan (1) diperoleh :

$$f(u) = \lim_{n\to\infty} h_n(u)$$

Dari definisi integral dan formula (1), maka :

$$\int_u f(u)\mu(du) = \lim \int_u h_n(u)\,\mu(du) \le \lim \int_u f_n(u)\mu(du) \qquad (2)$$

dilain sisi :

$$f_n(u) = \lim_{k\to\infty} g_{n_k}(u) \le \lim_{n\to\infty} h_n(u) = f(u)$$

$$f_n(u) \le f(u)$$

sehingga :

$$\overline{\lim} \int_U f_n(u)\mu(du) \leq \int_U f(u)\mu(du) \tag{3}$$

dari pertidaksamaan (2) dan pertidaksamaan (3) dapat diambil kesimpulan :

$$\lim \int_U f_n(u)\mu(du) = \int_U f(u)\mu(du)$$

sehingga terbuktilah teorema 1.

Dari teorema 2.5.1, jika $M\xi = \int_U f(u)\,\mu(du)$ maka berlaku sifat:

$$M \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} M\xi_k$$

Teorema 2.5.2 (Fatou's lemma) :

Ambil $\{f_n(u)\}$ menunjukkan suatu barisan dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur nonnegatif, maka :

$$\int_U \underline{\lim}\, f_n(u)\mu(du) \leq \underline{\lim} \int_U f_n(u)\mu(du) \tag{4}$$

Bukti :

$$\underline{\lim}\, f_n(u) = \lim g_n(u)$$

dimana $g_n(u) = \inf\{\, f_n(u),\ f_{n+1}(u),\ \ldots \,\}$ adalah suatu barisan tidak turun dari fungsi-fungsi nonnegatif.

Selanjutnya dari teorema 2.5.1 (Lebesgue's) :

$$\int_U \underline{\lim}\, f_n(u)\mu(du) = \int_U \lim g_n(u)\mu(du)$$

$$= \lim \int_U g_n(u)\mu(du) \leq \underline{\lim} \int_U f_n(u)\mu(du)$$

Jadi terbukti bahwa :

$$\int_U \underline{\lim}\ f_n(u)\mu(du) \le \underline{\lim} \int_U f_n(u)\mu(du)$$

Teorema 2.5.3 (Lebesgue's) :

$\{f_n(u)\}$ menunjukkan suatu barisan dari fungsi - fungsi terukur. Dan dianggap ada suatu fungsi pengintegral nonnegatif $s(u)$ sedemikian sehingga $|\ f_n(u)\ | \le s(u)$ untuk $n=1,2,\ldots$, maka :

$$\int_U \underline{\lim}\ f_n(u)\mu(du) \le \underline{\lim} \int_U f_n(u)\mu(du)$$

$$\le \overline{\lim} \int_U f_n(u)\mu(du) \le \int_U \overline{\lim}\ f_n(u)\mu(du)$$

Dalam keadaan khusus, jika $\{f_n(u)\}$ konvergen hampir dimana-mana dalam U untuk $f(u)$, maka :

$$\lim \int_U f_n(u)\mu(du) = \int_U f(u)\mu(du)$$

Bukti :

Pengaplikasian teorema 2.5.2 (Lemma Fatou's) untuk barisan $\{s(u)+f_n(u)\}$, diperoleh :

$$\underline{\lim} \int_U [s(u) + f_n(u)]\ \mu(du) \ge \int_U \underline{\lim}\ [s(u) + f_n(u)]\ \mu(du)$$

$$= \int_U [s(u) + \underline{\lim}\ f_n(u)]\ \mu(du)$$

$$= \int_U s(u)\mu(du) + \int_U \underline{\lim}\ f_n(u)\mu(du) \qquad (5)$$

Karena :

$$\underline{\lim} \int_U [s(u) + f_n(u)]\mu(du)$$

$$= \underline{\lim}\ \{ \int_U s(u)\mu(du) + \int_U f_n(u)\mu(du)\ \}$$

$$= \int_U s(u)\mu(du) + \underline{\lim} \int_U f_n(u)\mu(du) \qquad (6)$$

Dari (5) dan (6), karena kesamaan pengintegral dari fungsi $s(u)$, diperoleh :

$$\underline{\lim} \int_U f_n(u)\mu(du) \geq \int_U \underline{\lim}\, f_n(u)\mu(du) \qquad (7)$$

Pengaplikasian pertidaksamaan (7) untuk barisan $\{-f_n(u)\}$ diperoleh :

$$\underline{\lim} \int_U -f_n(u)\mu(du) = -\ \overline{\lim} \int_U f_n(u)\mu(du)$$

$$\geq \int_U \underline{\lim}\ (-f_n(u)\mu(du) = -\int_U \overline{\lim}\ f_n(u)\mu(du),$$

sehingga :

$$\int_U \overline{\lim}\ f_n(u)\mu(du) \geq \overline{\lim} \int_U f_n(u)\mu(du) \qquad (8)$$

Dari pertidaksamaan (7) dan pertidaksamaan (8), maka terbuktilah teorema 2.5.3.

Teorema 2.5.4 :

$\{f_n(u)\}$ menunjukkan suatu barisan dari fungsi-fungsi terukur yang konvergen dalam ukuran ke suatu fungsi $f(u)$ dalam U. Misalkan bahwa $|f_n(u)| \leq s(u)$ (mod μ), $n=1,2,\ldots$, dimana $s(u)$ adalah suatu fungsi integral, maka :

$$\lim \int_U f_n(u)\mu(du) = \int_U f(u)\mu(du)$$

Bukti :

Berdasarkan pada teorema 2.4.1, yang mengatakan bahwa sembarang barisan $\{f_{n_k}(u)\}$ memuat suatu sub barisan $\{f_{n_{k_j}}(u)\}$ yang konvergen hampir seragam ke $f(u)$ dan berdasarkan teorema 2.5.3, maka diperoleh :

$$\lim_{j \to \infty} \int_U f_{n_{k_j}}(u)\mu(du) = \int_U f(u)\mu(du)$$

Kemudian barisan terbatas dari integral-integral : $\int_u f_n(u)\mu(du)$ mempunyai suatu titik tunggal dari susunan $\int_u f(u)\mu(du)$, sehingga :

$$\lim \int_u f_n(u)\mu(du) = \int_u f(u)\mu(du)$$

Dengan demikian terbuktilah teorema 2.5.4.

Dari teorema 2.5.4 ini jika $M\xi = \int_u f(u)\ \mu(du)$ maka berlaku sifat sebagai berikut :

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n = M\xi$$

Sifat-sifat ekspektasi matematika tersebut diatas juga berlaku dalam ruang probabilitas. Selanjutnya akan diberikan beberapa sifat dari ekspektasi matematika dalam ruang probabilitas. Sebelumnya akan diberikan definisi dari fungsi indikator sebagai berikut :

Definisi 2.5.2 :

Fungsi indikator $\chi_A(u)$ dari himpunan A didefinisikan sebagai fungsi yang sebanding dengan 1 untuk $u\in A$ dan sebanding dengan 0 untuk $u\notin A$.

Berdasarkan definisi dari fungsi indikator tersebut diatas dalam ruang probabilitas berlaku sifat :

2.5.1. Jika χ_A adalah suatu fungsi indikator dari event A, maka :

$$M \chi_A = P(A)$$

Selanjutnya sifat dibawah ini adalah suatu pertidaksamaan penting yang memberikan suatu probabilitas dari suatu event dalam batas-batas ekspektasi matematika :

2.5.2. Untuk sembarang fungsi Borel non negatif $f(x)$ yang tidak turun dalam interval $[0, \infty)$ dan sembarang variabel random ξ, maka berlaku :

$$P\{ |\xi| \geq a \} \leq \frac{M f(|\xi|)}{f(a)}$$

Dan pertidaksamaan ini disebut dengan *Pertidaksamaan Chebyshev.*

Bukti :

Dari pertidaksamaan :

$$f(|\xi|) \geq f(a) \chi_{[a,\infty)}(|\xi|)$$

dimana $\chi_{[a,\infty)}(x)$ adalah fungsi karakteristik dari interval tertutup kiri yang tak terbatas $[a, \infty)$ dan dari sifat-sifat sebelumnya maka diperoleh :

$$f(|\xi|) \geq f(a) \chi_{[a,\infty)}(|\xi|)$$

$$M f(|\xi|) \geq M f(a) \chi_{[a,\infty)}(|\xi|)$$

$$M f(|\xi|) \geq f(a) M \chi_{[a,\infty)}(|\xi|)$$

$$M f(|\xi|) \geq f(a) P\{ |\xi| \geq a \}$$

sehingga :

$$P\{ |\xi| \geq a \} \leq \frac{M f(|\xi|)}{f(a)}$$

2.5.3. Jika $g\,(x)$ suatu fungsi kontinu konvex (downward) untuk semua x yang real dan jika ξ adalah suatu variabel random dengan ekspektasi matematika maka:

$$M\,g\,(\,\xi\,) \;\geq\; g\,(\,M\xi\,)$$

dan pertidaksamaan ini disebut dengan *Pertidaksamaan Jensen*.

Bukti :

Karena $g(x)$ adalah kontinu konvex, maka terdapat garis : $l(x) = a + b\,x$, yang memenuhi :

$$l(x) = a + b\,x \;\leq\; g(x)$$

dan $l\,[\,M\,(\,\xi\,)\,] \;=\; g\,[\,M\,(\,\xi\,)\,]$

serta melalui titik ($M\,(\,\xi\,)$, $g\,[\,M\,(\,\xi\,)\,]$)

maka :

$$\begin{aligned} g\,[\,M\,(\,\xi\,)\,] &= l\,[\,M\,(\,\xi\,)\,] \\ &= M\,[\,l\,(\,\xi\,)\,] \\ &\leq M\,[\,g\,(\,\xi\,)\,] \end{aligned}$$

sehingga terbukti bahwa :

$$M\,g\,(\,\xi\,) \;\geq\; g\,(\,M\xi\,)$$